МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}, \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3y-2x)^2=3xy-2x-3y+2 \quad (1) \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \quad (2) \\ 3y\geq 2x \quad ; \cancel{y\geq\frac{2}{3}x} \quad x\leq\frac{3}{2}y \quad \frac{3}{2}y-x\geq 0 \end{cases}$$

(1) $9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2$

$4x^2+x(2-15y)+9y^2+3y-2=0$

Решим ур-е отн. x.

$D=(2-15y)^2-16(9y^2+3y-2)=225y^2-60y+4-$

$-144y^2-48y+32=81y^2-108y+36=(9y-6)^2\geq 0$

$x_1=\frac{15y-2+9y-6}{8}=3y-1$

$x_2=\frac{15y-2-9y+6}{8}=\frac{6y+4}{8}=\frac{3y+2}{4}$

~~(2)~~ Подставим x_1 ~~и x_2~~ во 2-е:

$3(3y-1)^2+3y^2-6(3y-1)-4y-4=0$

$3\cdot 9y^2-3\cdot 6y+3+3y^2-18y+6-4y-4=0$

$30y^2-\cancel{36}\,40y+5=0$

~~$D_1=20^2-32\cdot 5=400-160=$~~

$6y^2-8y+1=0$

$D_1=16-6=10$

$y_1=\frac{4+\sqrt{10}}{6} \Rightarrow x_1=\frac{4+\sqrt{10}}{2}-1=\frac{2+\sqrt{10}}{2}$

$y_2=\frac{4-\sqrt{10}}{6} \Rightarrow x_2=\frac{4-\sqrt{10}}{2}-1=\frac{2-\sqrt{10}}{2}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Проверим эти две пары.

$\frac{3}{2}y_1 = \frac{4+\sqrt{10}}{4}$

$\frac{3}{2}y_1 - x_1 = \frac{4+\sqrt{10}}{4} - \frac{2+\sqrt{10}}{2} = \frac{4+\sqrt{10}-4-2\sqrt{10}}{4} < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1$ и y_1 не явл. реш-м

$\frac{3}{2}y_2 = \frac{4-\sqrt{10}}{4}$

$\frac{3}{2}y_2 - x_2 = \frac{4-\sqrt{10}}{4} - \frac{2-\sqrt{10}}{2} = \frac{4-\sqrt{10}-4+2\sqrt{10}}{4} > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_2$ и y_2 явл. реш-м.

Подставим x_2 во 2-е:

$3\left(\frac{3y+2}{4}\right)^2 + 3y^2 - 6\left(\frac{3y+2}{4}\right) - 4y - 4 = 0$

$\frac{3}{16}(9y^2+12y+4) + 3y^2 - \frac{3}{2}(3y+2) - 4y - 4 = 0 \mid \cdot 16$

$3(9y^2+12y+4) + 48y^2 - 24(3y+2) - 64y - 64 = 0$

$27y^2 + 36y + 12 + 48y^2 - 72y - 48 - 64y - 64 = 0$

$75y^2 - 100y - 100 = 0$

$3y^2 - 4y - 4 = 0$

$D_1 = 4 + 12 = 16$

$y_3 = \frac{2+4}{3} = 2 \Rightarrow x_3 = \frac{3\cdot 2+2}{4} = 2$

$y_4 = \frac{2-4}{3} = -\frac{2}{3} \Rightarrow x_4 = \frac{-2+2}{4} = 0$

Проверим эти две пары.

$\frac{3}{2}y_3 = 3$

$\frac{3}{2}y_3 - x_3 = 3 - 2 = 1 > 0 \Rightarrow x_3$ и y_3 явл. реш-м

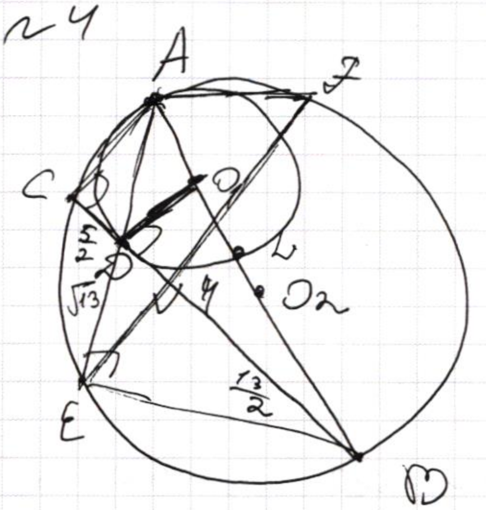
$\frac{3}{2}y_4 = -1$

$\frac{3}{2}y_4 - x_4 = -1 - 0 < 0 \Rightarrow x_4$ и y_4 не явл. реш-м.

Ответ: $\left(\frac{2-\sqrt{10}}{2}; \frac{4-\sqrt{10}}{6}\right), (2; 2)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



1) Пусть O_1 - центр. окр-ти ω, O_2 - центр окр-ти Ω. По св-ву кас-ся внут. обр-ие окр-й A, O_1, O_2 и B лежат на одной прямой.

2) Пусть $AO_1 = O_1D = r$ (рад. ω), $AO_2 = O_2B = R$ (рад. Ω), $r, R > 0$

По теореме о квадрате кас-й:

$BD^2 = AB \cdot BL$ (AL - диаметр ω)

$\frac{169}{4} = 2R \cdot (2R - 2r)$ (1)

3) По св-ву кас-й $O_1D \perp BC$ и $O_1D = r$.

т.к. AB - диам-р, а $\angle ACB$ - впис-й для Ω, то $\angle ACB = 90°$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~$\frac{O_1D}{O_1B} = \frac{AC}{AB} = \frac{BD \cdot LB}{}$~~ ~~$\frac{BD}{O_1B}$~~

$\frac{BD}{BO_1} = \frac{BC}{AB} = \cos\angle B$

$\frac{13}{2(2R - r)} = \frac{9}{2R}$

$26R = 36R - 18r \quad 10R = 18r \quad R = \frac{9}{5}r$ (2)

Подставим (2) в (1):

$$\frac{169}{4} = \frac{13}{5}r \cdot \left(\frac{13}{5}r - 2r\right)$$

$$\left(\frac{13}{2}\right)^2 = \frac{18}{5}r \cdot \frac{8}{5}r$$

$$\left(\frac{13}{2}\right)^2 = \frac{3^2 \cdot 4^2}{5^2} r^2$$

$$\left(\frac{13}{2}\right)^2 = \left(\frac{12r}{5}\right)^2$$

$$\frac{13}{2} = \frac{12r}{5}$$

$$r = \frac{65}{24}$$

$$R = \frac{9}{5} \cdot \frac{65}{24} = \frac{3 \cdot 13}{8} = \frac{39}{8}$$

4) п/у $\triangle DO_1B$ и $\triangle CAB$ ~ по 2-м уг. =>

$$\frac{O_1D}{BD} = \frac{AC}{BC}$$

$$\frac{65}{24} : \frac{13}{2} = \frac{AC}{9}$$

$$\frac{5}{12} = \frac{AC}{9}$$

$$AC = \frac{45}{12} = \frac{15}{4}$$

5) $\triangle ACD$ – п/у. По т. Пифагора:

$$AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{\left(\frac{15}{4}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{225}{16} + \frac{25}{4}} = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{9}{4}+1} =$$

$$= \frac{5}{4}\sqrt{13}$$

6) По св-ву отр-в перес-ся хорд:

$$AD \cdot DE = BD \cdot DC$$

$$\frac{5}{4}\sqrt{13} \cdot DE = \frac{65}{4}$$

$$DE = \sqrt{13} \Rightarrow AE = \frac{9}{4}\sqrt{13}$$

7) По сл-ю из т. синусов ($\triangle AFE$):

$$\frac{AE}{\sin\angle AFE} = 2R \;;\; \sin\angle AFE = \frac{\frac{9}{4}\sqrt{13}}{\frac{39}{4}} = \frac{9\sqrt{13}}{39} =$$

$$= \frac{3\sqrt{13}}{13}. \; \angle AFE = \arcsin\left(\frac{3\sqrt{13}}{13}\right).$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

8) $\triangle DEB$ – п/у, т. к. $\angle AEB$ впис. и опир. на диаметр.

Пусть $EF \cap BC = H$. По усл. $EH \perp BC$.

По т. Пифагора:

$BE = \sqrt{BD^2 - DE^2} = \sqrt{\frac{169}{4} - 13} = \sqrt{\frac{169 - 13\cdot 4}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{13}$

9) $EH = \frac{ED \cdot BE}{BD}$ (по св-ву п/у $\triangle$) $=$

$= \frac{\sqrt{13} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{13}}{\frac{13}{2}} = 3$.

10) $\triangle DHE$. По т. Пифагора $DH =$

$= \sqrt{DE^2 - EH^2} = 2$.

$BH = BD - DH = \frac{13}{2} - 2 = \frac{9}{2}$

$CH = CD + DH = \frac{9}{2}$

$BH = CH \Rightarrow EF$ – диаметр $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle EAF = 90^\circ \Rightarrow EF = AB = \frac{39}{4}$

11) $\triangle AFE$. По т. Пифагора:

$AF = \sqrt{EF^2 - AE^2} = \sqrt{\left(\frac{39}{4}\right)^2 - \frac{9^2 \cdot 13}{4^2}} =$

$= \sqrt{\frac{13^2 \cdot 9 - 9^2 \cdot 13}{4^2}} = \sqrt{\frac{13 \cdot 9 \cdot 4}{4^2}} = \sqrt{\frac{13 \cdot 9}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{13}$

12) $S\triangle EAF = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot AF = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{4}\sqrt{13} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{13} =$

$= \frac{27}{16} \cdot 13 = \frac{351}{16}$

Ответ: $r = \frac{65}{24}$, $R = \frac{39}{8}$, $\angle AFE = \arcsin\left(\frac{3\sqrt{13}}{13}\right)$, $S\triangle AEF = \frac{351}{16}$.

Найдём, для каких x $f(x)$ однозначно определено.

$f(1)=f(1)+f(1) \Rightarrow f(1)=0$

Простые:

$f(2)=0$, $f(3)=0$, $f(5)=1$, $f(7)=1$, $f(11)=2$, $f(13)=3$, $f(17)=4$, $f(19)=4$, $f(23)=5$. Для $p\geq 29$ (p – простое) не нужно искать $f(p)$, т.к. $x\in[3;27]$ и $y\in[3;27]$.

~~$f(2)= f(1)+f$~~

$f(1)=f(2)+f(\frac{1}{2})$, $f(\frac{1}{2})=0$

$f(\frac{1}{2})=f(2)+f(\frac{1}{4}) \Rightarrow f(\frac{1}{4})=0$

$f(\frac{1}{8})=0$

$f(1)=f(3)+f(\frac{1}{3}) \Rightarrow f(\frac{1}{3})=0$

$\ldots$ $f(\frac{1}{9})=0$

~~Для всех $x/y=1$ $f(x/y)=0$~~

Для всех чисел $[3;27]$ из простых чисел можно опр-ть $f(x)$ (через разл-е на пр-е множители).

$f(4)=0$, $f(6)=0$, $f(8)=0$, $f(9)=0$, $f(10)=1$, $f(12)=0$, $f(14)=1$, $f(15)=1$, $f(16)=0$, $f(18)=0$, $f(20)=0$, $f(21)=1$, $f(22)=2$, $f(24)=0$, $f(25)=2$, $f(26)=3$, $f(27)=0$.

А $f(\frac{1}{y})$ можно найти след. обр-м.

$f(1)=f(y)+f(\frac{1}{y})=0$

$f(\frac{1}{3})=0$, $f(\frac{1}{4})=0$, $f(\frac{1}{5})=-1$, $f(\frac{1}{6})=0$, $f(\frac{1}{7})=-1$, $f(\frac{1}{8})=0$, $f(\frac{1}{9})=0$, $f(\frac{1}{10})=-1$,

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(\frac{1}{11}) = -2$, $f(\frac{1}{12}) = 0$, $f(\frac{1}{13}) = -3$, $f(\frac{1}{14}) = -1$, $f(\frac{1}{15}) = -1$, $f(\frac{1}{16}) = 0$, $f(\frac{1}{17}) = -4$, $f(\frac{1}{18}) = 0$, $f(\frac{1}{19}) = -4$, $f(\frac{1}{20}) = 0$, $f(\frac{1}{21}) = -1$, $f(\frac{1}{22}) = -2$, $f(\frac{1}{23}) = -5$, $f(\frac{1}{24}) = 0$, $f(\frac{1}{25}) = -2$, $f(\frac{1}{26}) = -3$, $f(\frac{1}{27}) = 0$.

в группе x (числитель $\frac{x}{y}$). ~~цифр~~ зн-й

Кол-во 0 среди $x \in [3; 27]$:

11 нулей

6 единиц

3 двойки

2 тройки

2 четвёрки

1 пятёрка $\quad f(\frac{1}{y})$

Кол-во зн-й среди $y \in [3; 27]$

11 нулей

6 : -1

3 : -2

2 : -3

2 : -4

1 : -5

Чтобы $f(\frac{x}{y}) < 0$, нужно, чтобы $f(x) + f(\frac{1}{y}) < 0$, т.е. $|f(x) + f(\frac{1}{y})| \geq 1$

11 нулей · 14 цифр + 6 ед. · 8 цифр +
+ 3 двойки · 5 цифр + 2 тройки · 3 цифр +
+ 2 четвёрки · 1 цифру (цифра-число возм. зн-й).

$11 \cdot 14 + 6 \cdot 8 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 154 + 48 + 15 +$
$+ 6 + 2 =$ ~~169+6+~~ $169 + 6 + 50 = 175 + 50 = 225.$

Ответ: 225.

~~№1~~

~~$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot$~~
~~$\cdot\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$~~

~~$\cos 2\beta = -\frac{4}{17} : \left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$~~

~~$\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}} \qquad \sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$~~

~~Пусть $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$~~

~~$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\beta \cdot \sin 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$~~

~~$4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$~~

~~$\frac{1}{\sqrt{17}}(4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha) = -1$~~

~~$\sin 2\alpha, \cos 2\alpha \in [-1; 1]$~~

~~$-4 \le 4\sin 2\alpha \le 4$~~

~~$-5 \le 4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha \le 5$~~

~~$4\sin 2\alpha = -\cos 2\alpha - 1$~~

№3

$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \ge |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$

Замена: $t = x^2+6x$, $t > 0$ (ар-т логарифма). $|t| = t$

$3^{\log_4 t} + t \ge t^{\log_4 5} \qquad 3^{\log_4 t} = t^{\log_4 3}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$t^{\log_4 3} + t \geq t^{\log_4 5}$

$t \geq t^{\log_4 5} - t^{\log_4 3}$

$y = a^u$ ↓, если $a \in (0;1)$ и ↑, если $a \in (1;+\infty)$

Если $t \in (0;1)$, то $t^{\log_4 5} - t^{\log_4 3} < 0$, т.к. $y = \log_4 u$ ↗ $\Rightarrow \log_4 5 > \log_4 3$, и $t \in (0;1) \Rightarrow$ для $\forall t \in (0;1)$ нер-во вып.

Если $t = 1$, то $1 + 1 \geq 1$ – верно.

Если $t > 1$:

$t^{\log_4 5} - t^{\log_4 3} = t(t^{\log_4 \frac{5}{4}} - t^{\log_4 \frac{3}{4}})$

$t \geq t(t^{\log_4 \frac{5}{4}} - t^{\log_4 \frac{3}{4}})$

$1 \geq t^{\log_4 \frac{5}{4}} - t^{\log_4 \frac{3}{4}}$ – не вып. в силу роста ф-ции

$\begin{cases} x^2 + 6x > 0 \\ x^2 + 6x \leq 1 \end{cases}$ $\qquad x^2 + 6x - 1 \leq 0 \quad D = 9 + 1$

~~$\begin{cases} x \in (-\infty; -6) \cup (0; +\infty) \\ x \in (-\infty; -3-\sqrt{2}) \cup (\quad x \in [-3-\sqrt{2}; -3+\sqrt{2}] \end{cases}$~~

~~$1 < \sqrt{2} < 2$ $\qquad -2 < -\sqrt{2} < -1$~~ $\qquad 3 < \sqrt{10} < 4$

~~$-2 < -3+\sqrt{2} < -1$ $\qquad -5 < -3-\sqrt{2} < -4$~~ $\qquad 0 < -3+\sqrt{10} < 1$

$-4 < -\sqrt{10} < -3$

$-7 < -3-\sqrt{10} < -6$

$\begin{cases} x \in (-\infty; -6) \cup (0; +\infty) \\ x \in [-3-\sqrt{10}; -3+\sqrt{10}] \end{cases} \Rightarrow$

~~$-6 \quad -3-\sqrt{10} \quad 0 \quad -3+\sqrt{10}$~~

$\Rightarrow x \in [-3-\sqrt{10}; -6) \cup (0; -3+\sqrt{10}]$

Ответ: $[-3-\sqrt{10}; -6) \cup (0; -3+\sqrt{10}]$.

№1

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta =$
$= -\frac{3}{17}$

$\cos 2\beta = -\frac{3}{17} : \left(-\frac{2}{\sqrt{17}}\right) = \frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2$

$9y^2-15xy+4x^2+2x+3y-2=0$

Отн. x:

$$\begin{array}{r}225\\-144\\\hline 81\end{array}$$

$4x^2+x(2-15y)+9y^2+3y-2=0$

$D=(15y-2)^2-16(9y^2+3y-2)=225y^2-60y+$
$+4-144y^2-48y+32=81y^2-108y+36=$
$=(9y-6)^2$

$9\cdot 8$

$x_1=\dfrac{15y-2+9y-6}{16}=\dfrac{24y-8}{16}=\dfrac{3y-1}{2}$

$x_2=\dfrac{15y-2-9y+6}{16}=\dfrac{6y+4}{16}=\dfrac{3y+2}{8}$

$3y\geq 2x$

$$\begin{cases}\dfrac{169}{4}=2R\cdot(2R-2r)\\ \dfrac{13}{2(2R-r)}=\dfrac{9}{2R}\end{cases}$$

$26R=9(4R-2r)$

$26R=36R-18r$

$10R=18r$

$R=\dfrac{9}{5}r$

$\dfrac{169}{4}=\dfrac{18}{5}r\left(\dfrac{18}{5}r-2r\right)$

$\dfrac{169}{4}=\dfrac{18}{5}r\cdot\dfrac{8}{5}r$

$\dfrac{169}{4}=\dfrac{9\cdot16}{25}r$ $\quad\left(\dfrac{13}{2}\right)^2=\left(\dfrac{12}{5}r\right)^2$

$\dfrac{13}{2}=\dfrac{12}{5}r$

$r=\dfrac{65}{24}$

$R=\dfrac{9}{5}\cdot\dfrac{65}{24}=\dfrac{3\cdot13}{8}=$
$=\dfrac{39}{8}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$t=x^2+6x$

$3^{\log_4 t}+t\geq t^{\log_4 5}$

$t^{\log_4 3}+t\geq t^{\log_4 5}$

$3^{\log_4 t}=t^{\log_t 3 \log_4 t}=t^{\log_4 3}$

$t^{\log_4 3}+t^{\log_4 4}\geq t^{\log_4 5}$

$t^{\log_4 3}+t^{\log_4 4}\geq t^{\log_4 3}\cdot t^{\log_4 \frac{5}{3}}$

$x\in(-\infty;-6)\cup(0;+\infty)$

$t\in(0;1)$

$t\geq t^{\log_4 5}-t^{\log_4 3}$

$t^{\log_4 5}-t^{\log_4 3}=t\left(t^{\log_4 \frac{5}{4}}-t^{\log_4 \frac{3}{4}}\right)$

$1\geq t^{\log_4 \frac{5}{4}}-t^{\log_4 \frac{3}{4}}$

$2\ 4^{\log_4 3\cdot\frac{1}{2}}$ $\quad\sqrt{3}+2\geq\sqrt{5}$ $\quad 2\geq\sqrt{5}-\sqrt{3}$

$t\geq t^{\log_4 5}-t^{\log_4 3}$ $\quad 4\geq 5-\sqrt{15}+3$

$t\in(0;1]$ — вып. $\quad\sqrt{15}\geq 4$

$t\ \ t^{\log_4 5}-t-t^{\log_4 3}$

$2^4-2^3-2^2\geq 0$

$$\begin{array}{r} 27\\ \times\ 13\\ \hline 81\\ 27\ \\ \hline 351\end{array}$$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot$
$\cdot\cos 2\beta$

$-2\cdot\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$

$\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\beta = \frac{4}{17}$

$\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}+\cos 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad 4\sin 2\alpha+\cos 2\alpha = 1$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+x^2+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}$

$t=x^2+6x>0$

$3^{\log_4 t}+t\geq t^{\log_4 5}$

$\cancel{3^{\log_4 t}+t\geq t^{\log_4 t}}$

$t^{\log_4 3}+t\geq t^{\log_4 5}$ $\quad t^{\log_4 3}+t-t^{\log_4 5}\geq 0$

$\cancel{t^{\log_4 3}+t-t^{\log_4 5}\geq 0}$

$\cancel{t^{\log_4 3}+t^{\log_4 4}-t^{\log_4 5}\geq 0}$

$$\begin{cases} 9y^2-12xy+4x^2 = 3xy-2x-3y+2 \\ 3x^2-6x+3+3y^2-4y-4=0 \\ 3y-2x\geq 0 \end{cases}$$

$(3y-2x)^2 = 3y(x-1)-2(x-1)$

$(3y-2x)^2 = (x-1)(3y-2)$

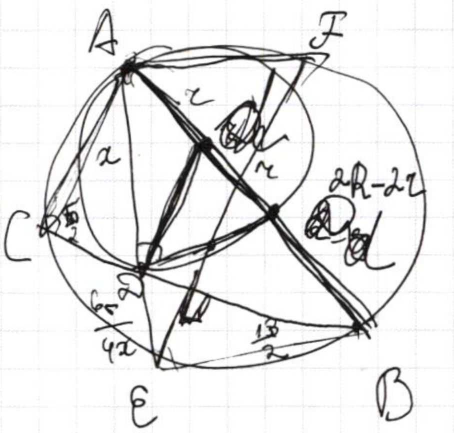
$3x^2-6x+3y^2-4y-4=0$

$D_1 = 9-9y^2+12y+12 = -9y^2+12y-4+25 = -(3y-2)^2+5^2$

$3y^2-4y+3x^2-6x-4=0$ $\quad D_1 = 4-9x^2+18x-12$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)



$AD(AE-AD)$

$\frac{13}{2} : (D + \frac{d}{2}) = 9 : D$

$BC = 9$

$\left(\frac{13}{2}\right)^2 = D \cdot (D - d)$

$AD \cdot DE = \frac{13 \cdot 5}{4}$

$\frac{169}{4} = D^2 - Dd$

$\frac{169}{4} + \frac{d^2}{4} = (D + \frac{d}{2})^2$

$\frac{r}{R} = \frac{AD}{AE}$

$\frac{169}{4} = D^2 - Dd$

$\frac{R}{r} = \frac{AE}{AD} = \frac{AD + DE}{AD} = 1 + \frac{DE}{AD}$

$f(2) = 0$

$f(3) = 0$

$f(5) = 1$

$f(7) = 1$

$f(11) = 2$

$f(13) = 3$

$f(17) = 4$

$f(19) = 5$

$f(23) = 5$

$f(1) = 0$

~~$f(\frac{1}{2}) + f(2) =$~~

$f(\frac{1}{3}) + f(3) = 0$

~~$f(\frac{1}{5}) + f(5) = 0$~~

$f(\frac{1}{2}) = 0$

$3y = \sqrt{3y+2}$

$3y^2 - 4y - 4 = 0$

$y = \frac{2+4}{3} = 2 \quad y =$

$3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y - 4 = 0$

Отн. x:

$D_1 = 9 - 9y^2 + 12y + 12 = -9y^2 + 12y + 21 = -(3y-2)^2 + 5^2$

Отн. y:

$D_1 = 4 - 9x^2 + 18x + 12 = -9x^2 + 18x + 16 = -9x^2 + 18x - 9 + 25 = -(3x-3)^2 + 5^2$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)