МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6}, \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2 - 26x\right|^{\log_5 12} + 26x \geqslant x^2 + 13^{\log_5\left(26x - x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 12$, $BD = 13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $4 \leqslant x \leqslant 28$, $4 \leqslant y \leqslant 28$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8 - 6x}{3x - 2} \geqslant ax + b \geqslant 18x^2 - 51x + 28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3}; 2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY = \sqrt{3}$, $TX = \sqrt{2}$, $TZ = 2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

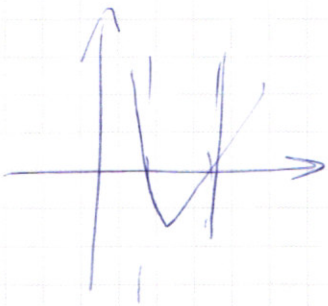
$$\frac{ax(3x-2)+b(3x-2)+6x-8}{3x-2} \le 0.$$

$3x-2>0$ т.к. усл-не… $\Rightarrow$

$$3ax^2-2ax+3bx-2b+6x-8 \le 0.$$

$$3a\cdot x^2+x(6+3b-2a)-2b-8 \le 0.$$

I. $a>0.$



$$\begin{cases} f(\frac{3}{2}) \le 0 \\ f(2) \le 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12a+12+6b-4a-2b-8 \le 0. \\ \frac{3a\cdot 9}{4}+4+\frac{9b}{2}-3a-2b-8 \le 0 \quad |\cdot 4. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8a+4b+4 \le 0. \\ 27a+16+18b-12a-8b-32 \le 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{4a}\ 2a+b+1 \le 0. \\ 15a+10b-16 \le 0. \end{cases}$$

II. $a \cancel{>} < 0.$

~~$D=36+9b^2+4a^2+36b\cdot 24a-12ab-12a(-2b-8)=$~~

$(6+3b-2a)^2-12a(-2b-8)<0.$

$(6+3b-2a)^2+24ab+96a<0.$

$$\begin{array}{r} 144 \\ +\ 87 \\ \hline 231 \end{array}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

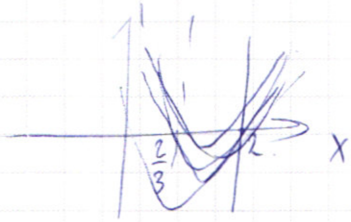
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b.$

$ax+b \geq 18x^2-16x+28.$ (*)

(*) $18x^2-15x-ax+28-b \leq 0$ на $x \in [\frac{2}{3}; 2]$

$18x^2+x(-15-a)+28-b \leq 0.$



$f(2) \leq 0.$

$f(\frac{2}{3}) \leq 0.$

$$\begin{cases} 72-30-2a+28-b \leq 0. \\ 18\cdot\frac{4}{9}+\frac{2}{3}(-15-a)+28-b \leq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{70}.\ 70-2a-b \leq 0. \\ 8-10-\frac{2}{3}a+28-b \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 70 \leq 2a+b. \\ 26 \leq \frac{2}{3}a+b. \end{cases}$$

~~$24+b \geq 70.$~~
~~$b \geq 10.$~~

$\frac{4}{3}a \geq 44.$

$a \geq \cancel{44\cdot\frac{3}{4} \geq 33 \Rightarrow b \geq 4}$ ~~$a \geq 33 \Rightarrow b \geq 4.$~~

$\cancel{\frac{8-6x}{3x-2}}$ $ax+b-\frac{8-6x}{3x-2} \leq 0.$

$ax+b+\frac{6x-8}{3x-2} \leq 0.$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\qquad$ $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\cancel{\sin}\ \cos(2\alpha+2\beta) = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 4\beta \overset{+\sin 2\alpha}{=} -\frac{2}{17} \end{cases}$$

$\begin{array}{r} 96 \\ -24 \\ \hline 72 \end{array}$

$\cancel{1-2\sin^2 2\beta}\ 2\cos^2 2\beta - 1.$

$$\begin{cases} \\ \sin 2\alpha(1+\cos 4\beta) + \cos 2\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin 2\alpha\cdot 2\cdot\cos^2 2\beta + 2\sin 2\beta\cdot\cos 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{2}{17} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ 2\cdot\cos 2\beta(\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta) = -\frac{2}{17} \end{cases}$$

$2\cdot\cos 2\beta\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{2}{17}$ $\qquad$ $4a\sqrt{3} = 2a$

$\frac{-2\cdot\cos 2\beta\cdot\sqrt{17}}{17} = -\frac{2}{17}$ $\quad \Big| \cdot\left(-\frac{17}{2}\right)$ $\qquad$ $-3.$ $\quad$ $b = -4\sqrt{3}$

$\cos 2\beta\cdot\sqrt{17} = 1.$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}.$

I. $\sin 2\beta = +\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{\sqrt{17}}{17} + \cos 2\alpha\cdot\frac{4\sqrt{17}}{17} = -\frac{\sqrt{17}}{17}$

$\sin 2\alpha\cdot\sqrt{17} + \cos 2\alpha\cdot 4\sqrt{17} + \sqrt{17} = 0.$

$\sin 2\alpha + \cos 2\alpha\cdot 4 + 1 = 0.$

$\cancel{\sin 2\alpha + 4 + 1}$

$9+7+3+2+1+\cancel{2}\ 1.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$ $!\ y \geq 6x.$

$$\begin{cases} y^2-12xy+36x^2-xy+6x+y-6=0. \\ (3x-3)^2+(y-6)^2-9-36=45 \end{cases}$$

$(y-6x)^2=xy-6x-y+6.$ $y^2-12xy+36x^2-xy+6x+y-6=0.$

$(y-6x)^2=$ $y^2-13xy+y+$

$y^2-13xy+36x^2+6x+y-6=0.$

$y^2+y(1-13x)+36x^2+6x-6=0.$

$D=1-26x+169x^2-4(36x^2+6x-6)=$

$=1-26x+169x^2-144x^2-24x+24=$

$=25x^2-50x+25=25(x^2-2x+1)=(5(x-1))^2.$

$$y=\frac{13x-1\pm|5(x-1)|}{2}$$

$18+48=66$ $+54.$

$24+45=69$

$y_1=\frac{13x-1+5x-5}{2}=9x-3$

$y_2=\frac{13x-1-5x+5}{2}=4x+2$

I.

I $9x^2+(9x-3)^2-18x-12(\cancel{4x+2}\ 9x-3)=45.$

$9x^2+81x^2-54x+9-18x-48x-24-45=0.$

$90x^2-120x-60=0.$

$3x^2-4x-2=0.$

$D=16+2\cdot3\cdot4=40.$

$x=\frac{4\pm2\sqrt{10}}{6}=\frac{2\pm\sqrt{10}}{3}$

$9x-3\geq6x.$

$3x\geq3$

$!\ x\geq1.$

подходит только $x=\frac{2+\sqrt{10}}{3}.$

$y=9\left(\frac{2+\sqrt{10}}{3}\right)-3=\cancel{6+3}\ 3+3\sqrt{10}.$

4

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(4\cdot\frac{1}{4})$

$f(\frac{1}{4}\cdot 4)= f(\frac{1}{4})+f(4).$

$0=f(\frac{1}{4})+f(4).$

$4\cdot\frac{1}{4}$

$f(\frac{1}{x})=f(\frac{1}{4})+4).$

$f(1)-f(x)=f(\frac{1}{x}).$

$f(x\cdot\frac{1}{x})=f(x)+f(\frac{1}{x}).$

$f(\frac{1}{x})=0-f(x).$

$f(\frac{1}{4})=-f(4)=0.$

$f(\frac{1}{5})=-1$

$f(\frac{1}{6})=0$

$f(\frac{1}{3})=-1$

$f(\frac{1}{8})=0$

$f(\frac{1}{9})=0$

$f(\frac{1}{10})=-1$

$f(\frac{1}{11})=-2$

$f(\frac{1}{12})=0$

$f(\frac{1}{13})=-3$

$f(\frac{1}{14})=0$

$f(\frac{1}{15})=-1$

$f(\frac{1}{16})=0$

$f(\frac{1}{17})=-4$

$f(\frac{1}{18})=0$

$f(\frac{1}{19})=-4.$

$f(\frac{1}{20})=-1.$

$f(\frac{1}{21})=-1$

$f(\frac{1}{22})=-2$

$f(\frac{1}{23})=-5$

$f(\frac{1}{24})=0.$

$f(\frac{1}{25})=-2$

$f(\frac{1}{26})=-3$

$f(\frac{1}{27})=0$

$f(\frac{1}{28})=-1.$

f(~~сост. числа~~, ~~которое~~ ~~делители~~, ~~которого~~ 2 и 3) = 0.

~~$f(4)=f(2)+f(2)$~~

$f(4)=0.$

$f(6)=0.$

$f(8)=0$

$f(9)=0.$

$f(10)=f(2)+f(5)=1.$

$f(12)=0.$

$f(14)=1$

$f(15)=1.$

$f(16)=0$

$f(18)=0.$

$f(20)=1.$

$f(21)=1.$

$f(22)=f(2)+f(11)=2.$

$f(24)=0.$

$f(25)=2.$

$f(26)=3$

$f(27)=0.$

$f(28)=1.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

если значение $f(x)=0$, т.е. при $x = \underbrace{4,6,8,9,12,16,18,24,27}_{9}$,

то $f(\frac{1}{4}) < 0$.

$f(\frac{1}{4}) < 0$ при $y = \overbrace{5,7,10,11,13,15,17,19,20,21,22,23,25,26,28}^{15}$.

Всего: Кол-во зн. x · Кол-во зн. y =

$= 9 \cdot 15 = 135$.

II $f(x)=1$. $\Rightarrow f(\frac{1}{4}) < -1$:

$x = \underbrace{5,7,10,14,15,20,21,28}_{8 \text{ значений}}$ $y = \underbrace{11,13,17,19,22,23,25,26}_{8 \text{ зн.}}$

Итого: ~~2~~ 64

III $f(x)=2 \Rightarrow f(\frac{1}{4}) < -2$:

$x = \underbrace{22,25,11}_{3 \text{ зн.}}$ $y = \underbrace{~~11~~,13,17,19,23,26}_{5 \text{ зн.}}$

Итого: 15

IV $f(x)=3 \Rightarrow f(\frac{1}{4}) < -3$

$x = \underbrace{13,26}_{2 \text{ зн.}}$ $17,19,23$

$\times \frac{16}{9}{144}$

Итого: 6

V $f(x)=4$ $\Rightarrow f(\frac{1}{4}) < -4$

$x = \underbrace{17,19}_{2 \text{ зн}}$ $y = 23$ Итого: 2

VI $f(x)=5$.

$x = \underbrace{23}_{1 \text{ зн.}}$ $\varnothing$.

Всего: $135 + 64 + 15 + 2 = 222$ 222

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

II $\sin 2\beta = -\frac{4}{\sqrt{17}}$.

$\sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} - \frac{4}{\sqrt{17}} \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$.

$\sin 2\alpha - 4\cos 2\alpha = -1$.

$2\sin\alpha \cdot \cos\alpha - 4(1 - 2\sin^2\alpha) + 1$.

$8\sin^2\alpha + 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha - 3 = 0$.

$5\sin^2\alpha + 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha - 3\cos^2 = 0$

$5tg^2\alpha + 2tg\,\alpha - 3 = 0$.

$D = 4 + 3\cdot 4\cdot 5 = 64$

$tg\,\alpha = \frac{-2 \pm 8}{10} = -1; \frac{3}{5}$.

Ответ: $-1; \frac{3}{5}; \frac{5}{3}$

$+\begin{array}{r}208\\16\\\hline 224\end{array}$

$+\begin{array}{r}144\\64\\\hline 208\end{array}$

$f(p) = [p/4]$

$p = 2$:

$f(2) = [\frac{1}{2}] = 0$.

$f(3) = 0$.

$f(5) = 1$

$f(7) = 1$.

$f(11) = 2$

$f(13) = 3$.

$f(17) = 4$

$f(19) = 4$.

$f(23) = 5$.

$f(x \cdot \frac{1}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) < 0$

$f(4) = 0$., т.к. $f(4) \cdot f(1\cdot 1) = 0 + 0 = 0$.

$f(\frac{1}{4}) \leqslant 0$

~~$f(-1\cdot 2) = f(-1) + f(1)$~~

~~$f(-1) + f(1) = 0$~~

$f(1\cdot 2) = f(1) + f(2)$.

$f(1) = 0$.

$f(\frac{x}{y})$

$\frac{x}{y} \in [\frac{1}{7}; 7]$

$f(\frac{1}{6}\cdot 6) = f(\frac{1}{6}) + 0$

$f(\frac{1}{7}\cdot 7) = f(\frac{1}{7}) + f(7)$

$f(1) = f(\frac{1}{7}) + 1$.

$f(\frac{1}{7}) = -1$.

$f(4\cdot\frac{1}{28}) = f(4) + f(\frac{1}{28}) = -1$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos\alpha = \frac{AE}{65}$ $\qquad \frac{5}{\sqrt{26}} = \frac{AE}{65}$

$\frac{5}{\sqrt{26}} = \frac{AE}{65}$ $\qquad \cancel{AE \cdot \sqrt{26} = 13}$ $\qquad AE = \frac{5\cdot 65}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{13}} = \frac{25\cdot\sqrt{13}}{\sqrt{2}}$

$\cancel{AE\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{13} = \sqrt{13}\cdot\sqrt{13}}$

$\cancel{AE = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}} = AF\ (D\text{-}nid)}$

$\cancel{S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2}\cdot AE\cdot AF\cdot \sin(180^\circ - 2\alpha) =}$ $\sin 2\alpha$

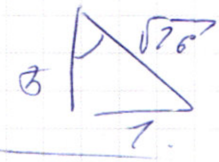
$\cancel{= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}}\cdot 2\cdot\frac{1}{\sqrt{26}}\cdot\frac{5}{\sqrt{26}} =}$

$\cancel{= \frac{13}{2}\cdot\frac{5}{26\cdot 2} = \frac{5}{4}}$

$$\begin{array}{r} 125 \\ \times\ 13 \\ \hline 375 \\ 125 \\ \hline 1625 \end{array}$$

$S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2}\cdot AE^2\cdot\sin 2\alpha = \frac{1}{2}\cdot\frac{25^2\cdot 13}{2}\cdot 2\cdot\frac{1}{\sqrt{26}}\cdot\frac{5}{\sqrt{26}} =$

$= \frac{25^2\cdot 13}{2}\cdot\frac{5}{26\cdot 2} = \frac{625\cdot 5}{4} = \frac{3125}{4}$



$\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} + \cos 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha + 4(2\cos^2\alpha - 1) + 1 = 0.$

$8\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha - 3 = 0.$

$5\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha - 3\sin^2\alpha = 0.$

$3\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cdot\cos - 5\cos^2\alpha = 0 \quad |:\cos^2\alpha \neq 0.$

$3tg^2\alpha - 2tg\alpha - 5 = 0.$

$D = 4 + 4\cdot 3\cdot 5 = 64.$

$tg\,\alpha = \frac{2\pm 8}{6} = -1;\ \frac{5}{3}.$

$\cancel{\sin 2\alpha + 4} - 8\sin^2\alpha + 1 = 0.$

$\cancel{8\sin^2\alpha}$

$-8\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cdot\cos + 5.$

$-3\sin^2\alpha \qquad +5\cos^2$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

II. $y = 4x+2 \geq 6x$

$x \leq 1.$

$9x^2 + 16x^2 + 16x + 4 - 18x - 12(4x+2) - 45 = 0$

$\cancel{9x^2+16} \; 25x^2 - 2x + 4 - 48x - 24 - 45 = 0.$

$25x^2 - 50x - 65 = 0.$

$5x^2 - 10x - 13 = 0.$

$D = 100 + 20\cdot 13 = 360 = (6\sqrt{10})^2.$

$x = \frac{10 \pm 6\sqrt{10}}{2\cdot 5} = 1 \pm \frac{3\sqrt{10}}{5}$

подходит только $1 - \frac{3\sqrt{10}}{5}.$

$y = 4\left(1 - \frac{3\sqrt{10}}{5}\right) + 2 = 6 - \frac{12\sqrt{10}}{5}$

$26x - x^2 > 0$

$x^2 - 26x < 0$

$x(x-26) < 0$

$0 < x < 26$

$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}.$

$4^{\log_2 8} = 4^3 = 64.$

$8^{\log_2 4} = 8^2 = 64.$

$x^2 - 26x = t.$

$|t|^{\log_5 12} \geq t + 13^{\log_5(-t)}.$

$\log_5(-t)$ сущ-ет при $-t > 0$, т.е. $t < 0$

$\Rightarrow |t|$ раскрывается как $(-t)^{\log_5 12}.$

$(-t)^{\log_5 12} \geq t + 13^{\log_5(-t)}.$

$(\cancel{-t)^{\log_5 12}} \geq t + 13^{\log_5(-t)}.$

$12^{\log_5(-t)} \geq t + 13^{\log_5(-t)}.$

$-1^{\log_5(-t)} \geq t$ $\quad t^{\log_5 13} - t^{\log_5 12}.$

$+72$
90
$+100$

$\cancel{t^{-\log_5(-t)}}$

$9x^2 + 81x^2 - 72x + 9 - 18x - 12\cdot 9x + 12\cdot 3 - 45$

$90x^2 - 198x = 0$

$10x^2 - 22x = 0.$ $\quad x = 0.$

$5x^2 - 11x = 0.$ $\quad x = \frac{11}{5}.$

$26x - x^2 = t$.

$|-t|^{\log_5 12} \cancel{\ldots} \geq -t + 13^{\log_5 t}$.

$t^{\log_5 12} \geq -t + 13^{\log_5 t}$.

$12^{\log_5 t} \cancel{\geq} \cancel{\geq} \geq -t + 13^{\log_5 t}$.

$t \geq 1^{\log_5 t}$.

$t \geq t^{\log_5 1}$

$t \geq t^0$

$t \geq 1$.

$26 - x^2 \geq 1$.

$x^2 - 26x + 1 \geq 0$.

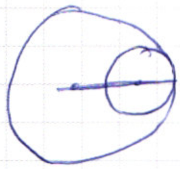
$672 \,|\, 16$, -64, 42.

$4 \cdot 8$

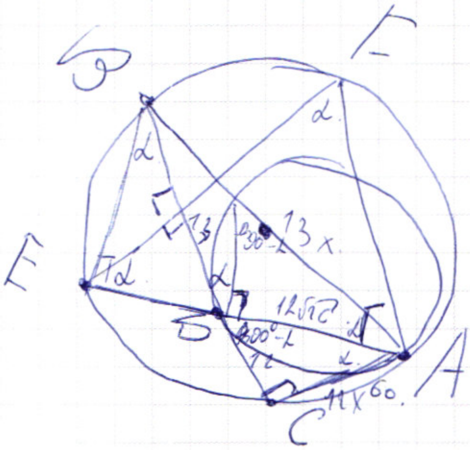
$\times\, 26 \cdot 26$: 156, 52, 676, -4, 671.

$672 \,|\, 8$, -64, 32, $84 \,|\, 4$, 21.

$\times\, 12 \cdot 13$: 36, 12; $\times\, 13 \cdot 12$: 26, 13



60.



$144x^2 + 25^2 = 169x^2$

$25^2 = 25 \cdot x^2$

$25 = x^2$

$x = 5$.

25 60 65.

$AB = 13x = 65$

$\Rightarrow \cancel{R}\ r_{больш.} = \frac{65}{2}$.

$\cancel{36}\ 12 \cdot 25 + 12^2 = 12 \cdot 37$.

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{5}$.

$AD = \sqrt{12x \cdot 13x - 12 \cdot 13} = \sqrt{12 \cdot 13(x^2 - 1)} = \sqrt{26 \cdot 24} = \sqrt{2 \cdot 13 \cdot 2^3 \cdot 3} = 4\sqrt{39}$.

$\sqrt{12 \cdot 13 \cdot 24} = 12\sqrt{26}$.

$\cos\alpha = \cancel{60}\ \frac{5}{\sqrt{26}}$

$5x$, $\sqrt{26x}$, $\frac{5}{\sqrt{26}}$.

5, $\sqrt{26}$, 1; $\cancel{\cos}\ \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{26}}$

$\frac{1}{\sqrt{26}} = \frac{12}{l}$. $l = 12\sqrt{26}$. $\cos\alpha = \frac{12\sqrt{26}}{2r_{м.}} = \frac{5}{\sqrt{26}}$. $10r_{м.} = 26 \cdot 12$. $r_{м.} = \frac{13 \cdot 12}{5}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \quad (1) \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$$

(1). $y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}$

$$\begin{cases} y \geq 6x \\ (y-6x)^2 = xy-6x-y+6 \quad (*) \end{cases}$$

$(*)$ $y^2-12xy+36x^2-xy+6x+y-6=0$.

$y^2+y(-13x+1)+36x^2+6x-6=0$

Решим как квадратное, относительно y:

$D=(1-13x)^2-4(36x^2+6x-6)=169x^2-26x+1-144x^2-$
$-24x+24=25x^2-50x+25=25(x-1)^2=(5(x-1))^2$

$$y=\frac{-(1-13x)\pm|5(x-1)|}{2}$$

$y_1=\frac{13x-1+5x-5}{2}=9x-3$. y_1 существует только при $y_1 \geq 6x \Rightarrow 9x-3 \geq 6x \Rightarrow x \geq 1$.

$y_2=\frac{13x-1-5x+5}{2}=4x+2$. y_2 существует только при $y_2 \geq 6x \Rightarrow 4x+2 \geq 6x \Rightarrow x \leq 1$.

Вернёмся к исходной системе:

$$\left[\begin{array}{l} ①\begin{cases} y=9x-3 \\ x \geq 1 \\ 9x^2+y^2-18x-12y-45=0 \end{cases} \\ ②\begin{cases} y=4x+2 \\ x \leq 1 \\ 9x^2+y^2-18x-12y-45=0 \end{cases} \end{array}\right.$$

① Подставим $y=9x-3$ в 3-ее уравнение этой системы:

$9x^2+(9x-3)^2-18x-12(9x-3)-45=0$

$9x^2+81x^2-72x+9-18x-108x+36-45=0$

$90x^2-198x=0 \quad |:18$

$5x^2-11x=0.$

$x=0$ (не подходит, т.к. $x\geq 1$)

$x=\frac{11}{5}$ (подходит)

$x=\frac{11}{5} \Rightarrow y=9\cdot\frac{11}{5}-3=\frac{99-15}{5}=\frac{84}{5}$

Реш-ем системы ① явл-ся $\left(\frac{11}{5};\frac{84}{5}\right)$.

② Подставим $y=4x+2$ в 3-е уравнение этой системы:

$9x^2+(4x+2)^2-18x-12(4x+2)-45=0$

$25x^2+16x+4-18x-48x-24-45=0.$

$25x^2-50x-65=0.$

$5x^2-10x-13=0$

$D=100+4\cdot5\cdot13=20(5+13)=20\cdot18=9\cdot4\cdot10$

$x=\frac{10\pm6\sqrt{10}}{10}$

$x_1=1+\frac{3\sqrt{10}}{5}$ (не подходит, т.к. $x\leq 1$)

$x_2=1-\frac{3\sqrt{10}}{5}$ (подходит)

при $x=1-\frac{3\sqrt{10}}{5}$ $y=4-\frac{12\sqrt{10}}{5}+2=6-\frac{12\sqrt{10}}{5}$

Реш-ем ② является $\left(1-\frac{3\sqrt{10}}{5};6-\frac{12\sqrt{10}}{5}\right)$

Получаем два решения и записываем ответ.

Ответ: $\left(\frac{11}{5};\frac{84}{5}\right);\left(1-\frac{3\sqrt{10}}{5};6-\frac{12\sqrt{10}}{5}\right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

Запишем исходные рав-ва в систему:

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}. \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta + \sin 4\beta\cdot\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}. \\ \sin 2\alpha\cdot(2\cos^2 2\beta-1) + 2\cdot\sin 2\beta\cdot\cancel{\sin}\cos 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \cancel{2}\sin 2\alpha(2\cos^2 2\beta-1+1) + 2\cdot\sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{17} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}} \quad (1) \\ 2\cdot\cancel{\sin}\cos 2\beta(\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta) = -\frac{2}{17} \quad (2) \end{cases}$$

Подставим (1) в (2):

$$2\cdot\cos 2\beta\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{2}{17} \qquad |\cdot(-17)$$

$$\cancel{2}^{1}\cdot\cos 2\beta\cdot\sqrt{17} = \cancel{2}^{1}$$

$$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{1}{17}} = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}.$$

I. $\sin 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$:

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

Подставим найденные значение $\sin 2\beta$ и $\cos 2\beta$:

$\sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} + \frac{4}{\sqrt{17}} \cdot \cos 2\alpha + \frac{1}{\sqrt{17}} = 0 \quad | \cdot \sqrt{17}$

$\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha + 1 = 0$. $\cos 2\alpha = 2\cos^2 - 1$.

$2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha + 8\cos^2\alpha - 4 + 1 = 0$.

$8\cos^2\alpha + 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha - 3 = 0$. $3 = 3(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) \Rightarrow$

$\Rightarrow 5\cos^2\alpha + 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha - 3\sin^2\alpha = 0 \quad | : (-\cancel{8}\cos^2 x) \neq 0$

$3tg^2 x - 2tg\, x - 5 = 0$.

Решая как квадратное, получим, что $D = 64$

$\boxed{tg\, x = \frac{2 \pm 8}{6} = \frac{5}{3}; -1.}$

II. $\sin 2\beta = -\frac{4}{\sqrt{17}}$:

Аналогично I, только вместо $\sin 2\beta$ ставим $-\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} + \cos 2\alpha \cdot \left(-\frac{4}{\sqrt{17}}\right) + \frac{1}{\sqrt{17}} = 0 \quad | \cdot \sqrt{17}$

$2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha - 4(1 - 2\sin^2\alpha) + 1 = 0$

$8\sin^2\alpha + 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha - 3 = 0$.

$3 = 3\sin^2\alpha + 3\cos^2\alpha$, поэтому $5\sin^2\alpha + 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha - 3\cdot\cos^2\alpha = 0$

Однородное ур-ие $\Rightarrow$ поделим на $\cos^2\alpha \neq 0$:

$5tg^2\alpha + 2tg\,\alpha - 3 = 0$.

$D = 64 \Rightarrow tg\,\alpha = \frac{-2 \pm 8}{10} = \boxed{-1; \frac{3}{5}}$

Ответ: $-1; \frac{3}{5}; \frac{5}{3}$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

$|x^2-26x|^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + 13^{\log_5 (26x-x^2)}$

Пусть $26x - x^2 = t$.

$|-t|^{\log_5 12} \cancel{+26x} \geq x^2 - 26x + 13^{\log_5 t}$

$|-t|^{\log_5 12} \geq -t + 13^{\log_5 t}$.

Заметим, что в нер-ве существует $\log_5 t$ => => $t>0$. Поэтому $|-t| = t$.

$t^{\log_5 12} \geq -t + 13^{\log_5 t}$.

$t^{\log_5 12} = 12^{\log_5 t}$, поэтому:

$12^{\log_5 t} \geq -t + 13^{\log_5 t}$.

$t \geq 1^{\log_5 t}$.

$1^{\log_5 t} = t^{\log_5 1} = t^0 = 1$. (при $t>0$).

$t \geq 1$.

$26x - x^2 \geq 1$

$x^2 - 26x + 1 \leq 0$.

$D = 676 - 4 = 672$.

$x = \frac{26 \pm \sqrt{672}}{2} = 13 \pm \frac{\sqrt{672}}{2} = 13 \pm \frac{4\sqrt{42}}{2} = 13 \pm 2\sqrt{42}$

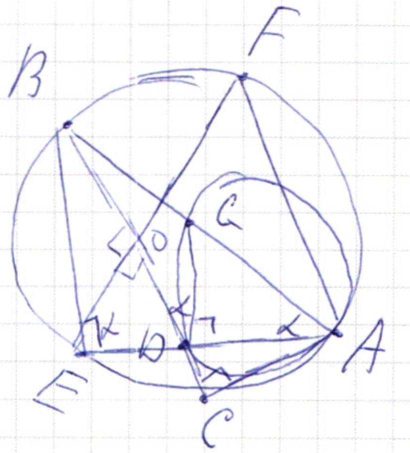
$+ \quad - \quad + \quad x$

$13-2\sqrt{42} \quad 13+2\sqrt{42}$

Ответ: $[13-2\sqrt{42}; 13+2\sqrt{42}]$.

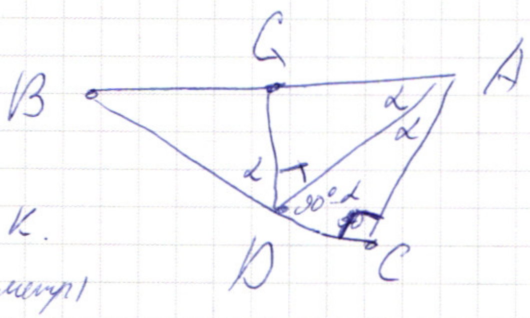
☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№4.



Т.к. окр-ти касаются внутренним образом и AB - диаметр, то ~~если~~ $AB \cap \omega = G$, где AG - - диаметр окр-ти ω.

Сделаем планиметрический чертёж $\triangle ABC$:



I. $\angle ACB = 90°$ (т.к. опирается на диаметр)

II. $\angle ADG = 90°$ (т.к. опирается на диаметр).

Пусть $\angle BAD = \alpha$. $\angle BAD = \frac{1}{2} \smile GD$ (как вписанный)

$\angle BDG = \frac{1}{2} \smile GD$ ($\angle$ между касат. и хордой) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BDG = \angle BAD = \alpha$

$\angle ADC = 180° - \alpha - 90° = 90° - \alpha$ (сумма смежных $\angle = 180°$)

$\angle DAC = \alpha$ (по теореме о сумме $\angle \triangle$).

$\angle BAD = \angle CAD = \alpha \Rightarrow AD$ - бис-са.

По св-ву бис-сы:

$\frac{BD}{AB} = \frac{CD}{AC} \Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} = \frac{13}{12}$ Пусть $AC = 12x$, $AB = 13x$

Для прямоуг. $\triangle ABC$ по теореме Пифагора:

~~$144x^2$~~ $AC^2 + BC^2 = AB^2$

$(12x)^2 + 25^2 = (13x)^2 \quad 144x^2 + 625 = 169x^2$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$25x^2 = 625 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = 5$

$AB = 13x = 65 \Rightarrow r_\Omega = \frac{AB}{2} = \frac{65}{2}$ (т.к. AB – диаметр)

AD (по ф. бис-сы) $= \sqrt{AC \cdot AB - CD \cdot BD} =$

$= \sqrt{12x \cdot 13x - 12 \cdot 13} = 12\sqrt{26}$

~~tg~~ $\cos\alpha = \frac{AC}{AD}$ (из $\triangle ACD$) $= \frac{60}{12\sqrt{26}} = \frac{5}{\sqrt{26}}$. (*)

в $\triangle AGD$: $\frac{AD}{AG} = \cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{26}}$ $AG = \frac{12\sqrt{26}\cdot\sqrt{26}}{5} =$

$= \frac{12 \cdot 26}{5} = 2r_\omega$, т.к. AG – диаметр ω

$r_\omega = \frac{12 \cdot 13}{5} = \frac{156}{5}$

- B и E соединим.

$EF \parallel AC$ ($\angle AOC = \angle OCA$), где $O = BC \cap EF$

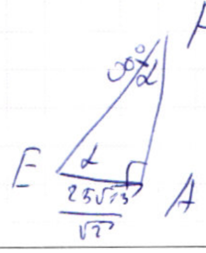
$\Rightarrow \angle FEA = \angle EAC = \angle DAC = \alpha$.

$\angle BEF = 90° - \angle FEA = 90° - \alpha$.

$\angle BEF = \angle BAF = 90° - \alpha$ (опир-ся на одну дугу)

$\Rightarrow \angle EAF = 90°$

AE из $\triangle AEB$: $\frac{AE}{AB} = \cos\alpha \Rightarrow AE = 60 \cdot \frac{5}{\sqrt{26}} = \frac{25\sqrt{13}}{\sqrt{2}}$.



$\angle AFE = 90° - \alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha$

$\sin\angle AFE = \cos\alpha$

$\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{26}}$ (раньше док-но (*)) =>

$\Rightarrow \angle AFE = \arc\cancel{\cos}\sin \frac{5}{\sqrt{26}}$. $\quad tg\,\alpha = \frac{1}{5} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

(из $\triangle ADC$)

$\frac{AF}{AE} = tg\,\alpha \quad AF = \frac{25\sqrt{13}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{5} = \frac{5\sqrt{13}}{\sqrt{2}}$

$S_{\triangle EAF} = \frac{1}{2} \cdot$ произв-ие катетов $= \frac{1}{2} \cdot \frac{5\sqrt{13}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{25\sqrt{13}}{\sqrt{2}} =$

$= \frac{125 \cdot 13}{4} = \frac{1625}{4}$.

Ответ: $r_\omega = \frac{156}{5}$

$r_\Omega = \frac{65}{2}$

$\angle AFE = \arc\cancel{\cos}\sin \frac{5}{\sqrt{26}}$.

$S_{\triangle AEF} = \frac{1625}{4}$.

N5. Sim все простые числа (от 2 до 23)

$f(2) = [2/4] = 0$

$f(3) = [3/4] = 0$. $\quad f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(5) = 1$ аналогично. $\quad f(1\cdot 2) = f(1) + f(2)$

$f(7) = 1 \quad \Rightarrow f(1) = 0$.

$f(11) = 2 \quad f(4) = f(2)\cdot f(2) = 0$

$f(13) = 3$

$f(17) = 2\!\!\!/\,4 \quad f(6) = f(2)\cdot f(3) = 0$.

$f(19) = 4 \quad f(8) = f(2)\cdot f(4) = 0$

$f(23) = 5 \quad f(9) = f(3)\cdot f(3) = 0$.

$f(10) = 1$

$f(12) = 0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(13)=1$
$f(15)=1$
$f(16)=0$
$f(18)=0$
$f(20)=1$
$f(21)=1$
$f(22)=2$
$f(24)=0$
$f(25)=2$
$f(26)=3$
$f(27)=0$
$f(28)=1$

Заметим, что если взять $a=x$ и $b=\frac{1}{x}$, то: $f(x\cdot\frac{1}{x})=f(x)+f(\frac{1}{x})=$

$\Rightarrow f(1)=f(x)+f(\frac{1}{x}) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(\frac{1}{x})=-f(x)$.

Найдём все значения $f(\frac{1}{x})$ при $x\in[4;28]$

$f(\frac{1}{4})=-f(+4)=0$
$f(\frac{1}{5})=-1$
$f(\frac{1}{6})=0$
$f(\frac{1}{7})=-1$

$f(\frac{1}{8})=0$
$f(\frac{1}{9})=0$
$f(\frac{1}{10})=-1$
$f(\frac{1}{11})=-2$
$f(\frac{1}{12})=0$
$f(\frac{1}{13})=-3$
$f(\frac{1}{14})=-1$
$f(\frac{1}{15})=-1$

$f(\frac{1}{16})=0$
$f(\frac{1}{17})=-4$
$f(\frac{1}{18})=0$
$f(\frac{1}{19})=-4$
$f(\frac{1}{20})=-1$
$f(\frac{1}{21})=-1$
$f(\frac{1}{22})=-2$
$f(\frac{1}{23})=-5$

$f(\frac{1}{24})=0$
$f(\frac{1}{25})=-2$
$f(\frac{1}{26})=-3$
$f(\frac{1}{27})=0$
$f(\frac{1}{28})=-1$

$f(\frac{x}{y}) = f(x \cdot \frac{1}{y}) \lesssim 0$

$f(x \cdot \frac{1}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) < 0$

I. если $f(x) = 0$, т.е. $x = 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 27$ (9 значений), то $f(\frac{1}{y}) < 0$. В этом случае подойдут $y = 5, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 25, 26, 28$ (16 значений).

В этом случае $16 \cdot 9 = 144$ вар-ов.

II. если $f(x) = 1$, т.е. $x = 5, 7, 10, 14, 15, 20, 21, 28$ (8 значений), то $f(\frac{1}{y}) < -1$. В этом случае подойдут $y = 11, 13, 17, 19, 22, 23, 25, 26$ (8 значений). Итого $8 \cdot 8 = 64$ вар-ов.

III. если $f(x) = 2$, т.е. $x = 11, 22, 25$ (3 значения), то $f(\frac{1}{y}) < -2$. Подойдут $y = 13, 17, 19, 23, 26$ (5 значений). Итого $3 \cdot 5 = 15$ вар-ов.

IV. если $f(x) = 3$, т.е. $x = 26, 13$ (2 значения), то $f(\frac{1}{y}) < -3 \Rightarrow$ подойдут $y = 17, 19, 23$ (3 значения). Итого $2 \cdot 3 = 6$ вар-ов

V. если $f(x) = 4$, то $x = 17, 19 \Rightarrow$ подойдут $y = 23$ ($2 \cdot 1 = 2$ ~~значения~~ вар-та)

VI. если $f(x) = 5$, т.е. $x = 23$, то $\varnothing$.

Всего $144 + 64 + 15 + 6 + 2 = 231$ пара

Ответ: 231 пара

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

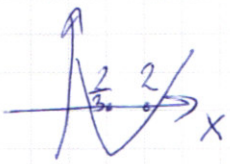
№6.

$$\begin{cases} \frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \quad (2) \\ ax+b \geq 18x^2 - 51x + 28 \quad (1) \end{cases}$$

(1) $ax+b \geq 18x^2-51x+28$.

$18x^2 \cancel{+\ldots} - 51x - ax + 28 - b \leq 0$.

ветви пар-бы ↑ и вып-ся при любом $x \in [\frac{2}{3}; 2]$:



$$\left[\begin{array}{l} f(\frac{2}{3}) \leq 0 \\ f(2) \leq 0 \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 18 \cdot \frac{4}{9} - 51 \cdot \frac{2}{3} - \frac{2}{3}a + 28 - b \leq 0 \\ 18 \cdot 2^2 - 51 \cdot 2 - 2a + 28 - b \leq 0 \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 8 - 34 - \frac{2}{3}a + 28 - b \leq 0 \\ 72 - 102 - 2a + 28 - b \leq 0 \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 2 \leq b + \frac{2}{3}a \\ -2 \leq 2a + b \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b \geq 2 - \frac{2}{3}a \\ b \geq -2 - 2a \end{array} \right.$$

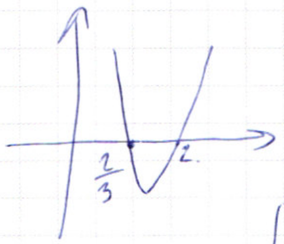
(2) $\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax + b \cancel{\geq 0}$

$ax + b + \frac{\cancel{8-}6x-8}{3x-2} \leq 0$.

$$\frac{3ax^2 - 2ax + 3bx - 2b + 6x - 8}{3x-2} \leq 0. \qquad x \in [\tfrac{2}{3}; 2] \Rightarrow \text{знам.} > 0.$$

$3ax^2-2ax+3вx+6x-2в-8\le 0.$

$a>0:$



$$\left[\begin{array}{l} f(\frac{2}{3})\le 0 \\ f(2)\le 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3a\cdot\frac{4}{9}-2a\cdot\frac{2}{3}+3в\cdot\frac{2}{3}+6\cdot\frac{2}{3}-2в-8\le 0 \\ 3a\cdot 2^2-2a\cdot 2+3в\cdot 2+6\cdot 2-2в-8\le 0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{4a}{3}-\frac{4a}{3}+2в-2в+4-8\le 0. \text{ (верно всегда)} \\ 12a-4a+6в-2в+4\le 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} 8a+4в+4\le 0. \\ 4в\le -8a-4. \\ в\le -2a-1. \end{array}\right.$$

$a<0:$

$D<0: \; 3ax^2+x(3в+6-2a)-2в-8$

$D=9в^2+36+4a^2+36в-24a-12aв-12a(-2в-8)=$

$=9в^2+36+4a^2+36в+12aв+72a=0.$

$(3в+6+2a)^2+48a=0.$

$(3в+6+2a)^2=-48a$

$3в+6+2a=4\sqrt{3}\cdot a.$

$3в=4\sqrt{3}a-2a-6.$

$в=\frac{4\sqrt{3}a-2a-6}{3}.$