

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - \sqrt[3]{64y^2 - x^2} = 124, \\ 8y - \sqrt[3]{64y^2 - x^2} = -92. \end{cases}$$

2. [4 балла] Решите неравенство

$$\sqrt{\log_{2x^3} x^9} \leq \log_{2x} \frac{1}{x^3}.$$

3. [5 баллов] Найдите количество семизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые три последовательные степени числа десять равна 12414.

4. [5 баллов] Даны равнобокая трапеция $ABCD$ (AD и BC – основания, $AD > BC$) и окружность ω с центром C , касающаяся стороны AD . Касательные к ω , проведённые из точки B , пересекают прямую AD в точках P и Q (точка P лежит между Q и D). На продолжении стороны CB за точку B выбрана точка N так, что $\angle CPN$ – прямой. Найдите углы ADC , NQC и площадь четырёхугольника $NCDQ$, если известно, что $\angle NCP = \arctg \frac{8}{15}$, $AP = \frac{17}{2}$, $NC = 17$.

5. [5 баллов] Дана система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{3} \cos(x + y) = 5 \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right), \\ \sin(x + 2y) + \sqrt{3} \cos(x + 2y) = 8 \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right). \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y$, если известно, что оно определено и что этих значений не меньше двух.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x - 14}{2x - 3} \leq ax + b \leq 2 + \sqrt{\frac{51}{4} - 7x - x^2}$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

7. [6 баллов] Дан параллелепипед $KLMNK_1L_1M_1N_1$, грани $KLMN$ и LMM_1L_1 которого являются прямоугольниками. Сфера S касается прямых L_1M_1 и M_1N_1 , плоскости LMM_1 , а также плоскости KLM в точке K . Эта сфера повторно пересекает отрезок KM_1 в точке A . Найдите $\angle NN_1M_1$ и объём параллелепипеда $KLMNK_1L_1M_1N_1$, если известно, что $AK = 5$, $AM_1 = 2$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$1) \begin{cases} x - \sqrt[3]{64y^2 - x^2} = 124 \\ 8y - \sqrt[3]{64y^2 - x^2} = -92 \end{cases}$$

~~Сложно~~ Вычитаем:

$$x - 8y = 216. \text{ Теперь сложим:}$$

$$x + 8y - 2\sqrt[3]{(8y-x)(8y+x)} = 32. \text{ Пусть } x + 8y = t^3:$$

$$t^3 - 2\sqrt[3]{-6^3 t^3} = 32 \Rightarrow t^3 + 12t = 32. \text{ Заметим, что}$$

$$t = 2 \text{ подходит. } (8 + 24 = 32) \Rightarrow (t-2)(t^2 + 2t + 16) = 0$$

П.К. $t^2 + 2t + 16 = (t+1)^2 + 15 > 0$, но возможно лишь

$$t = 2: \begin{cases} x - 8y = 216 \\ x + 8y = 2 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{218}{2} = 109 \Rightarrow y = \frac{-107}{8}$$

Ответ: $(109; -\frac{107}{8})$

$$2) \text{ ОДЗ: } \begin{cases} 2x > 0 \\ 2x \neq 1 \\ \frac{1}{x^3} > 0 \\ 2x^3 > 0 \\ 2x^3 \neq 1 \\ x^9 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{2} \\ x \neq \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

Универсальное неравенство примет вид $\sqrt{\frac{\ln x^9}{\ln 2x^3}} \leq \frac{\ln \frac{1}{x^3}}{\ln 2x}$

$$\Rightarrow 3 \sqrt{\frac{\ln x}{\ln 2 + 3 \ln x}} \leq \frac{-3 \ln x}{\ln 2 + \ln x} \Rightarrow \sqrt{\frac{\ln x}{\ln 2 + 3 \ln x}} \leq \frac{-\ln x}{\ln 2 + \ln x} \quad (1)$$

Положительное выражение ≥ 0 : $\frac{\ln x}{\ln 2x^3} \geq 0 \Rightarrow$

$$\frac{\ln x - \ln 1}{\ln 2x^3 - \ln 1} \geq 0 \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Rightarrow} \frac{(x-1)}{(2x^3-1)} \geq 0 \Rightarrow \frac{(x-1)}{(x-\sqrt[3]{\frac{1}{2}})(x^2+x\sqrt[3]{\frac{1}{2}}+\sqrt[3]{\frac{1}{4}})} \geq 0$$

$$x^2 + x\sqrt[3]{\frac{1}{2}} + \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \text{ всегда } > 0 \Rightarrow x \in (-\infty; \sqrt[3]{\frac{1}{2}}) \cup [1; \infty)$$

Из неравенства следует $\frac{-\ln x}{\ln 2x} \geq 0 \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Rightarrow} \frac{x-1}{2x-1} \leq 0 \Rightarrow$

$$x \in (\frac{1}{2}; 1]$$

Теперь возведем левую часть (1) в квадрат:

$$\frac{\ln x}{\ln 2x^3} \leq \frac{\ln^2 x}{\ln^2 2x} \Rightarrow \ln x \frac{\ln x \cdot \ln 2x^3 - \ln^2 2x}{\ln^2 2x \ln 2x^3} \geq 0 \stackrel{\substack{(x \neq \frac{1}{2}) \\ \ln^2 2x > 0}}{\Rightarrow}$$

$$\ln x \frac{\ln x (\ln 2 + 3 \ln x) - (\ln 2 + \ln x)^2}{\ln 2x^3} \geq \frac{\ln x (3 \ln^2 x - \ln 2 \cdot \ln x)}{\ln 2x^3}$$

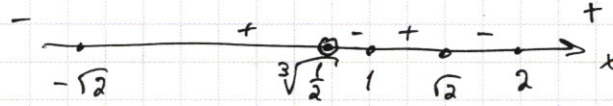
Умножим: $\ln x \cdot \ln 2 + 3 \ln^2 x - \ln^2 2 - \ln^2 x - 2 \ln 2 \cdot \ln x =$
 $= 2 \ln^2 x - \ln x \ln 2 - \ln^2 2 = \ln x (\ln x - \ln 2) + (\ln x - \ln 2) \cdot$

$$\cdot (\ln x + \ln 2) = (\ln x - \ln 2)(2 \ln x + \ln 2) = \ln \frac{x}{2} \cdot \ln \frac{x^2}{2}$$

Итак, $\ln x \frac{\ln \frac{x}{2} \cdot \ln \frac{x^2}{2}}{\ln 2x^3} \geq 0 \stackrel{\text{ОДЗ}}{\Rightarrow} \frac{(x-1)(\frac{x}{2}-1)(\frac{x^2}{2}-1)}{2x^3-1} \geq 0 \Rightarrow$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) Зурог.

 $x \in [-\sqrt{2}; \sqrt[3]{\frac{1}{2}}) \cup [1; \sqrt{2}] \cup [2; \infty)$. Обведи меня: $x \in (\frac{1}{2}; \sqrt[3]{\frac{1}{2}}) \cup \{1\}$ Ответ: $(\frac{1}{2}; \sqrt[3]{\frac{1}{2}}) \cup \{1\}$

3) Пусть семизначное число это $\overline{a_7 a_6 a_5 a_4 a_3 a_2 a_1}$.
 Очевидно максимальная степень десятки, на которую рассматривается остаток от деления (Большая из 3-х) ≥ 4 , т.к. иначе сумма остатков

$$\overline{a_4 a_3 a_2 a_1} + \overline{a_3 a_2 a_1} + \overline{a_2 a_1} \leq 9999 + 999 + 99 < 12414.$$

Если эта степень = 5, то сумма остатков

$$\overline{a_5 a_4 a_3 a_2 a_1} + \overline{a_4 a_3 a_2 a_1} + \overline{a_3 a_2 a_1} = 12414 \Rightarrow a_5 \leq 1$$

Если $a_5 = 1 \Rightarrow 2a_4 \cdot 10^3 + 3 \overline{a_3 a_2 a_1} = 12414 \Rightarrow a_4 \leq 1$. Если $a_4 = 1$,

$$\overline{a_3 a_2 a_1} = \frac{414}{3} = 138. \text{ Если } a_4 = 0 \Rightarrow \overline{a_3 a_2 a_1} = \frac{12414}{3} - \text{ нецелое,}$$

противоречие. Если же $a_5 = 0$, $2 \cdot a_4 \cdot 10^3 + 3 \overline{a_3 a_2 a_1} = 12414 : 3$

$$\Rightarrow a_4 : 3 \Rightarrow a_4 = 0; 3; 6 \quad (a_4 \leq 6) \quad a_4 = 0 \Rightarrow 3 \overline{a_3 a_2 a_1} \stackrel{12414}{<} 3000,$$

$$a_4 = 3 \Rightarrow 3 \overline{a_3 a_2 a_1} = 6414 \quad (\text{противоречие}), \quad a_4 = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{a_3 a_2 a_1} = 138. \text{ Итого } \overline{a_7 a_6 a_5 a_4 a_3 a_2 a_1} = 0614138,$$

$\overline{a_7 a_6} 06138$. Для a_7 есть 9 вариантов, для $a_6 - 10$.

Итого, $2 \cdot 9 \cdot 10 = 180$.

Если эта степень 6, то сумма $\overline{a_6 a_5 a_4 a_3 a_2 a_1} +$

$$+ \overline{a_5 a_4 a_3 a_2 a_1} + \overline{a_4 a_3 a_2 a_1} = 12414 \Rightarrow a_6 = 0 \Rightarrow$$

$$2 \cdot a_5 \cdot 10^4 + 3 \overline{a_4 a_3 a_2 a_1} = 12414 : 3 \Rightarrow a_5 : 3, \text{ но } a_5 \leq 0$$

$$(\text{дальность изминя}) \Rightarrow 3 \overline{a_4 a_3 a_2 a_1} = 12414 \Rightarrow \overline{a_4 a_3 a_2 a_1} =$$

$$= 4138. \text{ Итого, } \overline{a_7 a_6} 004138. \text{ Для } a_7 \text{ 9 вариантов.}$$

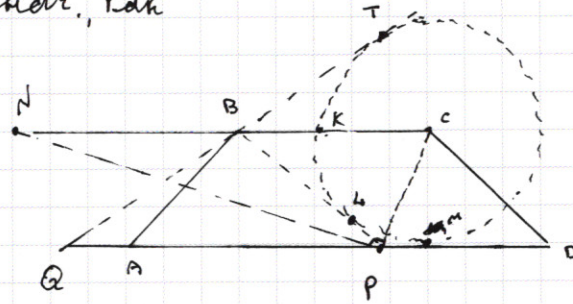
7 степень уже слишком большая, т.к. $a_7 a_6 \geq 1$.

Ответ: 189 вариантов.

(Все варианты разные)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4) Введём обознач., как
на рисунке.



Поскольку $\sin \angle NCP =$

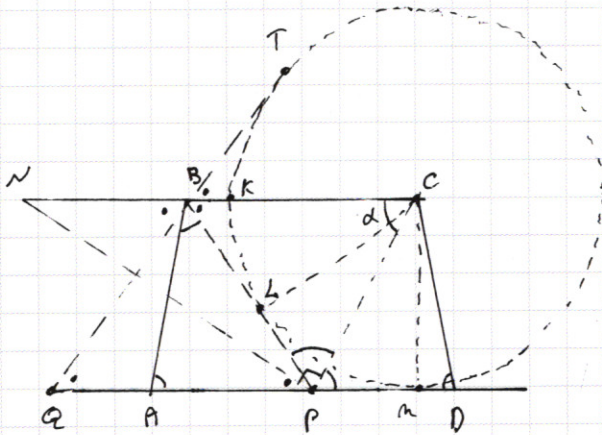
$$= \frac{8}{15}, \text{ то } NP = 8x$$

$$CP = 15x. \text{ По Т.}$$

Пифагора

$$x \sqrt{8^2 + 15^2} = 17x =$$

$$NC = 17 \Rightarrow x = 1$$



Высота трапеции
равна $CK = CM = R \Rightarrow$

$$CP \cdot \sin \angle NCP = R =$$

$$= 15 \cdot \frac{8}{17}$$

$$BK = BC = BT^2 = BL^2$$

$$PL = PM = \sqrt{CP^2 - R^2} =$$

$$= \sqrt{225 - \frac{64}{289}} \cdot 15 = \frac{15}{17} (CP \cdot \cos \angle CPK$$

$$\angle CPM = \angle PCN)$$

$$CP = 15 = (BP + BC) \cos \alpha = 2BC \cdot \cos \alpha =$$

$$\frac{30}{17} \cdot BC$$

$$BC = \frac{17}{2} = AP, \text{ т.е. } ABCP - \text{параллелограмм} \Rightarrow AB = CP = CD \Rightarrow$$

$$\sin \angle ADC = \frac{15 \cdot \frac{8}{17}}{15} = \frac{8}{17} = \sin \alpha \text{ (или прямо из параллелогр.)}$$

Из симметрии отн. высоты из B $BQ = BP = \frac{17}{2} = NB = BC,$

т.е. $\angle NQC =$ прямоугольный ($\angle NQC = 90^\circ$, хотя

можно из той же симметрии), $\angle QNC = \alpha \Rightarrow NQ \parallel CD \Rightarrow$

$NQDQ$ - параллелограмм. $S = 17 \cdot 15 \cdot \frac{8}{17} = 120$

4) Дан. Объем: $\angle AOC = \angle NOP = \arctg \frac{8}{15}$, $\angle NOC = 90^\circ$,
 $S_{NOA} = 120$

~~##~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5) Второе уравнение можно переписать
как $2 \cos(x+2y - \frac{\pi}{6}) = 8 \cos(x + \frac{\pi}{6}) = 8 \sin(\frac{\pi}{3} - x)$

$$\begin{cases} \sqrt{3} \cos(x+y) = 5 \cos(x + \frac{\pi}{6}) \\ \cos(x+2y - \frac{\pi}{6}) = 4 \cos(x + \frac{\pi}{6}) \end{cases}$$

$$\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(x+y)}{\sin x \sin y}$$

$$\cos(x+2y - \frac{\pi}{6}) = \cos(x+y) \cos(y - \frac{\pi}{6}) - \sin(x+y) \sin(y - \frac{\pi}{6})$$

можно получить

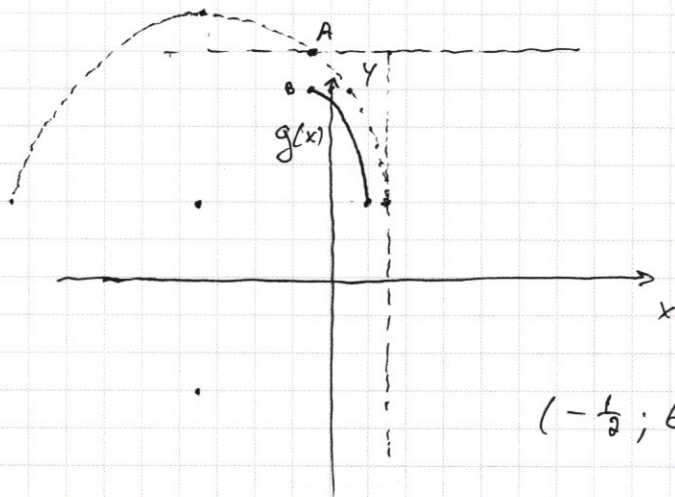
$$\frac{5}{4} = \frac{\sqrt{3} \cos(x+y)}{\cos(x+y) \cos(y - \frac{\pi}{6}) - \sin(x+y) \sin(y - \frac{\pi}{6})}$$

6) Исходное неравенство

$$g(x) = 6 + \frac{4}{2x-3} \leq ax+b \leq 2\sqrt{-(x+\frac{7}{2})^2 + \frac{100}{4}} = 2\sqrt{-(x+\frac{7}{2})^2 + 25}$$

$f(x) = y$

Заметим, что на всем промежутке из условия левая и правая части убывают, а $ax+b$ — в зависимости от знака a . Если $a \geq 0$



$$f: (y-2)^2 + (x+\frac{7}{2})^2 = 5^2$$

часть окружн.
при $y \geq 2$

Осталось заметить, что прямая, проходящая через

$(-\frac{1}{2}; 6)$ и $(\frac{3}{2}; 2)$ касается $g(x)$:

$$-2(x+\frac{1}{2})+b = 6 + \frac{4}{2x-3} \Rightarrow (x+\frac{1}{2})(2x-3) = -2 \Rightarrow$$

$$2x^2 - 2x - \frac{3}{2} = -2 \Rightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow (x - \frac{1}{2})^2 = 0.$$

Значит, если $ax+b$ будет пересекать отрезок AB

($A(-\frac{1}{2}; 6)$ и $B(\frac{3}{2}; 5)$) не в т. А, то она пересечёт окружность на отрезке $[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}]$. И если ~~както~~ $a < -2$, то

пересечёт $g(x)$, а если $a > -2$, то окружность. \Rightarrow

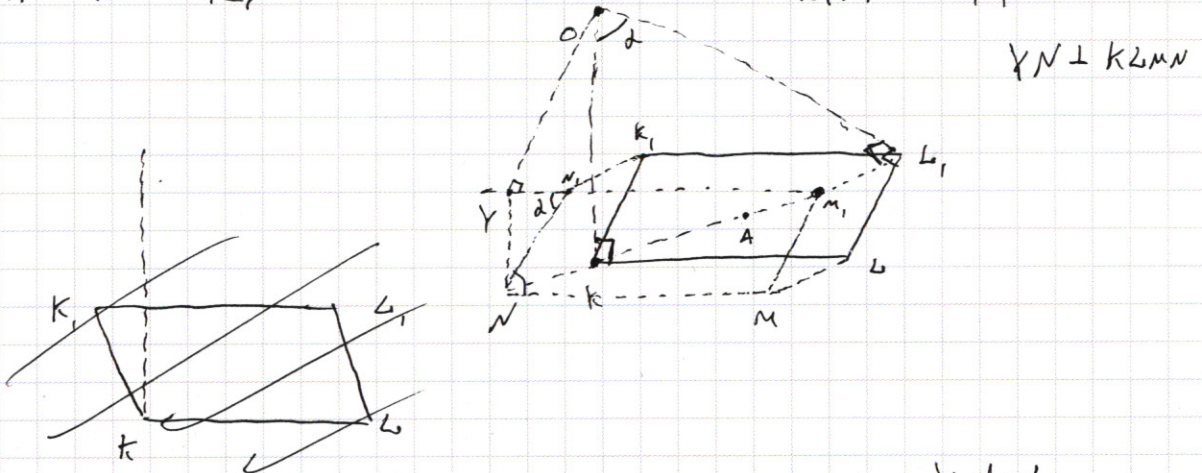
$$a = -2 \text{ и } b: -2 \cdot \frac{1}{2} + b = 5$$

Ответ: ~~2~~ $a = -2, b = 5$

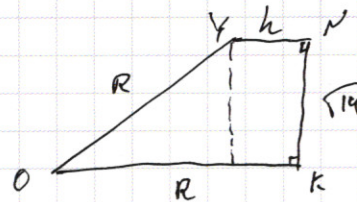
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4) Поскольку сфера S касается плоскости в
т.к и X ($\triangle M M_1$), то её центр лежит на
($K L M$)
прямых, $\perp (K L M)$ и $\perp (\triangle M M_1)$ через K и X (т.е. это
их пересечение). Но, т.к. $K L M M_1$ и $\triangle L_1 M_1 M$ -
прямоугольники, $X = L_1$. Из свойств сек. и касат.

$$M_1 A \cdot M_1 K = M_1 L_1^2 \Rightarrow M_1 L_1 = \sqrt{14} = L M = K N = K_1 N_1 = M_1 Y$$



Плоскость $O Y N K$:



$$R^2 = (R + (R - h))^2 \Rightarrow$$

$$h^2 - 2hR + 14 = 0 \quad h < R$$

$$L = \frac{2R \pm \sqrt{4R^2 - 56}}{2} = R \pm \sqrt{R^2 - 14}$$

Плоскость $O K L L_1$: $K L = L L_1$. Как касательные \Rightarrow
 $K K_1 L_1 L_1$ - ромб.
 $\sqrt{14} = M_1 Y = N N_1 \cdot \cos \alpha + M_1 N_1 =$

$$M_1 N_1 = L_1 K = 2x \cos \frac{\alpha}{2} = 2R \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$= x(1 + \cos \alpha)$$

$$x = R \cdot \frac{1 + \cos \alpha}{2} \quad h = x \sin \alpha$$

$$\frac{x^2}{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = x^2 \sin^2 \alpha$$

$$x^2 \sin^2 \alpha - 2x \sin \alpha \cdot x \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + 14 = 0$$

Объемы систем $180 - \alpha$ и $V = \frac{1}{3} h \cdot S_{\text{осн}}$
||
 $h = \sqrt{14} x$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

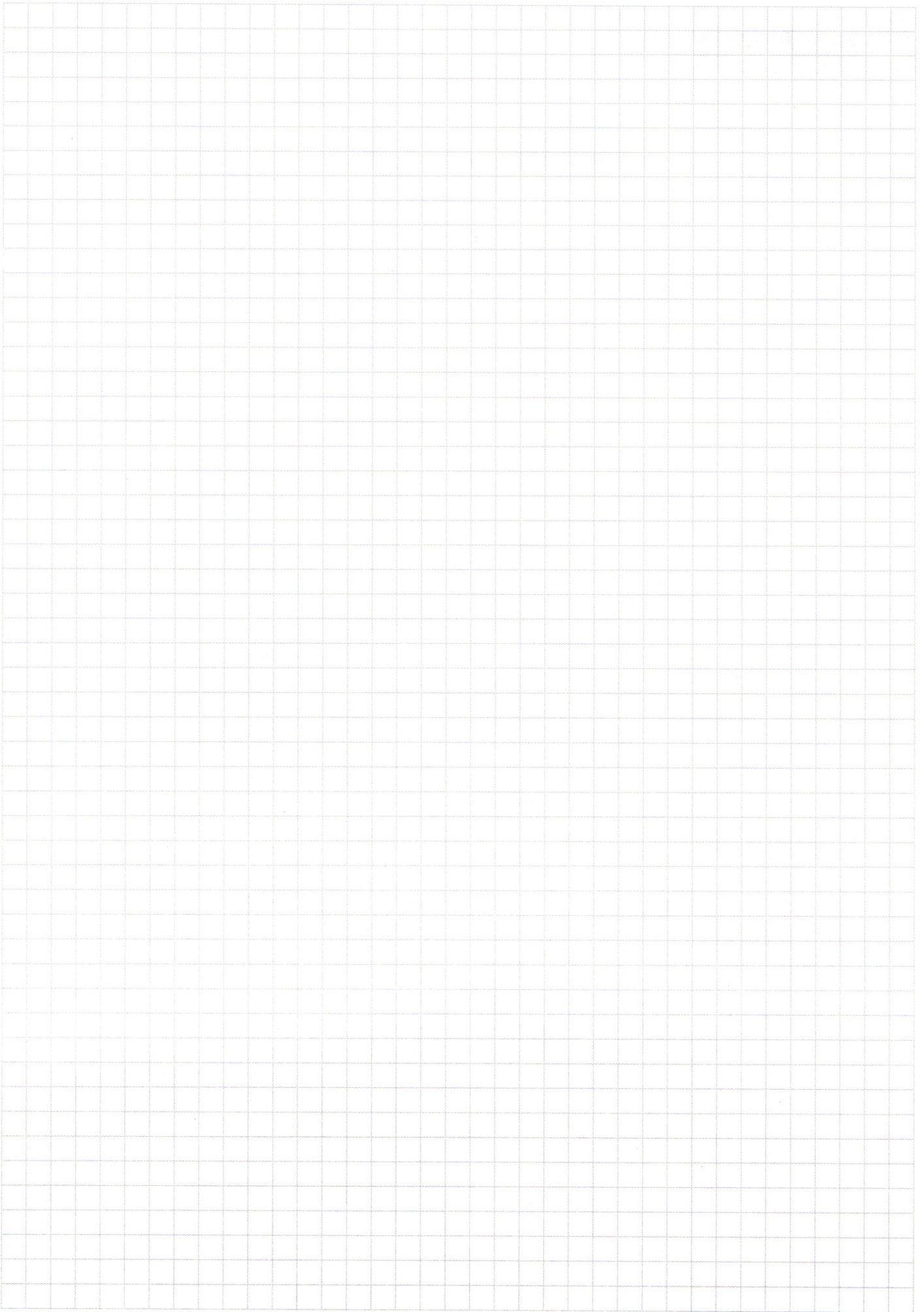
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

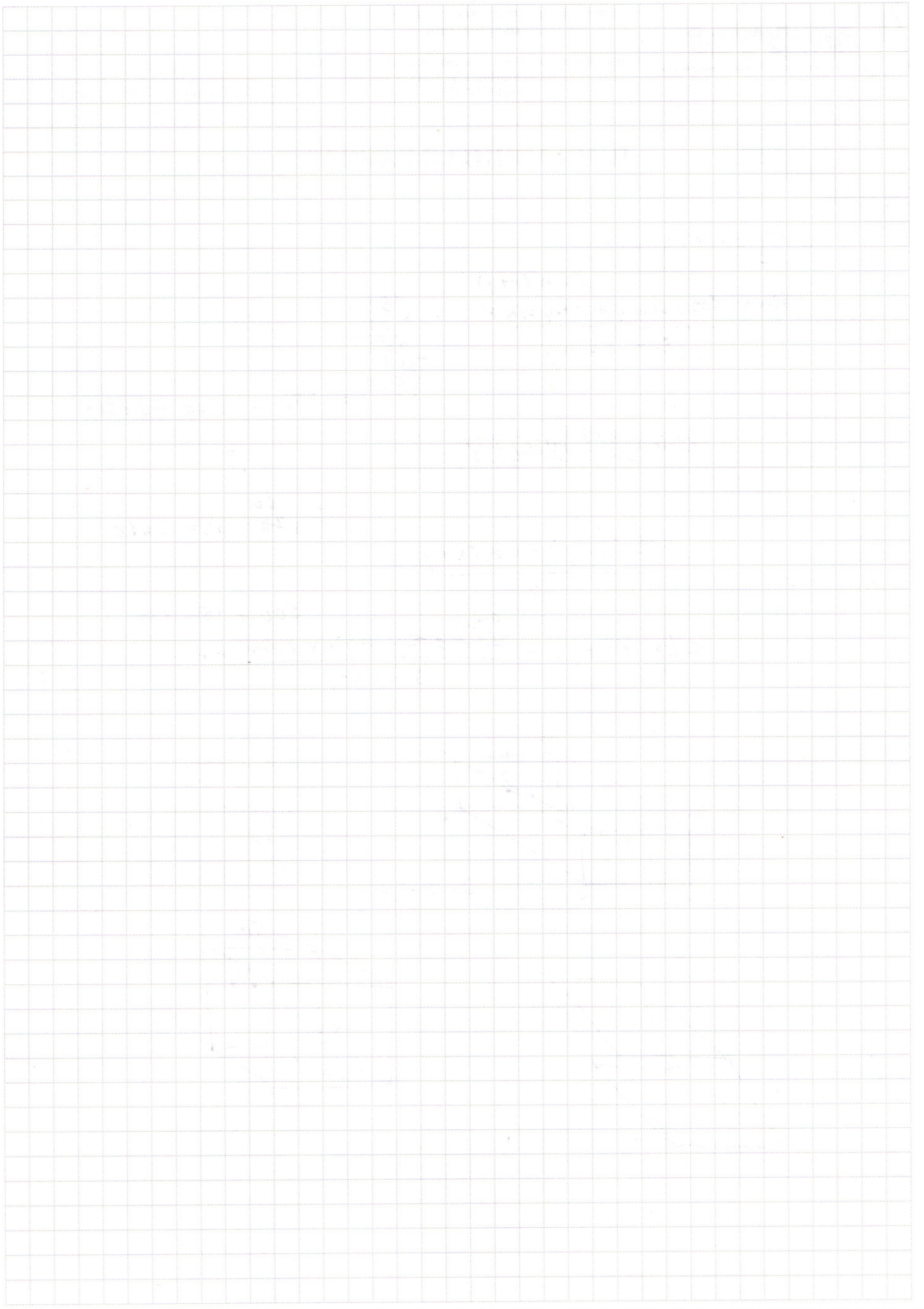
черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned} a \operatorname{tg} x + a \operatorname{tg} y &= \\ &= \frac{\sin x \cos x \sin y + \cos x \sin y \sin x}{\sin x \sin y} = \sin(x+y) \end{aligned}$$

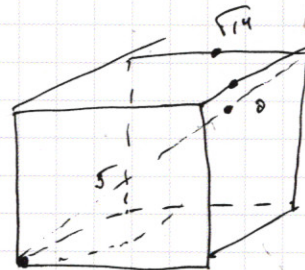
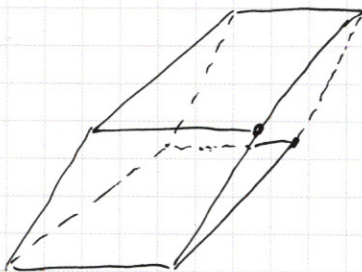
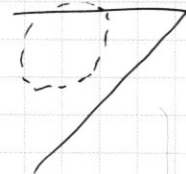
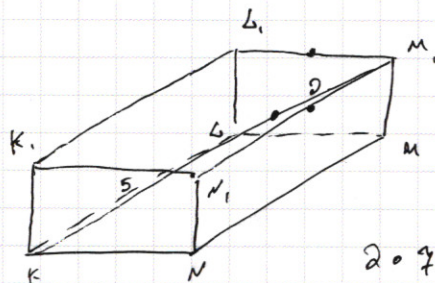
$$\begin{array}{r} 5 \\ \times 108 \\ \hline 27 \\ + 756 \\ \hline 2916 \end{array} + 256 = 3100 + 16 + 56 =$$

$$\frac{2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}{2}$$

$$\frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}$$

$$31 \overline{2}^6 - 5 \overline{2}^2 = 2660$$

$$a \operatorname{tg}(x+y) = \frac{\sin x \cos y + \sin y \cos x}{\sin(x+y)}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$1) \begin{cases} x - \sqrt[3]{64y^2 - x^2} = 124 & (1) \\ 8y - \sqrt[3]{64y^2 - x^2} = -92 & (2) \end{cases} \quad \text{Вычтем из (1) (2):}$$

$$x - 8y = 124 + 92 = 216 \quad (3)$$

Сложим (1) и (2): $-2 \sqrt[3]{(8y-x)(8y+x)} = 32 \Rightarrow$

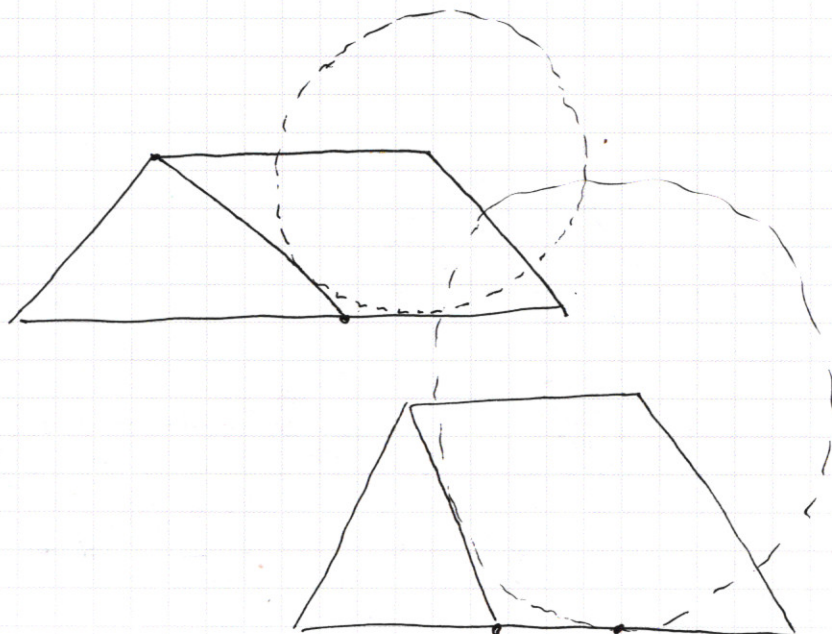
$$(8y-x)(8y+x) = (-2^4)^3 \stackrel{(3)}{\Rightarrow} -6^3 \cdot (8y+x) = -2^{12} \Rightarrow$$

$$8y+x = \frac{2^9}{3^3} = \frac{512}{27} \quad (4)$$

Сложим (3) и (4): $2x = 216 + \frac{512}{27} \Rightarrow x = 108 + \frac{256}{27} =$

$$= \frac{3172}{27}. \quad \text{Из (4)} \quad y = \frac{512 - 3172}{8 \cdot 27} = \frac{-2660}{8 \cdot 27} = -\frac{665}{54}$$

Ответ: $\left(\frac{3172}{27}; -\frac{665}{54} \right)$



$$\overbrace{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7}^{10^7}$$

$$3(a_{n+3} + \dots a_7) +$$

$$10^4 \cdot a_3 + 10^3 \cdot a_4 \cdot 2 + 3 \overline{a_5 a_6 a_7} = 12414$$

$$a_3 = 1 \quad 2a_4 = 2 \quad \overline{a_5 a_6 a_7} = \frac{414}{3} = 138$$

$$10^5 a_2 + 2 \cdot 10^4 a_3 + 3 \overline{a_4 a_5 a_6 a_7} = 12414$$

$$\overline{a_4 a_5 a_6 a_7} = \frac{12414}{3} = 4138 \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

$$10^6 a_1 + 2 \cdot 10^5 a_2 + 3 \overline{a_3 \dots a_7}$$

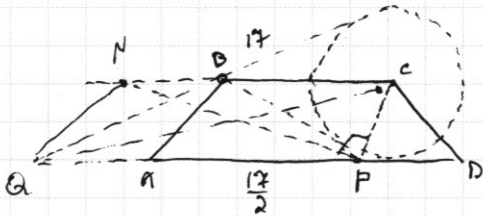
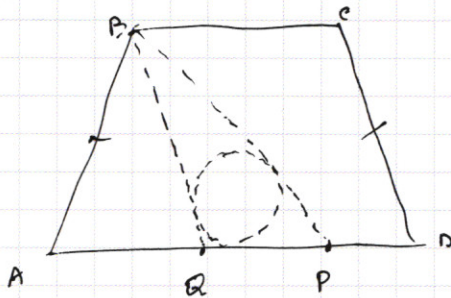
$$-2\left(x + \frac{1}{2}\right) + 6 = 6 + \frac{7^2}{2x-3}$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)(2x-3) = -2$$

$$2x^2 - 2x - \frac{3}{2} = -2$$

$$2x^2 - 2x + \frac{1}{2} = 0$$

$$x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$$



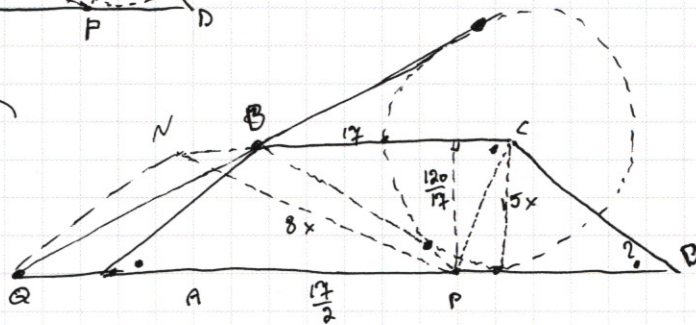
$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{tg^2 \alpha}{1 + tg^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{64}{225 + 64}}$$

$$\sqrt{64 + 225} = 17$$

$$x = 1$$

$$\sqrt{17^2 - \frac{1200}{17}}$$

$$\frac{15}{17} \cdot 5$$



$$tg^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$1 + \frac{1}{tg^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$