МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2}, \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geqslant |x^2 + 6x|^{\log_4 5} - x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 27$, $3 \leqslant y \leqslant 27$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geqslant ax + b \geqslant 8x^2 - 34x + 30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1; 3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR = 2$, $QS = 1$, $PS = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3. Решите неравенство

$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2 \overset{ОВР}{\Leftrightarrow}$ ОВР: $x^2+6x>0$

$\Leftrightarrow 3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5} - x^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5} - 3^{\log_4(x^2+6x)} \Leftrightarrow$ $x^2+6x \doteq t,\ t>0$

$\Leftrightarrow t \geq t^{\log_4 5} - 3^{\log_4 t} \overset{t>0}{\Leftrightarrow} t \geq 5^{\log_4 t} - 3^{\log_4 t} \Leftrightarrow$ $\log_4 t \doteq m$ $\quad \log_4 t = m \Leftrightarrow t = 4^m$

$\Leftrightarrow 4^m \geq 5^m - 3^m \Leftrightarrow 4^m + 3^m \geq 5^m \Leftrightarrow 4^m + 3^m - 5^m \geq 0$

$\forall f(m) = 3^m + 4^m - 5^m$

$D(f) = \mathbb{R}$, f непр

$f'(m) = e^m \cdot \ln 3 + e^m \cdot \ln 4 - e^m \cdot \ln 5 = e^m(\ln 3 + \ln 4 - \ln 5) = e^m \cdot \ln \frac{3 \cdot 4}{5} =$

$= e^m \cdot \ln \frac{24}{10}$

т.к. $2{,}4 < e \ (\approx 2{,}7)$ то.

$\forall m\ e^m > 0$

$f(-1) = 3^{-1} + 4^{-1} + 5^{-1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{20+15-12}{60} > 0$

$f(2) = 3^2 + 4^2 - 5^2 = 9 + 16 - 25 = 0$

Получаем: $\left.\begin{matrix} f(2)=0 \\ f\text{ непр},\ f \downarrow \mathbb{R} \end{matrix}\right| \Rightarrow \begin{matrix} \forall m>2 \ \ f(m)<0 \\ \forall m \leq 2 \ \ f(m) \geq 0 \end{matrix}$

$\left(f(m) \geq 0 \Leftrightarrow 4^m + 3^m - 5^m \geq 0 \right)$

$m \leq 2 \Leftrightarrow \log_4 t \leq 2 \Leftrightarrow \log_4 t \leq \log_4 16 \overset{4>1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} t \leq 16 \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+6x \leq 16 \ (*) \\ x^2+6x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\overset{(*)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq -8 \\ \left[\begin{matrix} x>0 \\ x<-6 \end{matrix}\right. \end{cases}$

$(*)\ x^2 + 6x - 16 = 0 \Rightarrow x = -3 \pm \sqrt{9+16} \Rightarrow \left[\begin{matrix} x = 2 \\ x = -8 \end{matrix}\right.$

Ответ: $[-8; -6) \cup (0; 2]$

1. Углы α и β: $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

(?) Все возможные значения $tg\,\alpha$, если он определен и их не менее 3х

$$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\cdot\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\cdot\cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2} = 2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta$$

т.о. $\cos 2\beta\cdot 2\cdot\sin(2\alpha+2\beta) = \sin(2\alpha+4\beta) \overset{усл}{\Leftrightarrow} \cos 2\beta\cdot 2\cdot\left(\frac{-1}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{8}{17} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$

тогда: $\sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{1}{17}} = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\text{То}(tg\,x) = \pi$
$\leftrightharpoons (*)$

1). $\sin 2\beta = +\frac{1}{\sqrt{17}}$

тогда $\sin(2\alpha+2\beta) = -\sin 2\beta \Rightarrow \sin(2\alpha+2\beta) = \sin(-2\beta) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2\alpha+2\beta = -2\beta+2\pi k \\ 2\alpha+2\beta = \pi-(-2\beta)+2\pi k \end{array}\right., k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \alpha = -2\beta+\pi k & (1) \\ \alpha = \frac{\pi}{2}+\pi k & (2) \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$$

(1) $tg\,\alpha \overset{(*)}{=} tg(-2\beta) = -tg(2\beta) = \frac{-\sin 2\beta}{\cos 2\beta} = \frac{-1/\sqrt{17}}{4/\sqrt{17}} = -\frac{1}{4}$

(2) $tg\,\alpha$ - не определён

2). $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

тогда $\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\beta \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\alpha+2\beta = 2\beta+2\pi k \\ 2\alpha+2\beta = \pi-2\beta+2\pi k \end{array}\right., k\in\mathbb{Z} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ll} \alpha = \pi k & (3) \\ \alpha = \frac{\pi}{2}-2\beta+\pi k & (4) \end{array}\right., k\in\mathbb{Z}$$

(3) $tg\,\alpha \overset{(*)}{=} 0$

(4) $tg\,\alpha \overset{(*)}{=} tg\left(\frac{\pi}{2}-2\beta\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\beta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\beta\right)} = \frac{\cos(2\beta)}{\sin(2\beta)} = \frac{4/\sqrt{17}}{-1/\sqrt{17}} = -4$

Ответ: $tg\,\alpha = -\frac{1}{4}$
$tg\,\alpha = 0$
$tg\,\alpha = -4$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y-2+2-2x = \sqrt{3y(x-1)-2(x-1)} \\ 9x^2+9y^2-18x-12y=12 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y-2-(2x-2) = \sqrt{(3y-2)(x-1)} \\ 9x^2-18x+9+9y^2-12y+4-9-4=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y-2-2(x-1) = \sqrt{(3y-2)(x-1)} \\ (\cancel{3}x-1)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{25}{9} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$3y-2 =: m, \quad x-1 =: t$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-2t=\sqrt{mt} \\ t^2+\left(\frac{1}{3}m\right)^2=\frac{25}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2t \\ m^2-4tm+4t^2=mt \\ t^2+\frac{1}{9}m^2=\frac{25}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\geq 2t \\ m(m-t)-4t(m-t)=0 \\ 9t^2+m^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2t \\ \left[\begin{array}{l} m=4t \\ m=t \end{array}\right. \\ 9t^2+m^2=25 \end{cases} \qquad (*)$$

① $m=4t$

$$\begin{cases} m\geq 2t \\ 9t^2+m^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4t \geq 2t \\ 9t^2+16t^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t\geq 0 \\ 25t^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\geq 0 \\ t^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow t=1$$

т.о. $m=4$

② $m=t$

$$\begin{cases} m\geq 2t \\ 9t^2+m^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\geq 2t \\ 9t^2+t^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\leq 0 \\ t^2=\frac{25}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\leq 0 \\ t^2=\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow t=-\frac{\sqrt{10}}{2}$$

т.о. $m=-\frac{\sqrt{10}}{2}$

т.о. $(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m=4 \\ t=1 \end{cases} \\ \begin{cases} m=-\frac{\sqrt{10}}{2} \\ t=-\frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3y-2=4 \\ x-1=1 \end{cases} \\ \begin{cases} 3y-2=-\sqrt{10}/2 \\ x-1=-\sqrt{10}/2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=2 \\ x=2 \end{cases} \\ \begin{cases} y=\frac{4-\sqrt{10}}{6} \\ x=\frac{2-\sqrt{10}}{2} \end{cases} \end{array}\right.$

Ответ: $\left\{(2;2);\ \left(\frac{2-\sqrt{10}}{2};\ \frac{4-\sqrt{10}}{6}\right)\right\}$

№6. (?) (a;b): $\frac{4x-3}{2x-2} \ge ax+b \ge 8x^2-34x+30$ выполнено $\forall x: x \in (1;3]$

$* \; f(x) = \frac{4x-3}{2x-2}$

$f'(x) = \frac{-1}{2(x-1)^2}$ $-$ 1 $-$ f', x ↘ 1 ↘ f

$f''(x) = \frac{1}{(x-1)^3}$ $-$ 1 $+$ f'', x $\cap$ $\cup$ f

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} = 2 \Rightarrow y = 2$ - гориз. ас. при $x \to \pm\infty$

$x = 1$ - верт. ас

$* \; g(x) = 8x^2 - 34x + 30$

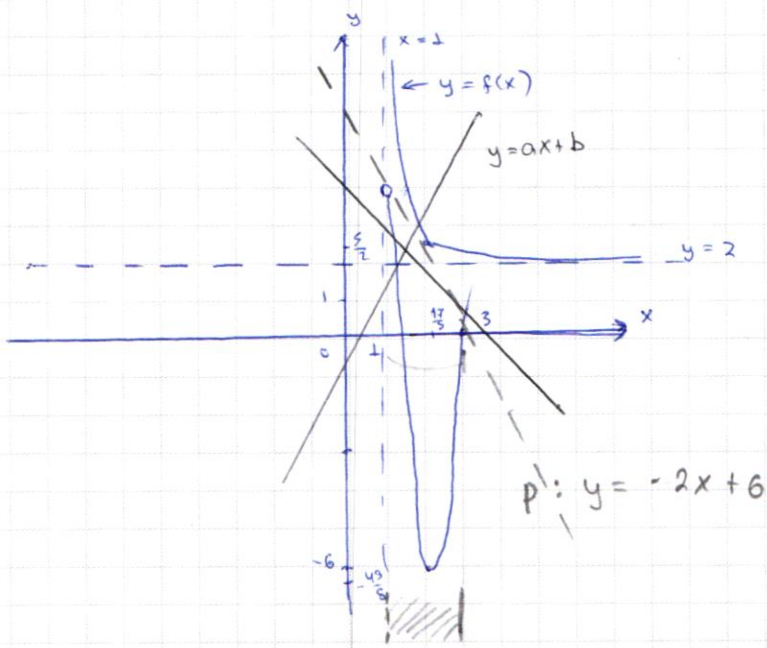
$x_0 = \frac{17}{8}$ $g(x_0) = -\frac{49}{8}$

$g(2) = \frac{5}{2}$

$g(3) = \frac{9}{4}$

$g(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{17 \pm \sqrt{289-240}}{8} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = \frac{5}{4} \end{array}\right.$

$g(2) = -6$



p: касательная к $y = f(x)$ в $x_0 = ?$

~~[illegible]~~

$p: y = -2x + b$

$p: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$f'(x_0) = \frac{-1}{2(x-1)^2} = -2 \Rightarrow (x-1)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = \frac{3}{2} \\ x_0 = \frac{1}{2} \end{array}\right.$

$b = -2$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y-2x\geq 0 \\ 9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2 \\ 3y^2+3x^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y-2x\geq 0 \\ 9y^2-15xy+4x^2+2x+3y-2=0 \\ 3y^2+3x^2-6x-4y-4=0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} 3y = k \\ 2x = m \end{matrix}$$

$$6\left[\begin{matrix}(x+1)^2+\frac{3}{2}y(-1-x)=0 \\ (x+1)^2-\frac{3}{2}y(x+1)=0\end{matrix}\right.$$

$\cancel{3y^2}$

$-2x+6$ - касается

$f'(x_0)=-2$

$\frac{1}{2}(x-1)^2=2 \Rightarrow (x-1)^2=\frac{1}{4}$ $x>0$

$x-1=\pm\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

$x=3/2$

$$\Rightarrow \begin{cases} k-m\geq 0 \\ k^2-\frac{5}{2}km+m^2+m+k-2=0 \\ \frac{k^2}{3}+\frac{3m^2}{4}-3m-\frac{4k}{3}-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k-m\geq 0 \\ 2k^2-5km+2m^2+2m+2k-4=0 \\ 4k^2+9m^2-36m-16k-48=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k-m\geq 0 \\ 4k^2-10km+4m^2+4m+4k-16=0 \\ 4k^2+9m^2-36m-16k-48=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k-m\geq 0 \\ x-1 \end{cases}$$

$$9m^2-4m^2-36m-4m-16k-4k-48+16+10km=0$$

$$5m^2-40m-20k-32+10km=0$$

$3y\geq 2x \Rightarrow y\geq\frac{2}{3}x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y-2x\geq 0 \\ 9y^2-15xy+4x^2+2x+3y-2=0 \\ 3y^2+3x^2-6x-4y-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y-2x\geq 0 \\ 9y^2-15xy+4x^2+2x+3y-2=0 \quad (2) \\ 9y^2+9x^2-18x-12y-12=0 \quad (1) \end{cases}$$

(2) $9y^2-15xy+4x^2+2x+3y-2=0$

$9y^2+3y+\frac{1}{4}+4x^2+2x+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-2-15xy=0$

$(9y^2+3y+\frac{1}{4})+(4x^2+2x+\frac{1}{4})-\frac{5}{2}-15xy=0$ $|:36$

$\Rightarrow (3y+\frac{1}{2})^2+(2x+\frac{1}{2})^2=\frac{5}{2}+15xy$

(1) $(9y^2-12y+4)+(9x^2-18x+9)-13-12=0 \Rightarrow$

$+4+9=13$

$\cancel{(3y-2)^2+(3x-3)^2=25}$

$\Rightarrow (y-\frac{2}{3})^2+(x$

$(9y^2-12y+4)+(9x^2-18x+9)=25$ $|:9$

$\frac{12}{9}=\frac{4}{3}$

$\Rightarrow (y^2-\frac{4}{3}y+\frac{4}{9})+(x^2-2x+1)=\frac{25}{9}$

$\Rightarrow (y-\frac{2}{3})^2+(x-1)^2=(\frac{5}{3})^2$

$\cdot 3$ и вычесть

$9y^2-9y^2-15xy-9x^2+4x^2+18x+2x+12y+3y+12-2=0$

$\Rightarrow -5x^2-15xy+20x+15y+10=0$ $|:5$

$\Rightarrow -x^2-3xy+4x+3y+2=0$ $|:-1$

$\Rightarrow x^2+3xy-4x-3y-2=0$ $\quad x(x+3y-4)+$

$(x^2-4x+4)+3xy-3y-4-2=0$ $\quad +(-3y-2)$

$(x-2)^2+3(xy-y-2)=0 \Rightarrow$

$\cdot 2$ $\begin{cases} 18y^2-30xy+8x^2+4x+6y-4=0 \\ 3y^2+3x^2-6x-4y-4=0 \end{cases}$

$15y^2-30xy+5x^2+10x+10y=0$

$3y^2-6xy+x^2+2x+2y=0$ $|:x^2$

$-3y^2=3x^2-6x+4y+4$

$-6xy+4x^2+8x+6y+4=0$

$4x^2+8x+4+6y-6xy=0$

$x^2+2x+1+\frac{3}{2}y-3xy=0$

$3y=2-\frac{x}{...}$ $\quad y=0$ $\quad 3y=6$

$m=4t$

$4t\geq 2t \Rightarrow 2t\geq 0 \Rightarrow t\geq 0$

$9t^2+16t^2=25 \Rightarrow$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\frac{4x-3}{2x-2} = \frac{4x-4+1}{2x-2} = 2 + \frac{1}{2x-2}$ «центр»

$\frac{4(-2)-3}{2(-2)-2} = \frac{-8-3}{-4-2} = \frac{-11}{-6} = \frac{11}{6}$

$\frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$

$2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

$8x^2-34x+30 = 2(4x^2-17x+15)$

$f'(x) = \frac{(4x-3)'(2x-2) - (2x-2)'(4x-3)}{(2x-2)^2} =$

$= \frac{4(2x-2)-2(4x-3)}{4(x-1)^2} = \frac{8x-8-8x+6}{4(x-1)^2} = \frac{-2}{4(x-1)^2} = \frac{-1}{2(x-1)^2}$

f': $-$ | $-$, $x = 1$; f: $\searrow$ $\searrow$

$f''(x) = \frac{(-1)'\cdot 2(x-1)^2 - (-1)\cdot(2(x-1)^2)'}{4(x-1)^4} = \frac{1\cdot 2\cdot 2(x-1)}{4(x-1)^4} = \frac{1}{(x-1)^3}$

f'': $-$ | $+$, $x = 1$

$(2(x-1)^2)' = 2\cdot((x-1)^2)' = 2\cdot 2(x-1)\cdot 1$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{4x-3}{2x^2-2x} = 0$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{4}{2} = 2 \quad y = 2$

касат в $x_0 = 2$

$y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$

$= \frac{-1}{2(2-1)^2}(x-2) + \frac{5}{2}$

$= -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$

$3y - 2x = 3y - 2 + 2 - 2x =$

$= \underbrace{(3y-2)}_{m} - \underbrace{(2x-2)}_{2t}$

$= -2\cdot 2 + 6 =$

$\frac{5}{2} = -2\cdot 2 + b$

$\frac{5}{2} = -4 + b$

$b = \frac{5}{2} + \frac{8}{2} = \frac{13}{2}$

$\frac{5}{2} = -2x + 6$

$2x = \frac{7}{2}$

$x = \frac{7}{4}$

$(-2x+6;\ -2x+\frac{13}{2})$

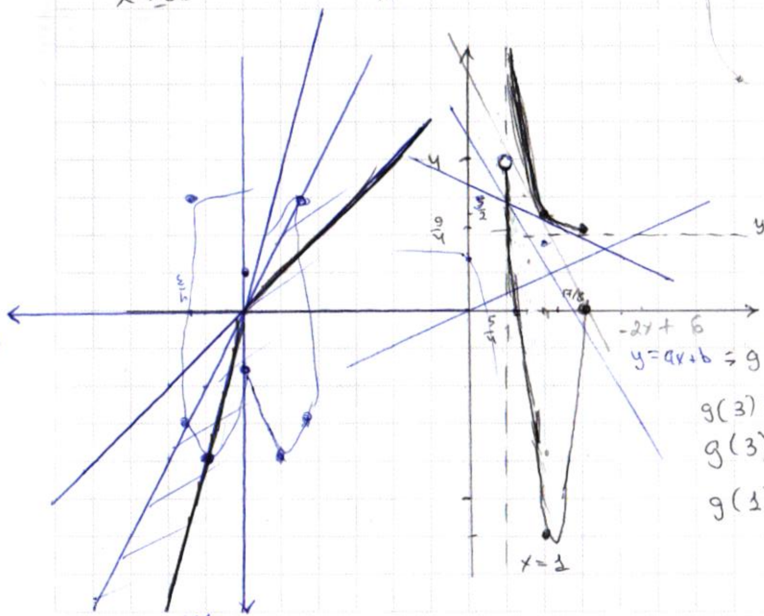
$f(2) = \frac{8-3}{4-2} = \frac{5}{2}$

$f(3) = \frac{12-3}{6-2} = \frac{9}{4}$

$(f(4) = \frac{16-3}{8-2} = \frac{13}{6}$

$\frac{5}{2} \Rightarrow 2 - \frac{5}{2}$

$a \in (2; -\frac{5}{2})$



$g(3) \geq 0$

$g(3) \leq \frac{9}{4}$

$g(1)$ неогр. сверху

$8x^2 - 34x + 30$

$x_0 = \frac{34}{2\cdot 8} = \frac{17}{8}$

$y_0 = \frac{17^2}{8} - \frac{34\cdot 17}{8} + 30 =$

$= \frac{289 - 2\cdot 289 + 240}{8} =$

$\frac{-289+240}{8} = \frac{-49}{8}$

$8 - 34 + 30 =$

$8\cdot 9 - 34\cdot 3 + 30 =$

$= 72 - 102 + 30 =$

$= 102 - 102$

$f(2) = 8\cdot 4 - 34\cdot 2 + 30 =$

$= 32 - 68 + 30 =$

$= 62 - 68 = -6$

$x = \frac{17 \pm \sqrt{289-240}}{8} = \frac{17 \pm 7}{8}$

$\left[= \frac{24}{8} = 3,\ \frac{10}{8} = \frac{5}{4} \right.$

$m^2 - 2mt + 4t^2 - mt = 0$

$(m-2t)^2 = mt$

$m \geq 2t$

$m^2 - 5mt + 4t^2$

$m(m-t) + 4t(m-t) =$

$(4t-m)$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad$ $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\cos 2\beta = \frac{4\sqrt{17}}{17}$ $\quad$ $\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha$

$-\frac{1}{\sqrt{17}} = \sin 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} \pm\sqrt{1-\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right)^2}\cdot\cos 2\alpha$

$\left(1-\frac{16}{17}\right) = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad$ $\sin(2\beta+2\alpha) = \sin 2\beta \Rightarrow 2\beta+2\alpha = 2\beta$; $2\beta+2\alpha = -2\beta+\pi k$

если – . . $2\alpha = 0+\pi k, k\in Z$ $\quad$ $tg\,\alpha = 0$

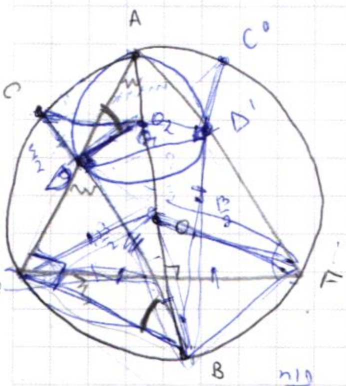
$\sin(2\alpha+2\beta) = -\sin(2\beta) \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin(2\alpha+2\beta) = \sin(-2\beta) \Rightarrow 2\alpha+2\beta = -2\beta$

$2\alpha+2\beta = 2\beta+\pi k$

$\alpha = -2\beta$

$\alpha = \pi k$



$AEF = 90° - FEF = 90° - \frac{1}{2}\ EAF$ –

$= 90° - \frac{1}{2}(360° - E\widehat{O_1F})$

$A\widehat{DO_2} = DBF$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\beta\right) = 0 + 1\cdot\sin$

$\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2} = 0 + (-1)1 = -1$

$0 - 0 \quad \frac{\pi}{2}-\pi$

$x - y$

$\cos(x+y) = \cos x\cdot\cos y - \sin x\cdot\sin y$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = 1\cdot\cos x + (-\sin x)\cdot 0 =$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = 0 - \sin x\cdot 1 = -\sin$

$\sin(x+y) = \sin x\cdot\cos y + \sin y\cdot\cos x$

$\sin x + \sin y = 2\cdot\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$

$\sin 2x = 2\sin x\cdot\cos x$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha =$

$= 2\cdot\sin\frac{2\alpha+2\alpha+4\beta}{2}\cdot\cos\frac{2\alpha-2\alpha+4\beta}{2} =$

$= 2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta$

$-\frac{8}{17} = 2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cos 2\beta \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$

тогда $\sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{16}{17}} = \pm\sqrt{\frac{1}{17}} = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

- если $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$

то.

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\sin 2\beta \Leftrightarrow \sin(2\alpha+2\beta) = \sin(-2\beta) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2\alpha+2\beta = -2\beta+2\pi k \\ 2\alpha+2\beta = \pi-(-2\beta)+2\pi k \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2\alpha = -4\beta+2\pi k \\ 2\alpha = \pi+2\pi k \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = -2\beta+\pi k \quad (1) \\ \alpha = \frac{\pi}{2}+\pi k \end{array}\right.$

$T(tg x) = \pi k$

Т.О. $\quad$ (1) $tg\,\alpha = tg(-2\beta) = -tg(2\beta) = -\frac{\frac{1}{\sqrt{17}}}{\frac{4}{\sqrt{17}}} = -\frac{1}{4}$

(2). $tg\,\alpha$ – не определен

$\frac{\pi}{4}\ \frac{3\pi}{4}$

$\sin(x+\pi) = \sin x\cdot(-1)+0$

$\sin(x-\pi) = \sin x\cdot(-1)+0$

$\sin(\pi-x) = 0 + -\sin x\cdot\cos(-1) =$
$= \sin x$

- $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\beta \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2\alpha+2\beta = 2\beta+2\pi k \\ 2\alpha+2\beta = \pi-2\beta+2\pi k \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = \pi k \\ 2\alpha = \pi-4\beta+2\pi k \end{array}\right.$

(1) $tg\,\alpha = 0$

(2). $tg\,\alpha = tg\left(\frac{\pi}{2}-2\beta\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\beta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\beta\right)} = \frac{\cos 2\beta}{\sin 2\beta} = \frac{\frac{4}{\sqrt{17}}}{-\frac{1}{\sqrt{17}}} = -4$

☑ черновик $\quad$ ☐ чистовик $\quad$ Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) $\quad$ (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 Решите неравенство

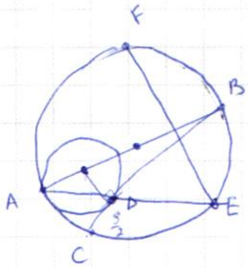
$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2 \Leftrightarrow$$

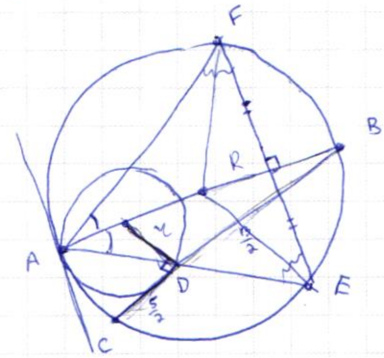
ОБР: $\begin{cases} x^2+6x>0 \\ x^2+6x \neq 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow x^2+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - 3^{\log_4(x^2+6x)} \Leftrightarrow$$

$x^2+6x = t$

ОБР: $t>0,\ t\neq 1$





$BC = S$ $\quad \frac{abc}{4R}$

$2\cos^2\frac{x}{2} = 1+\cos x$

$2\cos^2\frac{\pi}{4} = 1+\cos\frac{\pi}{2}$

$2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt2}\right)^2 = 1+0$

$1+tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

$2\cos^2\beta = 1+\cos 2\beta$

$\cos^2\beta = \frac{1+\cos 2\beta}{2} = \frac{1+\frac{4\sqrt{17}}{17}}{2} = \frac{17+4\sqrt{17}}{34}$

$tg^2\beta = \frac{34}{17+4\sqrt{17}} - 1$

~~$\sin 2\alpha = \cos 2\alpha - \sin$~~ $\qquad \sin 2x = 2\sin x\cdot\cos x$

$\sin\frac{\pi}{2} = 1 \qquad 2\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{4} = 2\frac{\sqrt2\cdot\sqrt2}{2\cdot2} = 1$

$2\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \qquad tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{2\sqrt{17}}$

$\boxed{\sin(x+y) = \sin x\cdot\cos y + \cos x\cdot\sin y}$

$\sin(2\alpha+4\beta) = \sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 4\beta \qquad \sin\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right) = 0\cdot(-1)\cdot 1 = -1$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha =$

$= 2\cdot\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\cdot\cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2} =$

$\sin(x-y) = -$

$\sin\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right) = 0 - (-1)\cdot 1 = 1$

$= 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta$

$\boxed{\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$

$\cos 2\beta\cdot 2\cdot\left(\frac{-1}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{8}{17}$

$\sin\pi + \sin\frac{\pi}{2} = 2\cdot\sin\frac{3\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{4}$

$\cos 2\beta = \frac{4\sqrt{17}}{17} \qquad 2\cos^2\beta = 1+\cos 2\beta$

$\cos^2\beta =$

$\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2} = 2\cdot\sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos 0$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{7}}$

$\cos 2\alpha \neq 0$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{7}$

$$\begin{cases} y \geq \frac{2}{3}x \\ 9y^2 - 12xy + 4x^2 = 3xy - 2x - 3y + 2 \quad (1) \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 \quad (2) \end{cases}$$

$(2) \Rightarrow 9x^2 + 9y^2 - 18x - 12y - 12 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (9x^2 - 18x + 9) + (9y^2 - 12y + 4) - 9 - 4 - 12 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - \frac{4}{3} + \frac{4}{9}) - \frac{25}{9} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-1)^2 + (y - \frac{2}{3})^2 = (\frac{5}{3})^2$

$(1) \Rightarrow 9y^2 - 15xy + 3x^2 + 2x + 3y - 2 = 0$

$x = 0 \quad 3y = \sqrt{-3y+2}$, $3y^2 - 4y = 4$ $\Rightarrow \begin{cases} y > 0 \\ 9y^2 + 3y - 2 = 0 \\ 3y^2 - 4y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} y > 0 \\ 3y + 12y - 2 + 12 = 0 \\ 9y^2 + 3y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y > 0 \\ 15y = 10 \\ 9y^2 + 3y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \cancel{y = \frac{2}{3}}$ · нет реш.

$9(\frac{y}{x})^2 - \frac{15y}{x} + 3 = \frac{2}{x^2} + \frac{3y}{x^2} + \frac{2}{x} \Rightarrow$

$(3(\frac{y}{x}))^2$

$9y^2 - 15xy + 3x^2 + 2x + 3y - 2 = 0$

$\cancel{y(9y - 9x + 3) + x(3x - 6y + 2) - 2}$

$9y^2 - 10xy + 3x^2 - 5xy + 2x + 3y - 2$

$(9y^2 - 15xy + \frac{25}{4}x^2) - \frac{13}{4}x^2 + 2x + 3y - 2$

$(9y^2 - 18xy + x^2) + 3x^2 + 3xy + 2x + 3y - 2$

$(3y - x)^2 + 3x(3x + 3y + 2) + (3y - 2)$

$9y^2 + 3x^2 = 15xy - 2x - 3y + 2 =$

$\cancel{y(18x - 3) - \frac{3}{2}(x+1)}$

$+1$

$\cancel{3y(5x}$

$3y(3y -$

$9y^2 - 12xy + 4x^2 = 3xy - 2x - 3y + 2$

$9y^2 - 15xy + 4x^2 = -2x - 3y - 2$

$3y(3y + 1) + 2x(2x + 1) = 15xy + 2$

$9y^2 - 15xy + 4x^2 + 2x + 3y - 2 = 0$

$\Rightarrow 9y^2 + 3y + \frac{1}{4} + 4x^2 + 2x + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 2 - 15xy$

$\Rightarrow (3y + \frac{1}{2})^2 + (2x + \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{2} + 15xy$

$-9x^2 - 9y^2 + 18x + 12y = 12$

$-2xy + 4x^2 - 9x^2 + 18x + 12y = 3xy - 2x - 3y + 2 + 12$

$-5x^2 + 20x + 15y - 15xy - 14 = 0$

$5x^2 - 20x - 15y + 15xy + 14 = 0$

$x^2 - 4x - 3y + 3xy + \frac{14}{5} = 0$

$4 = \frac{20}{5}$

$(x-2)^2 - \frac{20}{5} + \frac{14}{5} - 3y - 3xy = 0$

$(x-2)^2 - \frac{6}{5} - 3y - 3xy = 0$

$3y(-\frac{2}{5} - 1 - x)$

$(x-2)^2 = 3y(x + \frac{7}{5})$

$\sqrt{3y - 2x} \quad 3y - 2x = \sqrt{3y(x-1) - 2(x-1)} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3y - 2x = \sqrt{(x-1)(3y-2)} \Rightarrow$

ОДЗ $\Rightarrow (3y - 2x)^2 = (x-1)(3y-2)$

$$\begin{cases} (3y - 2x)^2 = (x-1)(3y-2) \\ (x-1)^2 + (y - \frac{2}{3})^2 = (\frac{5}{3})^2 \end{cases}$$

$3y - 2 = m$

$x - 1 = t$

$$\begin{cases} (m - 2t)^2 = mt \\ t^2 + \frac{1}{9}m^2 = \frac{25}{9} \\ m \geq 2t \end{cases}$$

$3y - 2x = 3y - 2 + 2 - 2x$

$3y - 2 + 2 - 2x + 2 - 2$

$m + 2 - 2t - 2 =$

$m - 2t$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$

$a^{\log_a b} = b$

$2^{\log_2 8 = 3} = 8$

ОДЗ: $x^2+6x > 0 \Rightarrow x > 0$, $x < -6$

$x^2+6x \neq 1$

$2^{\log_4 16}$ $16^{\log_4 2} \Rightarrow 2^2$ $16^{\frac{1}{2}}$.

$\overset{ОДЗ}{\Rightarrow} 3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5} - x^2$

$\Rightarrow x^2+6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5} - 3^{\log_4(x^2+6x)} \Rightarrow$ $x^2+6x = t, t > 0$

$\Rightarrow t \geq t^{\log_4 5} - 3^{\log_4 t} \Leftrightarrow$

$\Rightarrow t + 3^{\log_4 t} \geq t^{\log_4 5} \Rightarrow 4^{\log_4 t} + 3^{\log_4 t} \geq t^{\log_4 5} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4^{\log_4 t} + 3^{\log_4 t} \geq 4^{\log_4(t^{\log_4 5})} \Rightarrow 4^{\log_4 t} + 4^{\log_4(3\log_4 t)} \geq 4^{\log_4(t^{\log_4 5})}$

$\Leftrightarrow$

$t \geq t^{\log_4 5} - 3^{\log_4 t} \Rightarrow t \geq 5^{\log_4 t} - 3^{\log_4 t}$

$2^{\log_4 16} = 2^2 = 4$

$16^{\log_4 2}$, $16^{\frac{1}{2}} = 4$

$27^{\log_3 81} = 27^4 = (3^3)^4$

$81^{\log_3 27} = 81^3 = (3^4)^3$

$t > 0, t \neq 1$

• $t \in (0;1)$

$t \geq 0$

$\log_4 t < 0$, $5 > 3$ $\Rightarrow 5^{\log_4 t} - 3^{\log_4 t} < 0$ $\Rightarrow$ ист $\forall t$

$\frac{1}{25} - \frac{1}{58}$

• $t \in (1; +\infty)$

$\log_4 t > 0 \Rightarrow 5^{\log_4 t} - 3^{\log_4 t} > 0$

$\log_4 t = m$

$4^m \geq 5^m - 3^m$ $m = \log_4 t$ $t = 4^m$

$3 = \log_2 8$ $8 = 2^3$

(?) m $3^m + 4^m \geq 5^m$ $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, т.к. $t \neq 1$

$f(m) = 3^m + 4^m - 5^m$

$f'(m) = e^m \cdot \ln 3 + e^m \cdot \ln 4 - e^m \cdot \ln 5 =$ $k > 0$

$= e^m(\ln 3 + \ln 4 - \ln 5) \geq 0$ $g(k) = \ln k + \ln(k+1) - \ln(k+2)$

$\forall m$ $e^m > 0$, $\ln 3 + \ln 4 - \ln 5 > 0$

$g'(k) = \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} =$

$= \frac{k^2+3k+2+k^2+2k-k^2-k}{k(k+1)(k+2)} =$

$= \frac{k^2+4k}{k(k+1)(k+2)}$ $\forall k > 0$

$\ln 1 = 0$.

$m = -1$

$\frac{1}{4} + \frac{1}{3} \geq \frac{1}{5}$

$15 + 20 \geq 12$ - ист $\Rightarrow \forall m$ $f(m) \uparrow$

$m = 2$ при $m = 1$ $3 + 4 \geq 5$

$4^2 + 3^2 = 5^2$ - ист

$m = 3$ $27 + 64 \geq 125$ - ложь

$64 + 27 \geq 155$ - ложь $(a^x)' = e^x \cdot \ln a$

-3 ± 5

$4 + 1$

$64 - 48$

$x = -3 \pm \sqrt{9+16}$

$x^2 + 6x - 16 \geq 0$

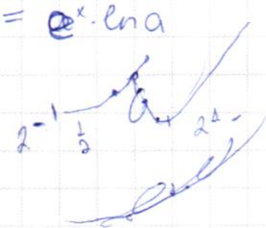
$x^2 + 6x$

$x(x+6) > 0$

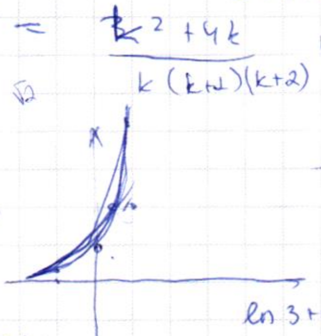
$= 3^0 \neq 1$

$3^{\log_4 3}$

$1 \geq 1 - 1$



2^{-1} $\frac{1}{2}$ 2^1



4^x 2^x

$\ln 3 + \ln 4 - \ln 5 =$

$= \ln \frac{12}{5} = \ln \frac{24}{10}$

$\frac{24}{10} < e$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)