МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 2.

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} & (1) \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 & (2) \end{cases}$$

(2) $x^2-2\cdot 6x+36-36+(6y)^2-2\cdot 6y\cdot 3+9-9=45$

$(x-6)^2+(6y-3)^2-36-9=45$

$(x-6)^2+9(2y-1)^2=90$

~~Пусть $(x-6)$~~

(1) $x-12y=\sqrt{2y(x-6)-1\cdot(x-6)}$

$x-12y=\sqrt{(2y-1)(x-6)}$

$$\begin{cases} (x-6)-6\cdot(2y-1)=\sqrt{(x-6)(2y-1)} \\ (x-6)^2+9(2y-1)^2=90 \end{cases}$$

Пусть $(x-6)=u$, $(2y-1)=V$, тогда:

$$\begin{cases} u-6V=\sqrt{uV} & (1^*) \\ u^2+9V^2=90 & (2^*) \end{cases}$$

1^*: $\begin{cases} u>6V \\ uV>0 \end{cases}$ – условие; возведем в квадрат:

$u^2-12uV+36V^2=uV$

$u^2-13uV+36V^2=0$

$D=169V^2-4\cdot\overset{144}{36V^2}=25V^2$

$u_1=\frac{13V-5V}{2}=4V$, тогда $V\cdot 4V>0$ – верно

$4V>6V$ – верно для $V<0$

$u_2=\frac{13V+5V}{2}=9V$, тогда $V\cdot 9V>0$ – верно

$9V>6V$ – верно для $V>0$

Тогда из (1*): $\left[\begin{array}{ll} \begin{cases} u = 4v \ ① \\ v < 0 \end{cases} & \begin{cases} u = 9v \ ② \\ v > 0 \end{cases} \end{array}\right.$

Подставим в (2*):

① $(4v)^2 + 9v^2 = 90$

$25v^2 = 90$

$v^2 = \frac{90}{25}$

$v < 0 \Rightarrow \quad v = -\sqrt{\frac{90}{25}} = -\frac{3}{5}\sqrt{10}$

$u = -\frac{12}{5}\sqrt{10}$

Вернемся к замене:

$2y - 1 = -\frac{3}{5}\sqrt{10} \Rightarrow y = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{5}\sqrt{10}\right) = 0{,}5 - 0{,}3\sqrt{10}$

$x - 6 = -\frac{12}{5}\sqrt{10} \Rightarrow x = 6 - \frac{12}{5}\sqrt{10}$

② $(9v)^2 + 9v^2 = 90$

$90v^2 = 90$

$v > 0 \Rightarrow v = 1$

$u = 9$

Вернемся к замене:

$2y - 1 = 1 \Rightarrow y = 1$

$x - 6 = 9 \Rightarrow x = 15$

Ответ: $\left(6 - \frac{12}{5}\sqrt{10};\ 0{,}5 - 0{,}3\sqrt{10}\right)$; $(15; 1)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} & (1) \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5} & (2) \end{cases} \qquad tg\alpha = ?$$

(2) $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2} =$

$= 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow$

$-\cancel{2}\cdot\frac{1}{\sqrt5}\cos 2\beta = -\frac{\cancel{2}}{5}$

$\cos 2\beta = \frac{\sqrt5}{5}$; $\sin 2\beta = \pm\frac{2}{\sqrt5}$

(1) $\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

• Если $\sin 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$:

$\frac{\sqrt5}{5}\sin 2\alpha + \frac{2}{\sqrt5}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5} \quad | \cdot\sqrt5$

$\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha + 1 = 0$

$2\sin\alpha\cos\alpha + 2(1-2\sin^2\alpha) + \cancel{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha} = 0$

$\cancel{-4\sin^2\alpha+\sin^2\alpha}$

$2\sin\alpha\cos\alpha - 4\sin^2\alpha + 3 = 0$ ${}^{\shortparallel}3(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)$

$\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha - 3\cos^2\alpha = 0$

По условию $tg\alpha$ определен $\Rightarrow \cos\alpha \neq 0$; разделим выражение на $\cos^2\alpha$:

$tg^2\alpha - 2tg\alpha - 3 = 0$

$D = 4 + 12 = 16$

$tg\alpha_1 = \frac{2-4}{2} = -1 \qquad tg\alpha_2 = \frac{2+4}{2} = 3$

Т.к. значений $tg\alpha \geq 3$, то проверим еще $\sin 2\beta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$:

$\frac{\sqrt{5}}{5}\sin 2\alpha - \frac{2}{\sqrt{5}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad | \cdot \sqrt{5}$

$\sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha + 1 = 0$

$2\sin\alpha\cos\alpha - 2(1 - 2\sin^2\alpha) + 1 = 0$

$2\sin\alpha\cos\alpha + 4\sin^2\alpha - \underset{= \sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{1} = 0$

$3\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha = 0 \quad | : \cos^2\alpha \neq 0$

$3tg^2\alpha + 2tg\alpha - 1 = 0$

$D = 4 + 12 = 16$

$tg\alpha_1 = \frac{-2+4}{6} = \frac{1}{3} \qquad tg\alpha_2 = \frac{-2-4}{6} = -1$

Ответ: $tg\alpha = -1;\ \frac{1}{3};\ 3$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 6

$$\underbrace{\frac{16x-16}{4x-5}}_{f(x)} \le ax+b \le \underbrace{-32x^2+36x-3}_{g(x)} \quad \forall x \in [\tfrac{1}{4};1]$$

Рассмотрим поведение функций $f(x)=\frac{16x-16}{4x-5}$ и $g(x)=-32x^2+36x-3$ на нужном промежутке, взяв производную:

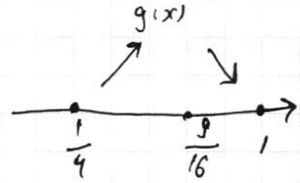
$$f'(x) = \frac{16(4x-5)-4(16x-16)}{(4x-5)^2} = \frac{64x-80-64x+64}{(4x-5)^2} = \frac{-16}{(4x-5)^2}$$

$f'(x)<0 \ \forall x \in [\frac14;1] \to$ на промежутке $f(x)$ убывает

$$f(x)_{max} = f(\tfrac14) = \frac{4-16}{1-5} = \frac{12}{4} = 3$$

$$f(x)_{min} = f(1) = \frac{16-16}{4-5} = 0$$

$$g'(x) = -32\cdot 2x + 36 = 36-64x$$

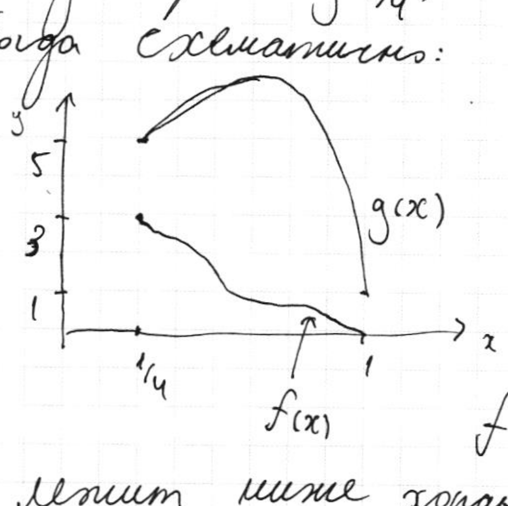


$g'(x)=0$ при $x=\frac{9}{16}$

~~Н.е. $g(x)_{max}$~~ $=$ $g(x)_{min}$ при $x=1$ (т.к. 1 дальше от $x_{верш}$, чем $\frac14$) $\Rightarrow g(x)_{min} = -32+36-3 = 1$

~~Тогда при~~ $g(1/4) = -32\cdot\frac{1}{16}+36\cdot\frac14-3 = -2+9-3=5$

Тогда схематично:



При этом $f''(x) =$

$$= -16\left(\frac{1}{(4x-5)^2}\right)' = -16\cdot\frac{-2(4x-5)\cdot 4}{(4x-5)^4} =$$

$$= \frac{16\cdot 2\cdot 4(4x-5)}{(4x-5)^4} < 0 \ \forall x \in [\tfrac14;1] \Rightarrow$$

$f(x)$ — вогнутая на промежутке и лежит ниже хорды, проходящей через т. $(\frac14;3)$ и $(1;0)$

Тогда для выполнения неравенства необходимо, чтобы ~~их~~ прямая ~~вида~~ $y = ax + b$ лежала между прямыми, проходящими ~~между~~ через пары точек:

1) $\left(\frac{1}{4}; 5\right)$ и $(1; 1)$ $\rightarrow$ $y = -\frac{20}{3}x + 7\frac{2}{3}$

2) $\left(\frac{1}{4}; 3\right)$ и $(1; 0)$ $\rightarrow$ $y = -4x + 4$

Т.е. $\begin{cases} 3 < \frac{1}{4}a + b < 5 \\ 0 < a + b < 1 \end{cases}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

$10x + |x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)}$

ОДЗ: $10x - x^2 > 0$

$x \in (0; 10)$, верш. параболы в $x=5 \Rightarrow$ $(10x-x^2)_{max} = 50-25=25$

$x \in (0; 10) \Rightarrow$ модуль раскрывается с „$-$"

$10x + (10x-x^2)^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)}$

$10x - x^2 + (10x-x^2)^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3(10x-x^2)}$

Пусть $10x - x^2 = y$, $y \in (0; 25)$, тогда:

$f(y) = y + y^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 y} = g(y)$

Заметим, что функции монотонно возрастающие, и $f(y) = g(y)$ при $y = 9$:

$\begin{cases} 9 + (3^{\log_3 4})^2 = 9 + 16 = 25 \\ 5^{\log_3 9} = 25 \end{cases} \Rightarrow$ решения $- y \in (0; 9]$

$0 < 10x - x^2 \leq 9$

$x^2 - 10x + 9 \geq 0$

$x_1 = 9 \quad x_2 = 1$

С учетом ОДЗ: $x \in (0; 1] \cup [9; 10)$

Ответ: $x \in (0; 1] \cup [9; 10)$

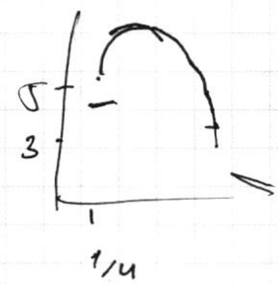
~~$f(x)-g(x)$ $\frac{16x-16}{4x-5}$~~ $g(x)-f(x) = -32x^2+36x-3-\frac{16x-16}{4x-5} =$

$\begin{array}{r} 32 \\ \times 4 \\ \hline 128 \end{array}$

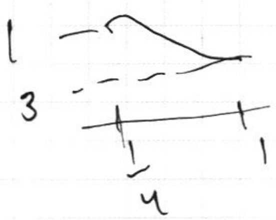
$= \frac{-128x^3+144x^2-12x+160x^2-180x+15-16x+16}{4x-5}$

$= \left(\frac{-128x^3+304x^2-208x+31}{4x-5}\right)' =$

$= \frac{-128\cdot 3x^2+304\cdot 2x}{(}$



$0 \le a+b \le 1$



~~$\left(\frac{-16}{(4x-5)^2}\right)' = -16\left(\frac{-16\cdot 2\cdot(4x-5)\cdot 4}{(4x-5)^4}\right) =$~~

$= 3 < \frac{1}{4}a+b < 5$

$0 < a+b < 1$

$= -16\left(\frac{1}{(4x-5)^2}\right)' = 16\,\frac{-2\cdot(4x-5)\cdot 4}{(4x-5)^4} = a > -$

$= \frac{16\cdot 2\cdot 4(4x-5)}{(4x-5)^4}$

$\frac{1}{4}a+b=5$ $\qquad a+b=0$

~~$5a+b=$~~ $a+b=1$ $\qquad \frac{1}{4}a+b=3$

$b=1-a$ $\qquad \frac{1}{4}a-a=3$

$\frac{1}{4}a+1-a=5$ $\qquad -\frac{3}{4}a=3 \to a=-4$

$-\frac{3}{4}a=5$ $\qquad b=4$

$a=-\frac{20}{3}=$ $\quad b=7\frac{3}{3}$

$=-6\frac{2}{3}$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} uv > 0 \\ u > 6v \end{cases}$$

$$u^2 - 12uv + 36v^2 = u$$

$2\alpha + 2\beta = \gamma$, тогда: $\cancel{2\alpha = ...}$

$\sin\gamma = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\cos\gamma = \frac{2}{\sqrt5}$ / $-\frac{2}{\sqrt5}$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha \cancel{\sin\beta}} = ?$$

$$\sin(\gamma + 2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$$

$$\sin\gamma \cos 2\beta - \cos\gamma \sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$$

1) $\cos\gamma = +\frac{2}{\sqrt5}$:

$$-\frac{1}{\sqrt5}\cos 2\beta - \frac{2}{\sqrt5}\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$$

$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ ~~$= \sin 2\alpha =$~~

$$2\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\cancel{2\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)\left(\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{1}{}\right)}$$

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$$

$$2\sin(\cancel{2\alpha} + 2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$$

$$\cos 2\beta = \frac{-1}{5\sin(2\alpha + 2\beta)}$$

$$\cos 2\beta = \frac{-1}{5\frac{-1}{\sqrt5}} = +\frac{\sqrt5}{5}$$

$\cancel{\sin}(2 + 0)$

$\sin\alpha + \cos\beta = \sin\alpha\cos$

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{}{\sqrt5}$$

$$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\beta\sin 2\alpha = -$$

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$tg\,\alpha = ?$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$ | $\sin 2\alpha\cos 4\beta + \sin 4\beta\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

№2 $\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} & (1) \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 & (2) \end{cases}$

2) $(x^2-6\cdot 2x+36)-36+((6y)^2-2\cdot 6y\cdot 3+9)-9=45$

$(x-6)^2+(6y-3)^2-45=45$

$(x-6)^2+6(y$

Пусть $6y=t$ тогда

$(x-6)^2+(t-3)^2=90=(3\sqrt{10})^2$

1) $\cancel{x-2t=\sqrt{\frac{xt}{3}-2t-x+6}}$

$x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}$

$x>12y \Rightarrow y<\frac{1}{12}x$

$-\frac{32}{16}+\frac{36}{4}-3=$ $x^2-24yx+144y^2=2xy-12y-x+6$

$-2+9-3=4$ $\quad -26yx$

$x-12y=\sqrt{2y(x-6y)-1(x-6)}$

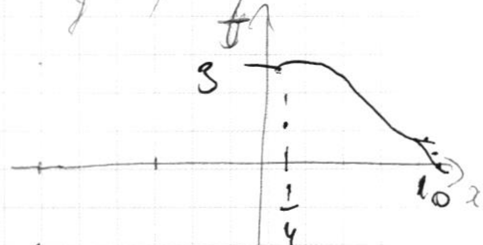
$x-12y=\sqrt{(2y-1)(x-6)}$

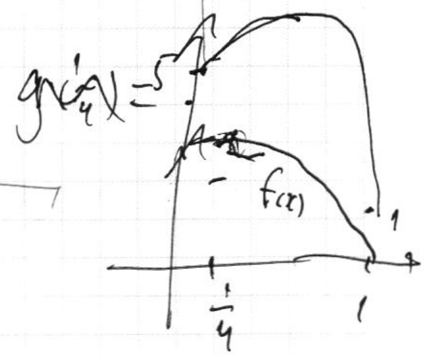
$x>6$

$y>\frac{1}{2} \Rightarrow t>3$

$g(1/4)=$

$-\frac{32}{16}+\frac{36}{4}-3=-2+9-3=4$





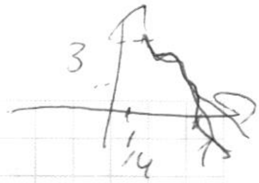
☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$f(x) = \frac{16x-16}{4x-5} \leq a\cancel{x} + b \leq -32x^2+36x-3$ — $g(x)$

$\forall x \in [\frac{1}{4}; 1]$

Все пары a, b



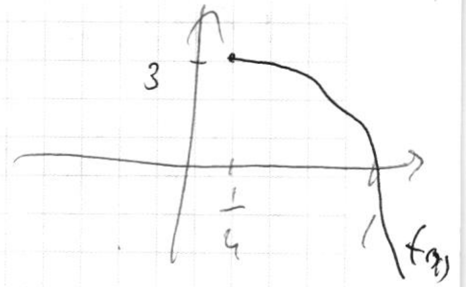
$\left(\frac{16x-16}{4x-5}\right)' = \frac{16(4x-5)-4(16x-16)}{(4x-5)^2} = \frac{64x-80-64x+64}{(4x-5)^2} < 0 \quad \forall x$

$f(x)_{max} = \frac{\frac{16}{4}-16}{\frac{4}{4}-5} = \frac{-12}{-4} = 3$ $(x=\frac{1}{4})$ $\quad f(x)_{min} = 0$ $(x=1)$

$g(x)' = -32 \cdot 2x + 36 = -64+36 = -28 < 0$

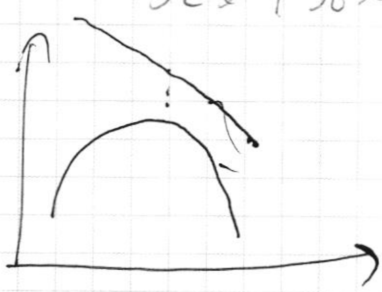
$g(x)_{max} = -32 \cdot \frac{1}{16} + 36 \cdot \frac{1}{4} - 3 = 4 \quad (x = \frac{1}{4})$

$g(x)_{min} = -32+36-3 = 1 \quad (x=0$



~~рассмотрим разность~~

$-32x^2+36x-3 - \frac{16x-16}{4x-5} = \frac{\quad}{4x-5}$



$36-64x < 0$

$64x > 36$

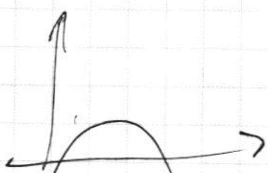
$x > \frac{36}{64} = \frac{9}{16}$

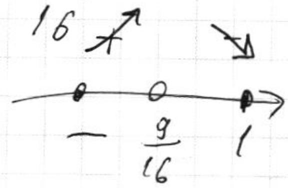
$g'(x) = 0$

$64x = 36$

$x = \frac{36}{64} = \frac{9}{16}$

$g(x) - f(x) =$





$\frac{1}{4} \nless \frac{9}{16}$

$-32 \cdot \frac{81}{16 \cdot 16} + 36 \cdot \frac{9}{16} - 3 = \frac{81}{8} - \frac{2 \cdot 81}{8} - 3 = -3 - \frac{81}{8} = -(3 + 10\frac{1}{8}) = -13\frac{1}{8}$

$16 \nless 36$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x-12y=\sqrt{(2y-1)(x-6)}$

$x-12y = u-6v$

$(x-6)^2+9(2y-1)^2=90$

$\begin{cases} u-6v=\sqrt{uv} \ (1) \\ u^2+9v^2=90 \ (2) \end{cases} \Rightarrow$ 1) $u>6v$

$u^2-12uv+36v^2-uv=0$

$u^2-13uv+36v^2=0$

$D=169-144=25$

$y+y^{\log_3 4} \geqslant 5^{\log_3 y}$

$2\sin\alpha\cos\alpha+2-4\sin^2\alpha \cancel{+1}=0$

$4\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cancel{10x+|x^2+}$

$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4} \geqslant x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

$y > 5^y - \cdot$

$5^y-y-y^{\log_3 4} \leqslant 0$

1) $x(x-10)>0$

1) $x\in(-\infty;0]\cup[10;+\infty)$:

$10x+(x^2-10x)^{\log_3 4} \geqslant x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

ОДЗ: $x\in(0;10)$! $(10x-x^2)>0$

$10x-x^{2\log_3 4}+(10x)^{\log_3 4} \geqslant x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

$25+25^{\log_3 25}>5^{25}$

$10x-x^2 \geqslant 5^{\log_3(10x-x^2)}-(10x-x^2)^{\log_3 4}$

$y, y\in[0;25)$ $f(x) \geqslant 5^{\log_3 f(x)}-f(x)^{\log_3 4}$

$y>5^y-y^{\log_3 4}$

$y+y^{\log_3 4} > 5^y$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

max. знач: $-2x+10=0$, $x=5$ ✓

$x(10-x)>0$

№3

ОДЗ: $10x-x^2>0 \Rightarrow x\in(0;10)$

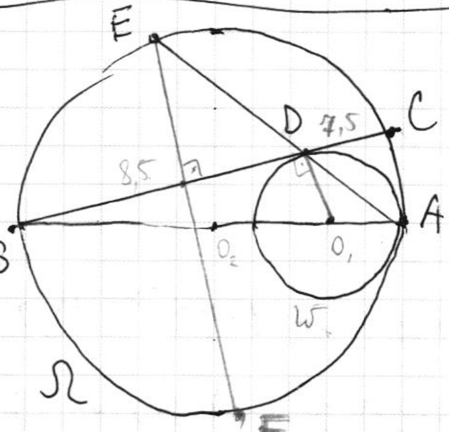
$10x+(10x)^{\log_3 4}-x^{2\log_3 4} \geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

$10x(1+10x^{(\log_3 4)-1})-x^{2\log_3 4} \geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

$\cancel{10x+(10x)^{\log_3 4}} \quad 10x+(10x-x^2)^{\log_3 4} \geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

$\cancel{10x+(x^2-10)} \quad 10x+x^{\log_3 4}(10-x)^{\log_3 4} \geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

$\log_3(10x-x^2)_{max}=\log_3(50-25)=\log_3 25=2\log_3 5$



$DC=7,5$

$BD=8,5$ $R,r=?$

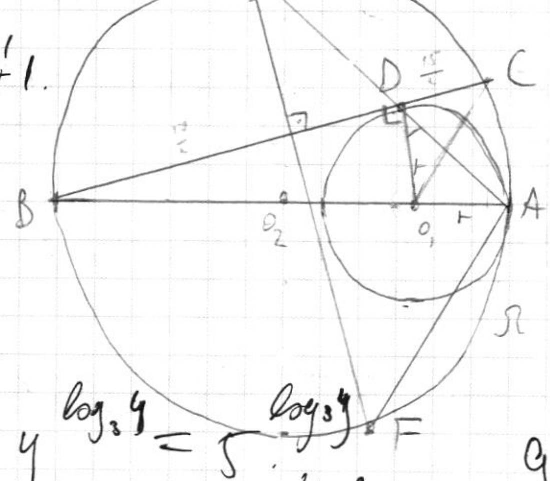
$\angle AFE=?$ $S_{\triangle AEF}=?$

① Для малой окр-ти:

$BD^2=(2R-2r)^2\cdot 2R$

$\left(\frac{17}{2}\right)^2+r^2=(2R-r)^2$

$DO_1 \parallel EF$



$f(y)'=y^{\log_3 4-1}+1.$

$1+y^{\log_3 \frac{1}{4}}$

$y=3:\ y+y^{\log_3 4}=5^{\log_3 9}$

$3+4=5^{\log_3 3}$

$9+9^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 9}$

$9+16 \geq$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$x \in (0;10)$

$10x + |x^2 - 10x| \geq x^2 + 5^{\log_3 (10x - x^2)}$ $\log_3 4$

$10x + (10x - x^2)^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3 x + \log_3 (10-x)}$

$10x - x^2 \leq 25 \quad (x=5)$

$10x - x^2 \geq 5^{\log_3 (x(10-x))} - (10x - x^2)^{\log_3 4}$

$\downarrow \leq 25$

$5^{\log_3 25} - 25^{\log_3 4}$

$\cancel{10x \geq x^2 + 5^{\log}}$ $y + y^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 y}$ $y(1+y^{\log_3 \frac{4}{3}})$

$25 \quad 25 \quad 25(25+$

$25^{($

$$\begin{cases} f(ab) = f(a) + f(b) \\ f(p) = [p/4] \quad \forall p \in P \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 \leq x \leq 25 \\ 2 \leq y \leq 25 \end{cases} \quad f(x/y) < 0 \quad \text{Найти кол-во } (x, y)$$

$x>0$

1) Если $x = p \cdot y$: $f(x/y) = f(p) = [p/4] \ldots \quad \geq 0 \; \forall p$

$\downarrow$ нет решений

2) Если $y = px$: $f(\frac{1}{p}) = f(1) +$

$\log_5 (y + y^{\log_3 4}) \geq \log_3 y$

$16x - 16 = -128x^3 + 144x^2 - 12x$

$+160x^2 - 180x + 15$

$\cancel{-128x^3 + 144x^2}$

$-128x^3 + 304x^2 - 208x + 31$

$y(1) \leq y_{min} = -32 + 36 - 3 = 1$

$-192 - 16$

$\frac{16x-16}{4x-5} = -32x^2 + 36x - 3$ 208

$\cancel{f(x) = f(x)}$

$\cancel{\frac{16x-16}{4x-5} - (-32x^2 + 36x - 3)(4x-5)}$

$= \frac{\quad}{4x-5}$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)