МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 $\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17} \end{cases}$ $\quad tg\alpha - ?$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\cdot\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\cdot\cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2} = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{17}$; $\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\beta = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

1) при $\sin 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$ и $\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\frac{1}{\sqrt{17}} + \frac{4}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = -1$

$2\sin\alpha\cos\alpha + 4\cos^2\alpha - 4\sin^2\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 0$

$-3\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + 5\cos^2\alpha = 0 \quad : \cos^2\alpha$

$-3tg^2\alpha + 2tg\alpha + 5 = 0$

пусть $tg\alpha = t$

$-3t^2 + 2t + 5 = 0$

$D_1 = 1+15 = 16$

$t_{1,2} = \frac{1\pm 4}{3} = \frac{5}{3}; -1 \qquad tg\alpha = \frac{5}{3}$; $tg\alpha = -1$

2) при $\sin 2\beta = \frac{-4}{\sqrt{17}}$ и $\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\frac{1}{\sqrt{17}} - \frac{4}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha - 4\cos 2\alpha = -1$

$5\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - 3\cos^2\alpha = 0 \qquad 5tg^2\alpha + 2tg\alpha - 3 = 0$

пусть $tg\alpha = t$

$5t^2 + 2t - 3 = 0$

$D_1 = 1+15 = 16$

$t_{1,2} = \frac{-1\pm 4}{5} = \frac{3}{5}; -1 \qquad tg\alpha = \frac{3}{5}$; $tg\alpha = -1$

Ответ: -1 ; $\frac{3}{5}$; $\frac{5}{3}$

№3 $|x^2-26x|^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + 13^{\log_5(26x-x^2)}$

Т.к. $26x - x^2 > 0$, то при $x \in (0;26)$ $|x^2-26x|$ имеет вид. $(26-x^2)$.

Тогда: $(26x-x^2)^{\log_5 12} + 26x - x^2 - 13^{\log_5(26x-x^2)} \geq 0$

пусть $26x-x^2 = t$, $t\in(0;1)\cup(1;26)$

$t^{\log_5 12} + t - 13^{\log_5 t} \geq 0$.

$t^{\log_5 12} + t - t^{\log_5 13} \geq 0$.

$12^{\log_5 t} + 5^{\log_5 t} - 13^{\log_5 t} \geq 0$

$12^{\log_5 t} + 5^{\log_5 t} \geq 13^{\log_5 t}$

~~пусть~~ $\cancel{\log_5 t = n}$.

$\cancel{12^n + 5^n \geq 13^n}$

$12^{\log_5 t} + 5^{\log_5 t} - 13^{\log_5 t} = 0$.

$t = 25$ $\quad t\in(0;1)\cup(1;25]$

$1 > 26x - x^2 > 0$ $\quad x^2-26x+1>0$.

$D_1 = 13^2 - 1 = 14\cdot12 = 4\cdot3\cdot14$.

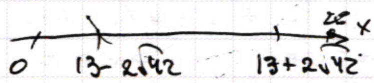
$x_{12} = 13\pm2\sqrt{42}$

$25 \geq 26x - x^2 > 1$

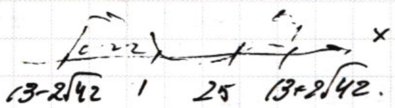
$x^2 - 26x + 25 \geq 0$

$D_1 = 13^2 - 25 = 18\cdot8 = 9\cdot16$

$x_{12} = \frac{13\pm12}{1} = 1;25$



$x\in(0;13-2\sqrt{42})\cup(13+2\sqrt{42};26)$.



$x\in(0;13-2\sqrt{42})\cup(13-2\sqrt{42};1]\cup[25;13+2\sqrt{42})\cup(13+2\sqrt{42};26)$

Ответ: $(0;13-2\sqrt{42})\cup(13-2\sqrt{42};1]\cup[25;13+2\sqrt{42})\cup(13+2\sqrt{42};26)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 $\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$

Возведу первое уравнение во 2 степень.

$(y-6x)^2=\sqrt{xy-6x-y+6}^{\,2}$

$y^2-12xy+36x^2=xy-6x-y+6$

$y^2-13xy+y+36x^2+6x-6=0$

$y^2+y(1-13x)+36x^2+6x-6=0$

Решу квадратное уравнение относительно y

$D=(1-13x)^2-4(36x^2+6x-6)=1-26x+169x^2-144x^2-24x+24=$

$=25-50+25x^2=25(x-1)^2$

$y_{12}=\frac{13x-1\pm5(x-1)}{2}=9x-1;\ 4x$

$\begin{cases}(y-4x)(y-9x+1)=0\\ y-6x\ge0\\ (x-1)(y-6)\ge0\\ 9x^2+y^2-18x-12y=45\end{cases}$

$y^2-12y+9x^2-18x-45=0.$

$D_1=36-9x^2+18x+45=$

$=-9x^2+18x+81=-9(x-1)^2+90$

$y_{12}=6\pm\sqrt{90-9(x-1)^2}$

$y_{12}=6\pm3\sqrt{10-(x-1)^2}$

$\begin{cases}(y-4x)(y-9x+1)=0\\ \left(y-6-3\sqrt{10-(x-1)^2}\right)\left(y-6+3\sqrt{10-(x-1)^2}\right)=0\\ y-6x\ge0\\ (x-1)(y-6)\ge0\end{cases}$

1) $y=4x$

$9x^2+16x^2-18x-48x-45=0$

$25x^2-66x-45=0$

$D_1=33^2+45\cdot25=$

$x_{12}=\frac{33\pm\sqrt{2214}}{25}$ y.

2) $y=9x-1$

$9x^2+(9x-1)^2-18x-12(9x-1)=45$

$9x^2+81x^2-18x+1-18x-108x+12=45$

$100x^2-144x-32=0.$

$D_1=72^2+32\cdot100=$

$x_{12}=\frac{19\pm\sqrt{561}}{25}$

1) $y=4x$

$\left(\frac{33\pm\sqrt{2214}}{25};\ 4\left(\frac{33\pm\sqrt{2214}}{25}\right)\right)$

2) $y=9x-1$

$\left(\frac{19\pm\sqrt{561}}{25};\ 9\left(\frac{19\pm\sqrt{561}}{25}\right)-1\right).$

$\left(\frac{33-\sqrt{2214}}{25};\ 4\left(\frac{33-\sqrt{2214}}{25}\right)\right)$

$\left(\frac{19+\sqrt{561}}{25};\ 9\left(\frac{19+\sqrt{561}}{25}\right)-1\right)$

Ответ: $\left(\frac{33-\sqrt{2214}}{25};\ \frac{132-4\sqrt{2214}}{25}\right)$; $\left(\frac{19+\sqrt{561}}{25};\ \frac{146+9\sqrt{561}}{25}\right)$

№6. $\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \geq 18x^2-51x+28$

$x \in \left(\frac{2}{3}; 2\right]$

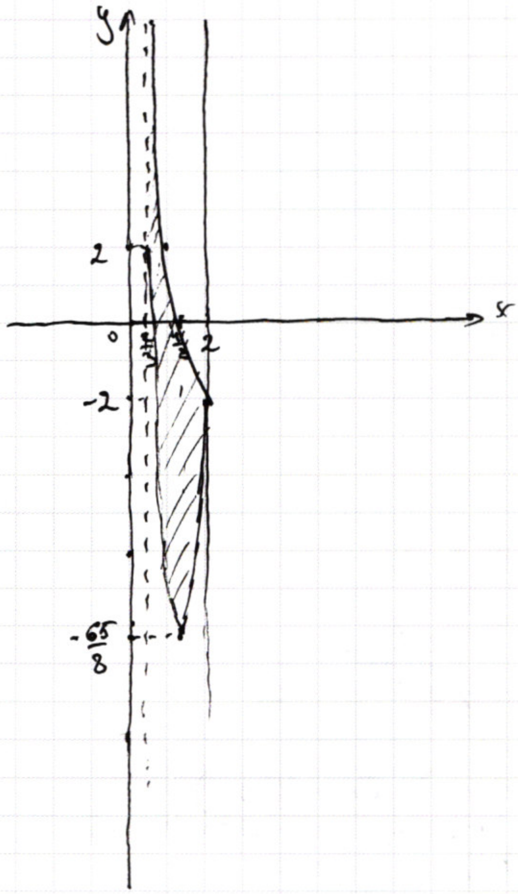
$\begin{cases} \frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \\ ax+b \geq 18x^2-51x+28. \end{cases}$

$y = \frac{8-6x}{3x-2}$

$y = ax+b$

$y = 18x^2-51x+28.$

$x_B = \frac{17}{12}$; $y_B = -\frac{65}{8}.$



Таким образом необходимая нам область, где выполняется

$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \geq 18x^2-51x+28.$

находится между огранич. граф (заштрихованая область)

Но при этом подходит прямая, проход. через точки $\left(\frac{2}{3}; 2\right)$ и $(2; -2)$ ~~и также прямые~~, пересек. $x = \frac{2}{3}$ и проход. через $(2; -2)$, но ниже $y = \frac{8-6x}{3x-2}$

$\begin{cases} 2 = \frac{2}{3}a + b \\ -2 = 2a + b \end{cases}$ $a = -3$, $b = 4$

$y = -3x+4.$ - эта прямая также ~~явл.~~

пересек. ~~касат. к $y = \frac{8-6x}{3x-2}$~~ $y = \frac{8-6x}{3x-2}$ в $\left(\frac{4}{3}; 0\right)$

Значит $y = -3x+4$ пересек. $y = \frac{8-6x}{3x-2}$ в двух точках при предельном случае. т.е. это единств. решение.

Ответ: $(-3; 4)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 4
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.

Дано:

Окр. $\Omega(O_1; R_1)$

Окр $\omega(O_2; R_2)$

$AB = 2R_1$

$BC \perp DO_2$

$EF \perp BC$

$CD = 12$

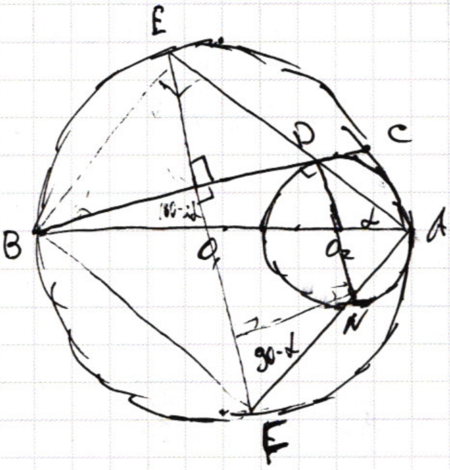
$BD = 13$

$R_1 - ?$ $R_2 - ?$

$\angle AFE - ?$

$S_{AEF} - ?$

Решение:



1). $\triangle BCA$ - прямоуг, т.к впис. $\angle BCA$ опир на диаметр AB

$\triangle BDO_2 \backsim \triangle ABC$

$\angle B$ - общий, $\angle BDO_2 = \angle BCA$

$$\frac{BD}{BC} = \frac{BO_2}{BA}$$

$$\frac{13}{25} = \frac{2R_1 - R_2}{2R_1}$$

$$\frac{12}{25} = \frac{R_2}{2R_1}$$

$$\frac{24}{25} = \frac{R_2}{R_1}$$

$AC = \sqrt{4R_1^2 - 25^2}$ - по т. Пифагора пусть $R_2 = 24x$, $R_1 = 25x$

$$\frac{R_2}{\sqrt{4R_1^2 - 25^2}} = \frac{\cancel{12}}{25}\ \frac{13}{25}$$

$$\frac{24x}{25\sqrt{4x^2-1}} = \frac{13}{25} \qquad 24x = 13\sqrt{4x^2-1}$$

$$x = \frac{13}{10}. \qquad R_2 = \frac{12\cdot 13}{5} = \frac{156}{5}$$

$$R_1 = \frac{65}{2}$$

Т.к. $EF \perp BC$, а $BC \perp O_2D$, то $EF \parallel O_2D$.

Т.к. EF - диаметр Ω, т.к. BC - хорда, явл. касат. к. ω, в кот. $\angle NAD$ - впис., коэф. под. окр. $\frac{13}{10}$.

Т.к. $EF \perp BC$, ~~то~~ AE - луч, провед. в. точку кас, то $\angle EAF = 90°$

Ответ: $R_1 = \frac{65}{2}$, $R_2 = \frac{156}{5}$

№5 $f(ab) = f(a) + f(b)$.

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

$x \in [4; 28]$ $\quad x, y \in N$

$y \in [4; 28]$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$f(ab) = f(a) + f(b)$.

$\cancel{f(ab) = \left[\frac{a}{4}\right] + \left[\frac{b}{4}\right]}$ $\quad \cancel{f(xy) = \left[\frac{x}{4}\right] + \left[\frac{y}{4}\right]}$

$\cancel{f\left(\frac{x}{y}\right) =}$ $\quad \cancel{f(x)}$

$f(ab) = \left[\frac{ab}{4}\right]$

$f(xy) = \left[\frac{x}{4} + \frac{y}{4}\right]$

$f(xy) = f(x) + f(y)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$. $\quad f\left(\frac{x}{y}\right) = \left[\frac{x}{4y}\right]$

при допустимых x и y. $\left\{\frac{x}{4y}\right\} \in \left[\frac{1}{28}; \frac{7}{4}\right]$

$f(xy) = f(x) + f(y) = \left[\frac{x}{4}\right] + \left[\frac{y}{4}\right]$

$f(xy) = \left[\frac{xy}{4}\right]$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = \left[\frac{x}{4}\right] + \left[\frac{1}{4y}\right] = \left[\frac{x}{4y}\right]$

т.е. $f(xy)$ и $f\left(\frac{x}{y}\right)$ принимает 2 знач при одинаковых x и y.

т.к. $x \in [4; 28]$, то $\left[\frac{x}{4}\right]$ принимает знач. от 1 до 7

$y \in [4; 28]$ $\quad \left[\frac{1}{4y}\right]$ принимает знач. 0

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$4x-6=3\sqrt{10-(x-1)^2}$

$16x^2-48x+36=90-9x^2+18x-9.$

$25x^2-66x-45=0.$

$D=33^2+45\cdot25=2214.$

$x_{12}=\dfrac{33\pm\sqrt{2214}}{25}$

$x_{12}=\dfrac{72\pm\sqrt{8384}}{100.}$

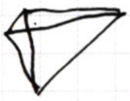
1089
1125
2214

45
25
225
90
1125

65
65
325
390
:225

72
72
144
504
5184
3200
8384

19
19
171
19
361
$\boxed{561}$



$25x^2-38x-8=0$

$D_1=19^2+8\cdot25$

$\sqrt{2214}\approx\ \approx46$

47
47
329
188
21

$\sqrt{12}+\sqrt{5}\ \dfrac{33\pm46}{25}=$

$\dfrac{1}{5}\quad\dfrac{80}{25}\quad-\dfrac{14}{25}$ 47

$\sqrt{561}=$

24
24
96
48
576

$\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{5}\quad\dfrac{16}{5}$

$\dfrac{19\pm24}{25}=\dfrac{43}{25};\ -\dfrac{1}{5}$

$171-25$

$151-5$

146

$-\dfrac{9}{5}-1\qquad-\dfrac{14}{5}\qquad-\dfrac{1}{5}.$

$-\dfrac{1}{25}$

$12^{-2}+5^{-2}=13^{-2}$

$(5\cdot13)^{\log_5 t}+(12\cdot13)^{\log_5 t}=(12\cdot5)^{\log_5 t}.$

$\dfrac{1}{12^{\log_5 t}}+\dfrac{1}{5^{\log_5 t}}=\dfrac{1}{13^{\log_5 t}}.$

169
13
56

$R_1^2=4R_1^2-25^2.$

$3R_1^2=25^2$

$R_1=$

$-5\cdot\cancel{12\cdot13}$

$(5\cdot13)^{\log_5 t}+(12\cdot13)^{\log_5 t}=(12\cdot5)$

2

$\cancel{5\cdot13}$

$\dfrac{5\cdot13}{2.}$

$4\cdot13^2-10=$

169
4.
676
576

24
24
96
48
7

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(xy) = f(x) + f(y)$

$f(xy) = \left[\frac{x}{4}\right] + \left[\frac{y}{4}\right]$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = \left[\frac{x}{4}\right] + \left[\frac{1}{4y}\right] < 0$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = \left[\frac{1}{4x}\right] + \left[\frac{y}{4}\right]$

$2f\left[\frac{x}{y}\right] = f(xy) + \left[\frac{1}{4x}\right] + \left[\frac{1}{4y}\right]$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y = ax + b$

$-2 = 2a + b$

$ax + b = -2 + \frac{4}{3x-2}$ $\quad x = \frac{2}{3}$

$(ax+b)(3x-2) = 8 - 6x$

$3ax^2 - 2ax + 3bx - 2b = 8 - 6x$

$\cancel{3ax^2 - x(2a - 3b + 6) - 2b + 8 = 0}$

$D = (2a - 3b + 8)^2 + 12a(6 - 2b) = 0$

$(2a - 3b + 8)^2 = 12a(6 - 2b)$

$4a^2 + 9b^2 + 64 + 12ab$

$-48b =$

$3ax^2 - 2ax + 3bx - 2b - 8 + 6x = 0.$

$3ax^2 - x(2a - 3b - 6) - 2b - 8 = 0.$

$D = 4a^2 + 9b^2 + 36 - 12ab - 24a$

$+ 36b + 12a(2b + 8) =$

$24ab + 96a$

$(2a + 3b + 6)^2 + 48a = 0$

$-2 = 2a + b$

$2a = -2 - b.$

$(4 + 2b)^2 + 24(-2 - b) = 0$

$(2 + b)^2 + 6(-2 - b) = 0$

$4 + 4b + b^2 - 12 - 6b = 0$

$-8 - 2b + b^2 = 0.$

$D_1 = 3^2$

$b_{1,2} = 1 \pm 3 = 4; -2$

$a = -3.$

$a = 0.$

$33 \cdot 33 = 1089$

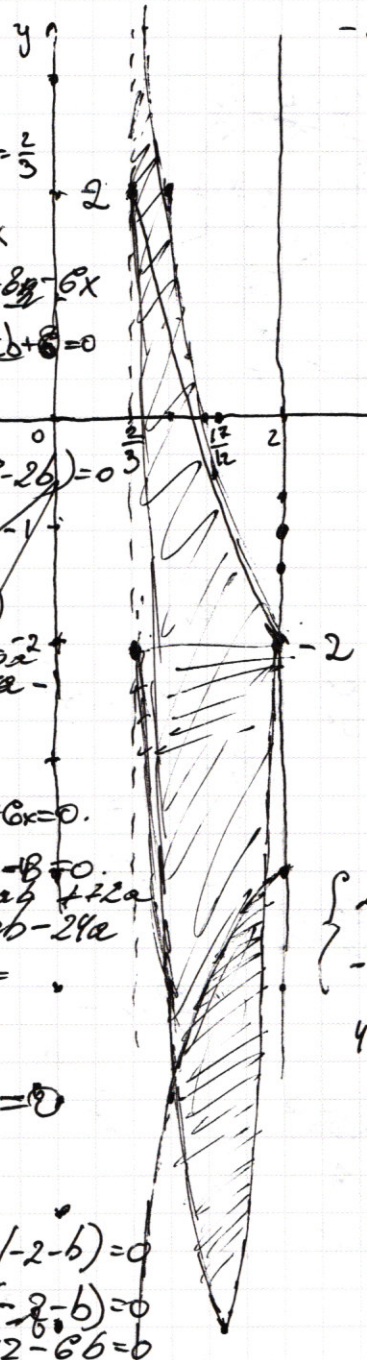
$45 \cdot 25 = 1125$

$33^2 + 45 \cdot 25 = 2214$

$42 \cdot 42$, 168

$3^3 \quad 4^3 \quad 5^3$

$27 \quad 64 \quad 125$



$-3x + 4$

$y = -2 + \frac{4}{3x-2}$ $\quad \frac{4}{3x-2} = 2$

$4 = 6x - 4$

$2 = 3x -$

$y = ax + b$

$y = 18x^2 - 51x + 28.$

$x_B = \frac{51}{36} = \frac{17}{12}$

$18 \cdot \frac{17^2}{12^2} - \frac{51 \cdot 17}{12} + 28$

$\frac{8 - 12}{6 - 2} = -4$

$18 \cdot \frac{17^2}{12^2} - \frac{51 \cdot 17}{12}$

$3 \cdot \frac{17^2}{12 \cdot 2} - \frac{3 \cdot 17^2}{12}$

$-\frac{3 \cdot 17^2}{12 \cdot 2} + 28.$

$\frac{-3 \cdot 17^2 + 28 \cdot 24}{2 \cdot 12}$

$18 \cdot \frac{4}{9} - \frac{51 \cdot 2}{3} + 28$

$8 - 34 + 28.$

$17 \cdot 17 = 289$, $\quad 289 \cdot 3 = 867$

$28 \cdot 24 = 672$

$867 - 672 = 195$, $\quad 195 : 3 = 65$

$-\frac{195}{2 \cdot 12} = -\frac{65}{8}$

$\begin{cases} 2 = \frac{2}{3}a + b \\ -2 = 2a + b \end{cases}$

$4 = -\frac{4}{3}a$

$a = -3$

$b = 4$

$18 \cdot 4 - 51 \cdot 2 + 28.$

$72 - 102 + 28.$

$18 - 51 + 28 = -5$

$(-3; 4)$

$\frac{8}{12} \quad \frac{16}{12} \quad \frac{24}{12}$

$1 - 28x + 169x^2 - 144x^2 - 24x + 24$

$25 - 50x + 25x^2$

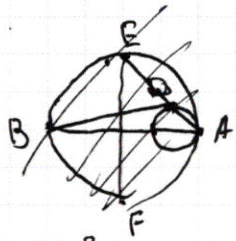
$25(1 - x)^2$

$y_{12} = \frac{13x - 1 \pm 5(x - 1)}{2}$

$y_{12} = 9x - 1; \; 4x$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)



$3+4+5+5+5+5+6$

20

33

$R_1 - ?$ $R_2 - ?$

$\angle AFE - ?$

$S_{AFE} - ?$

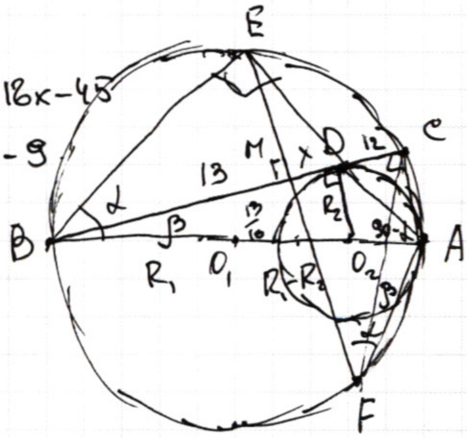
33^2

$D_1 = 36 - 9x^2 + 18x - 45$

$-9x^2 + 18 - 9$

$-9(x-1)^2$

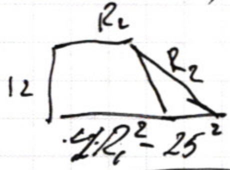
$72.$



$(2R_1 - R_2)^2 - R_2^2 = 169.$

$4R_1^2 - 4R_1R_2 = 169.$

$R_2 = \frac{4R_1^2 - 169}{4R_1}$



$(\sqrt{4R_1^2 - 25^2} - R_2)^2 + 12^2 = R_2^2$

$$4R_1^2 - 2R_2\sqrt{4R_1^2 - 25^2} = 25^2 - 12^2$$

$$4R_1^2 - 4R_2R_1 = 13^2$$

$$R_2 = \frac{4R_1^2 - 13 \cdot 37}{2\sqrt{4R_1^2 - 25^2}} = \frac{4R_1^2 - 13^2}{4R_1}$$

$$\frac{(4R_1^2 - 13 \cdot 37)\,2R_1}{4R_1^2 - 13^2} = \sqrt{4R_1^2 - 25^2}$$

$\begin{cases} 4R_1^2 - 25^2 - 2R_1\sqrt{} + 12^2 = 0 \\ 4R_1^2 - 4R_1R_2 = 169. \end{cases}$

~~13-x~~

$BM \cdot MC = BM \cdot MF$

$4x - 6 = 3\sqrt{10 - (x-1)^2}$

$13^2 + x^2 = \cancel{\left(\frac{25}{24}x\right)^2}$

$13^2 + 24^2 = \cancel{30^2}$

24

24 26

$2 \cdot 50$

$13^2 + (24x)^2 = (25x)^2.$

$13^2 = x^2(2 \cdot 50)$

$(10x)^2 = 13^2$ $10x = 13$ $x = \frac{13}{10}.$

$$\frac{2R_1 - R_2}{2R_1} = \frac{13}{25}$$

$$1 - \frac{R_2}{2R_1} = \frac{13}{25} \qquad \frac{12}{25} = \frac{R_2}{2R_1}$$

$$\frac{24x}{25x} = \frac{R_2}{R_1}$$

$$\frac{24}{25} \cdot 2 - 1$$

$\frac{R_2}{4}$

$25x$ $24x.$

$R_2 = \frac{24 \cdot 13}{10}$

$R_1 = \frac{25 \cdot 13}{10}.$

$1;6.$

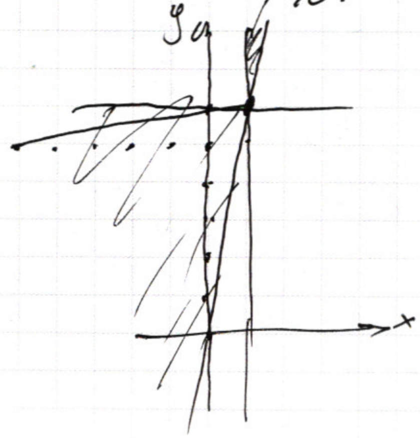
$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{(x-1)(y-6)} \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45 \end{cases}$

$9 + 36 - 18 - 72 = 45.$

$y^2 - 12xy + 36x^2 = xy - 6x - y + 6.$

$y^2 + y + 36x^2 + 6x - 12xy = 6$

$y^2 - 12y + 9x^2 - 18x = 45$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\qquad tg\alpha - ?$ ≥ 3 ~~раз~~ знач?

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta) = \sin 2\alpha\cos 4\beta + \sin 4\beta\cos 2\beta = \sin 2\alpha(\cancel{\cos 4\beta + 2\cos 2\alpha\cos 2\beta})$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta \qquad \sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{17} \qquad \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}} \qquad \sin 2\beta = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

1) $\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} + \frac{4}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = -1 \qquad 2\sin\alpha\cos\alpha + 4\cos^2\alpha - 4\sin^2\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 0$

2) $\sin 2\alpha - 4\cos 2\alpha = -1 \qquad 5\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - 3\sin^2\alpha = 0.$

$2\sin\alpha\cos\alpha - 4\cos^2\alpha + 4\sin^2\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 0 \qquad -3tg^2\alpha + 2tg\alpha + 5 = 0.$

$5tg^2\alpha + 2tg\alpha - 3 = 0 \qquad D_1 = 1 + 15 = 4^2$

$D_1 = 1 + 15 = 4^2 \qquad t_{12} = \frac{1\pm 4}{3} = \frac{5}{3}; -1$

$t_{12} = \frac{-1\pm 4}{5} = -1; \frac{3}{5}$

$-1; \frac{3}{5}; \frac{5}{3}$

№2.

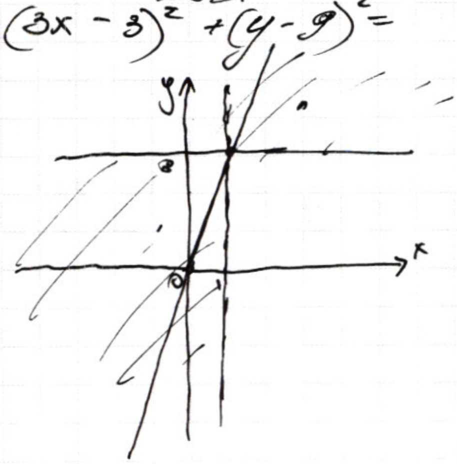
$y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6} \qquad x(y-6) - (y-6) = \sqrt{(x-1)(y-6)}$

$y-6x$

$9x^2 + y^2 - 18x - 18y = 45 \qquad 9x^2 - 18x + 9 - 9 + y^2 - 18y + 81 - 81 = 45.$

$2\cdot 3\cdot 3$

$(3x-3)^2 + (y-9)^2 = \qquad 9(x-1)^2 + (y-9)^2 = 135$



$y = 6x \qquad y = 6 \qquad (1;6)$

$9x^2 + y^2 - 18(x+y) = 45 \qquad 18\cdot 7 = 126$

$9 \quad 36 \qquad 90$

-81

$y^2 - 12xy + 36x^2 = xy - 6x - y + 6$

$y^2 - 13xy + y + 36x^2 + 6x - 6 = 0$

$y^2 + y(1-13x) + 36x^2 + 6x - 6$

$D = (1-13x)^2 - 4(36x^2 + 6x - 6)$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

№3 $|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

$26x-x^2>0.$
$x(26-x)>0$

$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26-x^2-13^{\log_5(26x-x^2)} \geq 0.$

$|x^2-28x|^{\log_5 12}+26-x^2-(26x-x^2)^{\log_5 13} \geq 0$

$|-t|^{\log_5 12}+t-t^{\log_5 13} \geq 0$ $\qquad x^2-26x \quad (0;26)$

1) $-t \leq 0$ $\qquad x^2-26x \geq 0.$ $\quad x(x-26)$

$t^{\log_5 12}+t-t^{\log_5 13} \geq 0$

$t^{\log_5 12}+t-t^{\log_5 13}=0$

$t \in (0;26).$ $\quad t=t^{\log_5 13}-t^{\log_5 12}$ $\qquad 1=t^{\log_5 13-1}-t^{\log_5 12-1}$

$t=0$ $\qquad 1=t^{\log_5 \frac{13}{5}}-t^{\log_5 \frac{12}{5}}$

$t=$

$t=0 \qquad t=t^{\log_5 13}-t^{\log_5 12}$?

$\frac{13}{5}^{\log_5 t}-\frac{12}{5}^{\log_5 t}=1$ $\qquad t^{\log_5 12}+t-t^{\log_5 13} \geq 0.$

$13^{\log_5 t}-12^{\log_5 t}=5^{\log_5 t}$ $\qquad t\left(t^{\log_5 \frac{12}{5}}-t^{\log_5 \frac{13}{5}}+1\right) \geq 0.$

$13^x-12^x=5^x \quad t=25$ $\qquad t^{\log_5 \frac{12}{5}}-t^{\log_5 \frac{13}{5}}+1=0.$

$\frac{12}{5}^{\log_5 t}-\frac{13}{5}^{\log_5 t}.$

№5. $f(x)$ $\in (0;+\infty)$ $R.$

$f(ab)=f(a)+f(b)$ $\quad ; f(p)=\left[\frac{p}{4}\right]$

$4 \leq x \leq 28$ $\qquad f\left(\frac{x}{y}\right)<0. \rightarrow$?

$4 \leq y \leq 28$

№6. $\left[\frac{2}{3};2\right]$ $\qquad \frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \geq 18x^2-51x+28$

$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b$

$ax+b \geq 18x^2-51x+28$

$51=3 \cdot 17$

$6x-8 \mid 3x-2$
$6x-4 \mid 2$
-4

$y=-2-\frac{4}{3x-2}.$

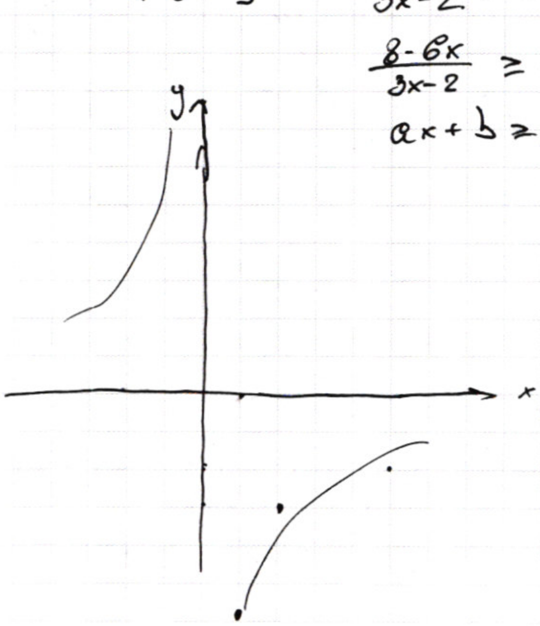
$y=ax+b$

$y=18x^2-51x+28.$

$18=3\sqrt{2}$

$28=2\cdot\sqrt{7}$

$\frac{51}{36}.$



☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)