МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

© МФТИ, 2022

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-6x=\sqrt{(x-1)(y-6)} \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \end{cases}$$

замена: $a=x-1$, $b=y-6$ | то: $b-6a=y-6-6x+6=y-6x$

$$\begin{cases} b-6a=\sqrt{ab} \quad (1) \\ 9a^2+b^2=90 \quad (2) \end{cases}$$

(1) $\underline{b\geq 6a}$

$b^2-12ab+36a^2=ab$

$b^2-13ab+36a^2=0$

(2) $b^2=9(10-a^2) \Rightarrow \begin{cases} b=\pm3\sqrt{10-a^2} \\ 10\geq a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=\pm3\sqrt{10-a^2} \\ a\in[-\sqrt{10};\sqrt{10}] \end{cases}$

(1) $90-9a^2-13a(\pm3\sqrt{10-a^2})+36a^2=0$

$27a^2-39(\pm\sqrt{10-a^2})\cdot a+90=0$

I $b=3\sqrt{10-a^2}$

$27a^2-39\sqrt{10-a^2}\cdot a+90=0$

$39\sqrt{10-a^2}\cdot a=90+\cancel{27}\,27a^2$, $a>0$

$\left|\begin{matrix} 90+27a^2>0 \\ 39\sqrt{10-a^2}\geq0 \end{matrix}\right| \Rightarrow \underline{a>0}$

$169(10-a^2)\cdot a^2=900+540a^2+81a^4$

$1690a^2-169a^4=900+540a^2+81a^4$

$250a^4-1150a^2+900=0$

~~$D=61\cdot61-90\cdot25\cdot4=61\cdot61-90100<0\Rightarrow\varnothing$~~

~~II. $b=-3\sqrt{10-a^2}$~~

$5a^4 - 23a^2 + 18 = 0$

$D = 529 - 360 = 169$

$a_1^2 = \frac{13+23}{10} = \frac{18}{5}$ $\qquad$ $a_2^2 = \frac{-13+23}{10} = 1$

$a>0 \to$

$a_1 = \sqrt{\frac{18}{5}} \in [-\sqrt{10}; \sqrt{10}]$ $\qquad$ $a_2 = 1 \in [-\sqrt{10}; \sqrt{10}]$

$b_1 = 3\sqrt{10 - \frac{18}{5}} = 12\sqrt{\frac{2}{5}}$ $\qquad$ $b_2 = 3\sqrt{10-1} = 9$

ур-ие: $b \geq 6a$

$12\sqrt{\frac{2}{5}} \geq 18\sqrt{\frac{2}{5}}$ — Л. $\qquad$ $9 \geq 6$ — И.

II. $b = -3\sqrt{10-a^2}$ $\qquad$ $-39\sqrt{10-a^2}\cdot a = 90 + 87a^2$, $a<0$

$\left| \begin{array}{l} 39\sqrt{10-a^2} \geq 0 \\ 90+87a^2 > 0 \end{array} \right| \Rightarrow \underline{a<0}$

$5a^4 - 23a^2 + 18 = 0$

$a_1^2 = \frac{18}{5}$ $\qquad$ $a_2^2 = 1$

$a_1 = -\sqrt{\frac{18}{5}} \in [-\sqrt{10}; \sqrt{10}]$ — И $\qquad$ $a_2 = -1$. $\in [-\sqrt{10}; \sqrt{10}]$ — И.

$b_1 = -12\sqrt{\frac{2}{5}}$ $\qquad$ $b_2 = -9$

ур-ие: $b \geq 6a$

$-12\sqrt{\frac{2}{5}} \geq -18\sqrt{\frac{2}{5}}$ — И $\qquad$ $-9 \geq -6$ — Л.

Обр-я замена:
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} b = 9 \\ a = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} b = -12\sqrt{\frac{2}{5}} \\ a = -3\sqrt{\frac{2}{5}} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y-6 = 9 \\ x-1 = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} y-6 = -12\sqrt{\frac{2}{5}} \\ x-1 = -3\sqrt{\frac{2}{5}} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 15 \\ x = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 6-12\sqrt{\frac{2}{5}} \\ x = 1-3\sqrt{\frac{2}{5}} \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(x;y) = \left\{ (2;15); \left(1-3\sqrt{\frac{2}{5}}; 6-12\sqrt{\frac{2}{5}}\right) \right\}$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

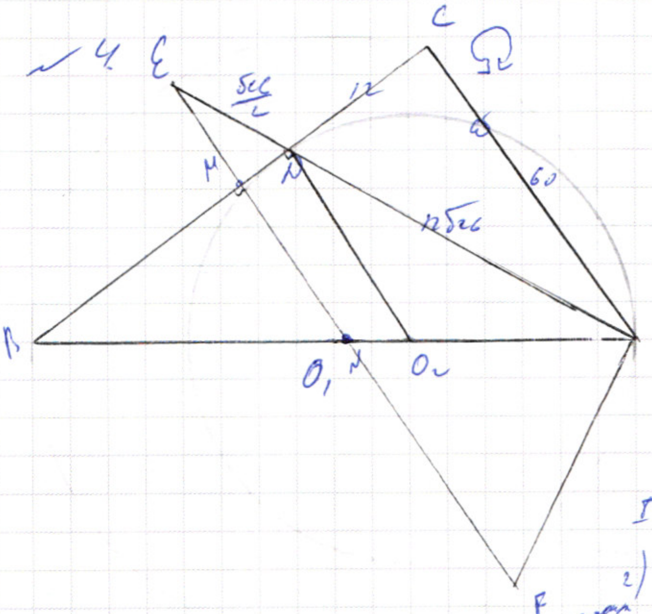
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4



Дано: $\Omega \cap \omega = \{A\}$, AB – диам. Ω

$\Omega(O_1; R)$, $\omega(O_2; r)$, $R > r$, $BC \cap \omega = \{D\}$,

$C \in \Omega$, $[AD) \cap \Omega = E$, $EF \perp BC$, $EF \cap \Omega = F$

$BD = 13$, $DC = 12$.

Найти: R; r, $\angle AFE$, $S_{\triangle AFE}$.

Р-ие:

I-1) $DO_2 \perp BC$ по св. касат.

2) $\triangle BDO_2 \sim \triangle BCA$ по 2-ум $\angle$ ($\angle BDO_2 = \angle BCA = 90°$ по (1) и опр. впис. $\angle$, $\angle B$ – общ.) $\Rightarrow \frac{BO_2}{BA} = \frac{BD}{BC}$ по св. кас. окр. $\Rightarrow \frac{2R - r}{2R} = \frac{13}{25}$

$50R - 25r = 26R \Rightarrow 24R = 25r \Rightarrow r = \frac{24}{25}R$

3) по (2) и св. $\sim$ он-в: $\frac{S_{\triangle BAC}}{S_{\triangle BO_2D}} = \left(\frac{BC}{BD}\right)^2 = \frac{\frac{1}{2}\cdot BC\cdot CA}{\frac{1}{2}BD\cdot DO_2} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 25\sqrt{4R^2 - 625}}{\frac{1}{2}\cdot 13\cdot r} = \frac{25^2}{13^2}$

$25\cdot 13^2\sqrt{4R^2 - 625} = 25^2\cdot 13\cdot\left(\frac{24}{25}R\right) \Rightarrow 13\sqrt{4R^2 - 625} = 24R \Rightarrow$

$\Rightarrow 169\cdot 4R^2 - 169\cdot 625 = 576R^2$

$100R^2 = 169\cdot 625$

$R^2 = \frac{169\cdot 25}{4} \Rightarrow R = \frac{13\cdot 5}{2} = \frac{65}{2} \Rightarrow r = \frac{65\cdot 24}{25\cdot 2} = \frac{156}{5} = 31{,}2$ $R = 32{,}5$

4) по т. Пиф. в $\triangle BCA$: $AB = 2R = 65 \Rightarrow AC = \sqrt{65^2 - 25^2} = 60 \Rightarrow$ по т. Пиф. в $\triangle CDA$

$\Rightarrow AD = \sqrt{AC^2 + DC^2} = \sqrt{60^2 + 12^2} = 12\sqrt{26}$

5) $EF \cap BC = M$, $EF \cap AB = N$ по степени точки: $ED \cdot DA = BD \cdot DC$

$ED = \frac{12\cdot 13}{12\sqrt{26}} = \frac{26}{2\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{26}}{2} \Rightarrow AE = 12{,}5\sqrt{26}$

6) по 2-ум $\angle$: $\triangle EMD \sim \triangle ACD$ ($\angle EDM = \angle CDA$, $\angle ACD = 90° = \angle EMD$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{MD}{DC} = \frac{ED}{DA} \Rightarrow \frac{MD}{12} = \frac{\sqrt{26}}{2\sqrt{26}\cdot 12} \Rightarrow MD = \frac{1}{2} \Rightarrow MC = BM = 12{,}5$,

$CA \parallel EF$ как $\perp BC \Rightarrow MN$ – ср. л. линия $\triangle BCA$ (т.к. проходит через

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

середину BC $\parallel AC$) $\Rightarrow$ N - сер-на $AB \Rightarrow N = O_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ EF - диам. $\Omega \Rightarrow \angle EAF = 90°$ как опир. на диам.

д) $\triangle EAF$ - вписан в $\Omega \overset{\text{по т Sin}}{\Rightarrow}$ $\sin\angle AFE = \frac{EA}{2R} = \frac{12,5\sqrt{26}}{2\cdot 32,5} =$

$= \frac{25\sqrt{26}}{65\cdot 2} = \frac{5\sqrt{26}}{26} \Rightarrow \angle AFE = \arcsin\frac{5\sqrt{26}}{26}$ по опр. sin так $\angle AFE$ - острый.

$\Rightarrow \frac{AE}{EF} = \sin\angle AFE \Rightarrow \frac{12,5\sqrt{26}}{EF} = \frac{5\sqrt{26}}{26} \Rightarrow EF = \frac{12,5\cdot 26}{5} = 65 \Rightarrow$

$\overset{\text{по т Пифаг.}}{\Rightarrow}$ $AF = \sqrt{65^2 - 12,5^2\cdot 26} = \frac{5}{2}\sqrt{26} \Rightarrow S_{\triangle AFE} = \frac{1}{2}\cdot AF\cdot AE =$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{25}{2}\sqrt{26}\cdot\frac{5}{2}\sqrt{26} = \frac{125\cdot 26}{8} = \frac{1625}{4} = 406,25$.

Ответ: $r = 31,2$ $R = 32,5$

$\angle AFE = \arcsin\frac{5\sqrt{26}}{26}$

$S_{\triangle AFE} = 406,25$.

№ 6.

$$\begin{cases} \frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b & (1) \\ ax+b \geq 18x^2 - 51x + 28 & (2) \end{cases}$$

(1) $-2 + \frac{4}{3x-2} \geq ax+b$ $y = f(x) = ax+b$ - прямая проходящая через $(0; b)$

$y = g(x) = -2 + \frac{4}{3x-2}$ - гипербола с асимпт. $x = \frac{2}{3}$, $y = -2$

(2) $ax+b \geq 18x^2 - 51x + 28$

$y = m(x) = 18x^2 - 51x + 28$ - парабола с $x_0 = \frac{51}{36} = \frac{17}{12}$

$y_0 = -\frac{65}{8} = -8,125$

в-ви ↗

$m\left(\frac{2}{3}\right) = +\cancel{18}\ 2$

$m(2) = -2$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

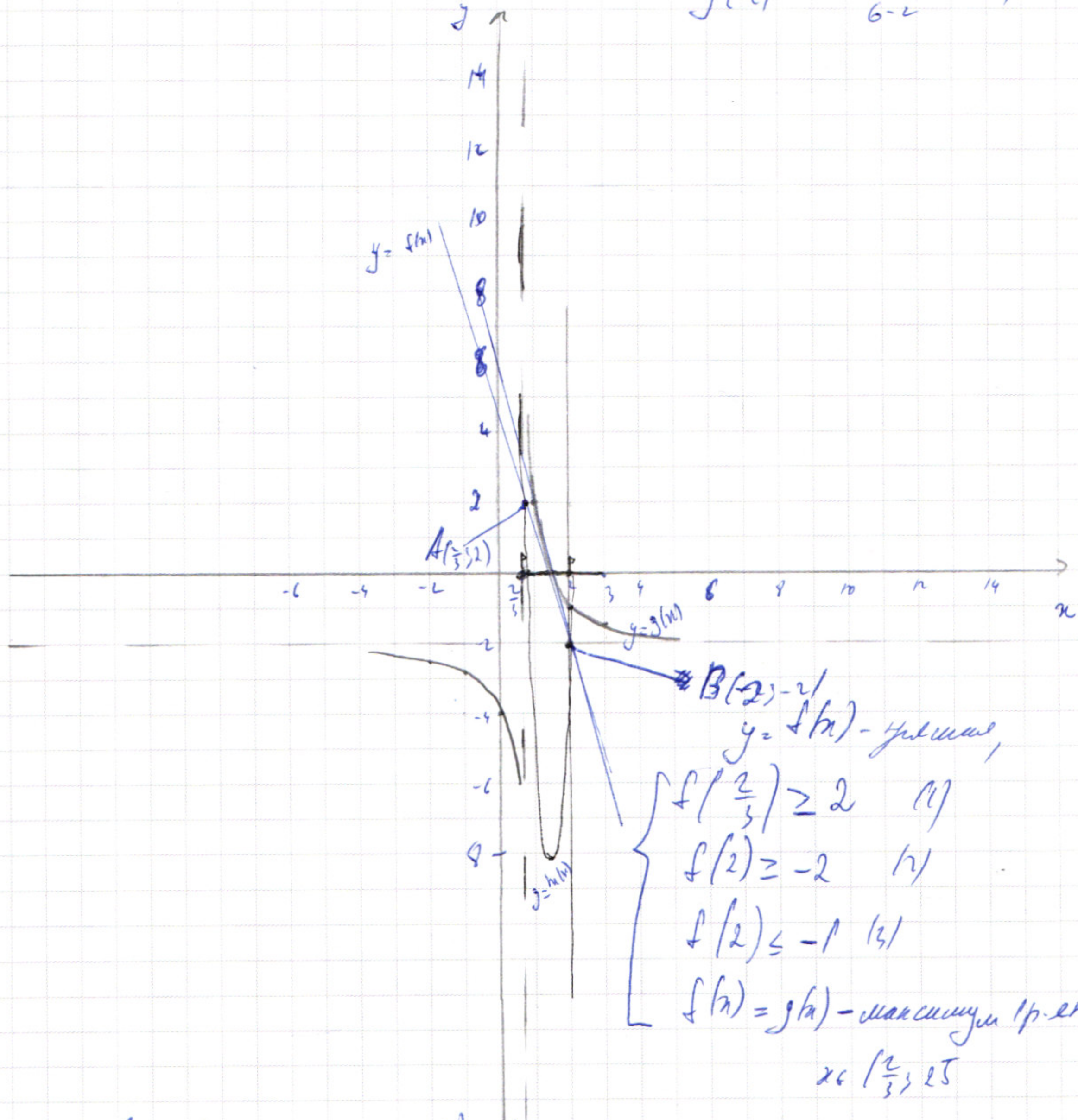
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$g(2) = -2 + \frac{4}{6-2} = -1$



$$\begin{cases} f\left(\frac{2}{3}\right) \geq 2 & (1) \\ f(2) \geq -2 & (2) \\ f(2) \leq -1 & (3) \\ f(x) = g(x) \text{ - максимум 1 р-ния} & (4) \end{cases}$$

$x \in \left[\frac{2}{3}; 2\right]$

(1) $a \cdot \frac{2}{3} + b \geq 2$ ~~(1)+(2): 2a+b~~

(2) $2a + b \geq -2$

(3) $2a + b \leq -1$

(4) $ax + b = \frac{8-6x}{3x-2}$ - максимум 1 р-е на $x \in \left[\frac{2}{3}; 2\right]$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

V. Заметим, что прямая проходящая через A и B: $y=-3x+4$

$$\left| \begin{array}{lll} A(\frac{2}{3};2) & \frac{2}{3}a+b=2 & \\ & & \Rightarrow \\ B(2;-2) & 2a+b=-2 & \end{array} \begin{array}{l} a=-3 \\ \\ b=4 \end{array} \right|$$

$$\frac{8-6x}{3x-2}=-3x+4$$

$$\frac{8-6x+9x^2-6x-12x+8}{3x-2}=0$$

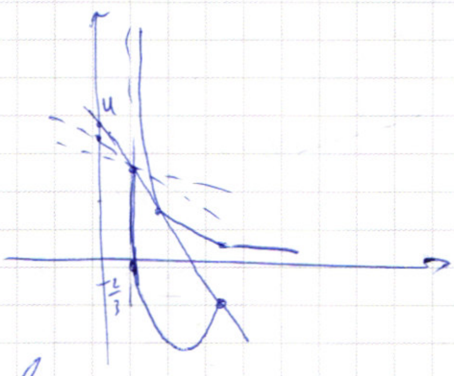
$$\frac{9x^2-24x+16}{3x-2}=0 \quad \frac{(3x-4)^2}{3x-2}=0 \text{ — реш-е}$$

$$x=\frac{4}{3}, \quad \frac{4}{3}\in\left[\frac{2}{3};2\right]\Rightarrow$$

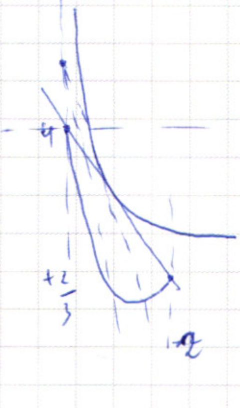
$\Rightarrow$ прямая проходящая через AB касается гиперболы

VI. Если взять $b<4$, то $a>-3$, прямая будет пересекать гиперболу на отрезке от $\left[\frac{2}{3};2\right]\Rightarrow$

$\Rightarrow$ не для всех $x\in\left[\frac{2}{3};2\right]$ — подходит.



VII. если $b>4$, то: касательная к гиперболе пересекает параболу, прямая ниже касат гиперболы тем более пересекает параболу (на отрезке $\left[\frac{2}{3};2\right]$)



$y=-3x+4$ — единственная прямая, подходящая под условие.

Ответ: $a=-3$; $b=4$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1. $n \in \mathbb{Z}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta) = -\frac{2}{17}$

$2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cos 2\beta = -\frac{2}{17}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$.

$2\beta = \pm \arccos\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi n$

$\sin 2\beta = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$. - из осн. триг. тожд.

1) $\sin 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} + \frac{4}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

2) $\sin 2\beta = -\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\frac{1}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha - \frac{4}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$.

• $\sin 2\alpha = -1$

$-\frac{1}{\sqrt{17}} + 0 = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ - И $\quad$ $tg\,\alpha = -1$ $\quad$ $-\frac{1}{\sqrt{17}} + 0 = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ - И.

• $\sin 2\alpha = 1$

$\frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ - Л $\quad$ $\frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ - Л

• $\cos 2\alpha \neq 0$

~~$\frac{1}{\sqrt{17}} tg 2\alpha + \frac{4}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}\cdot\cos 2\alpha}$~~

Ответ: -1.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$\sin(2\alpha+4\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\cos(2\alpha+4\beta) = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\frac{4}{\sqrt{17}}$

$4\beta = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + 2\pi n - 2\alpha$

$\pi - \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + 2\pi n - 2\alpha$

$-\frac{4}{\sqrt{17}}$

$+\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\beta - \frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\beta + \sin 2\alpha + \frac{2}{17}$

$\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\beta + \frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\beta = \sin 2\alpha + \frac{2}{17}$

$\frac{1}{\sqrt{17}} \cos($

sin · sin — cos · cos — sin · cos

sin + sin — sin − sin — cos + cos — cos − cos

$\sin + \sin = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

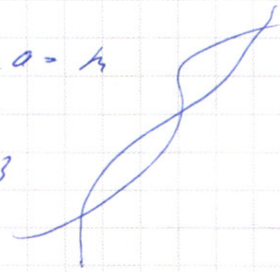
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a = 26x - x^2$, $a \geq 0$

$a^{\log_5 12} + a \geq 13^{\log_5 a}$ $\log_5 a = k$

$(13^{\log_5 a})' = 13^{\log_5 a} \cdot \ln 13$



$f(x) = 13^x$

$g(x) = \log_5 a$

$(f(g(x)))' = f' \cdot g' = 13^{\log_5 a} \cdot \ln 13 \cdot \frac{1}{a \ln 5} = 13^{\log_5 a}$

$a^{\log_5 12} + a \geq 13^{\log_5 a}$ $2 \geq 1$

$(a^{\log_5 12 - 1} + 1) a \geq 13^{\log_5 a}$

$a > 1$, $a < 1$

$\log_{13}(a^{\log_5 12 - 1} + 1) + \log_{13} a \geq \frac{\log_{13} a}{\log_{13} 5}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\qquad$ $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\qquad$ $\sin 2\alpha \cos 4\beta + \sin 4\beta \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\sin 2\alpha \cos^2 2\beta + 2\sin 2\beta \cos 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\cos 2\beta (\sin 2\alpha \cos 2\beta + 2\sin 2\beta \cos 2\alpha) = -\frac{2}{17}$

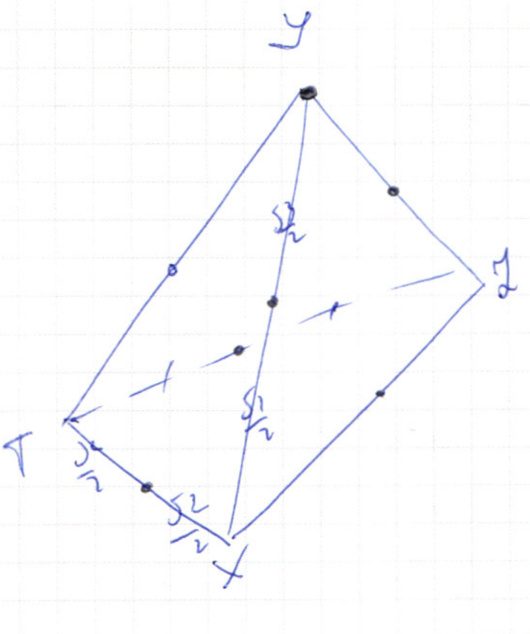
$\sin(2\alpha+2\beta+2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \sin 2\beta \cos(2\alpha+2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\cos(2\alpha+2\beta) = \frac{4}{\sqrt{17}}$ $\qquad$ $\cos(2\alpha+2\beta) = -\frac{4}{\sqrt{17}}$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\beta + \frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$ $\qquad$ $-\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\beta - \frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$f(ab) = f(a) + f(b)$



☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№2. $\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$

$y \geq 6x$

$9x^2-18x+9+y^2-12y+36=90$

$9(x-1)^2+(y-6)^2=90$

Замена: $x-1=a$

$y-6=b$

$b-6a=y-6-6x+6=y-6x$

$y-6x=\sqrt{(x-1)(y-6)}$

$y^2-12xy+36x^2=(x-1)(y-6)$

$\begin{cases} b-6a=\sqrt{ab} \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases}$

$169-36=123$

$9+36-18-72$

$b^2-12ab+36a^2=ab$

$9a^2+b^2=90$

$b^2+9a^2=13ab-27a^2$

$13ab-27a^2=90$

$9a^2+b^2=90$

$b^2=90-9a^2=9(10-a^2)$

$b^2-13ab+36a^2=0$

$9(10-a^2)$

$270\cdot 4=1080$

$30+9a^2$

$900+1080$

$61 \cdot 61$: 61, 366, 3721

$3721-9000$

$9\cdot 30\cdot 4$

$120\cdot 9=$

$=1200-120=1080$

$\begin{cases} b-6a=\sqrt{ab} \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases}$

$b=\sqrt{90-9a^2}$

$b^2-13ab+36a^2=0$

$\cancel{90-9a^2}-13a\cdot 3\sqrt{10-a^2}+9a^2=0$

$13a\sqrt{10-a^2}=9a^2+30$

$1690a^2-169a^4=81a^4+1080a^2+900$

$250a^4-610a^2+900=0$

$2a + b = -2$

$\frac{2}{3}a + 3b = 6$

$2b = 8$

$b = 4.$

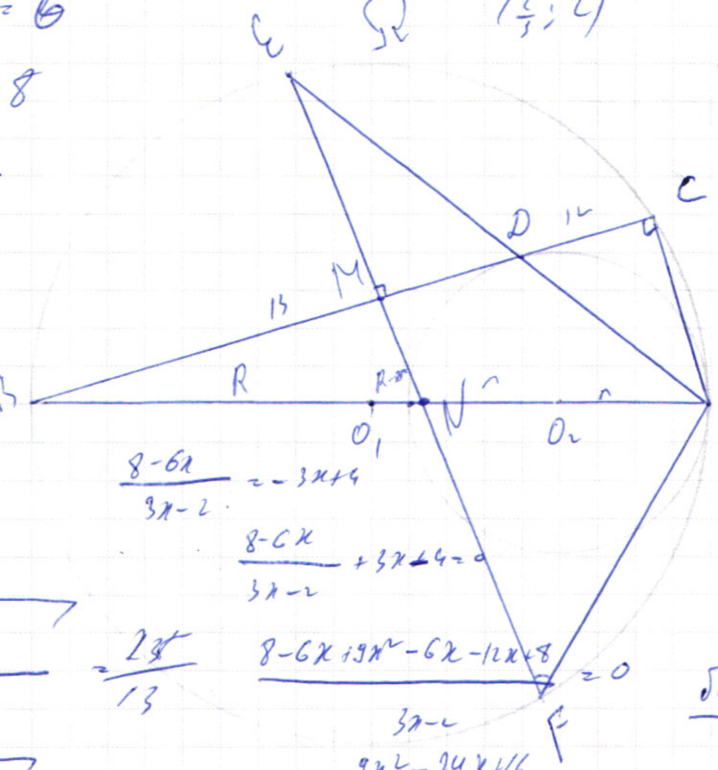
$a = -3$

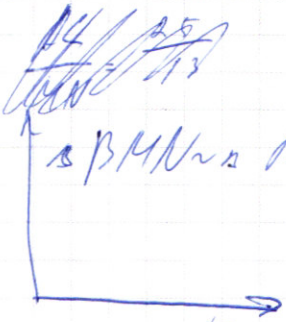
$-3x + 4$

$y = ax + b$

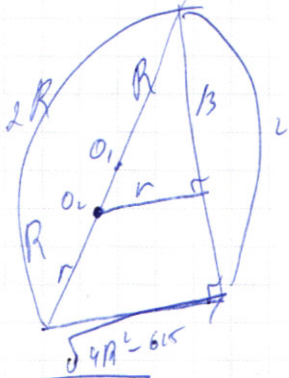
$(\frac{2}{3}; 2)$

$(2; -2)$





$\triangle BMN \sim \triangle BCA$



$\frac{8-6x}{3x-2} = -3x+4$

$\frac{8-6x}{3x-2} + 3x - 4 = 0$

$\frac{8 - 6x + 9x^2 - 6x - 12x + 8}{3x-2} = 0$

$9x^2 - 24x + 16$

$\frac{\sqrt{4R^2 - 625}}{r} = \frac{24}{13}$

$13\sqrt{4R^2 - 625} = 24R$

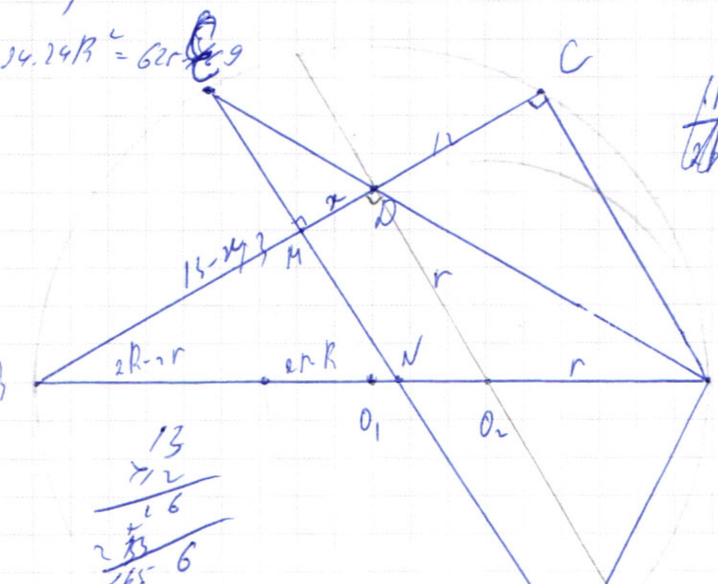
$169 \cdot (4R^2 - 625) = 24 \cdot 24 \cdot R^2$

$169 \cdot 4R^2 - 24 \cdot 24 R^2 = 625 \cdot 169$

$\frac{\sqrt{4R^2-625} \cdot 25}{13r} = \frac{24 \cdot 25}{13 \cdot 13}$

$\triangle EMD \sim \triangle ACD$

$\triangle BMN \sim \triangle BCA.$



$\frac{2R - r}{2R} = \frac{13}{25}$

$50R - 25r = 26R$

$24R = 25r$

$\frac{R}{r} = \frac{25}{24}$

$24 \cdot 24$, 96, 48, 576

$13 \cdot 12 = 156$, $169 \cdot 4 = 676$

$25 \cdot 25 = 625$

$169 \cdot 625$

104

$\frac{\cancel{65 \cdot 24^2}}{\cancel{25 \cdot x}} = \frac{156}{r}$

$47\ 2$

573

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$65^2-25^2=5\cdot5\cdot13\cdot13-5\cdot5\cdot25=$ $\quad 1250+375=1625$

$=25(169-25=25\cdot144=(5\cdot12)^2$

$65 \cdot 65 = 325 + 390 = 4225$ $\quad 3600+625=4225$

$\frac{25\cdot26}{4}+\frac{625\cdot26}{4}$ $\quad \frac{650\cdot26}{4}=13\cdot5\cdot\cancel{26}\cdot13\cdot2$

$62\cdot62=124+372=3844$ $\quad 26\cdot144=104+744 \ldots 3744$

$3600+144=3744$

$144\cdot26=864+288=3744$

3744 | 4; 936 | 4; 234 | 2; 117 | 9; 13

$4\cdot3\sqrt{26}$ $\quad 12\sqrt{26}$ $\quad 60$

$\frac{60}{MN}=\frac{25}{25}$ $\quad \frac{BN}{65}=\cancel{12}\cdot12\cdot26$ $\quad \cancel{60}\cdot\cancel{60}$

$\frac{\sqrt{26}\cdot\cancel{125}}{\cancel{325}}$ $\quad MN=\frac{60\cdot\cancel{15}}{\cancel{125}}=\frac{156}{5}$

$\cancel{13}$

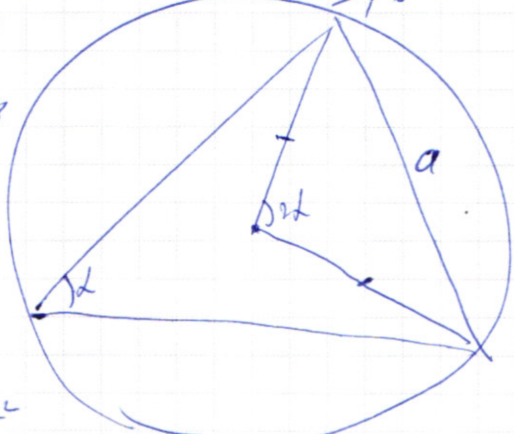
$125+13=375+125=1625$

$144+3600$

$12\cdot\cancel{13}=\frac{\cancel{26}\cdot12}{\cancel{2}}$

$5\sqrt{26}$ $\quad 13$

$25\cdot26$ $\quad 13\cdot13$



$R^2+R^2-2\cos2\alpha R^2=a^2$

$2R^2(1-1+2\sin^2\alpha)=a^2$

$R\sin\alpha=a$

$a^2=R^2+R^2-2\cos^2\alpha R^2$

$a^2=2R^2(1-\cos2\alpha$

$a^2=2R^2\cancel{(1-1+2\sin^2\alpha}$

$a=2R\sin\alpha$

$\frac{a}{2R}=\sin\alpha.$

$65^2-\cancel{17,5}\frac{25^2}{4}\cdot26$

$13\cdot5\cdot13\cdot5-\frac{25\cdot\cancel{25}}{2\cdot\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{13}$

$13\cdot25(13-12,5)=13\cdot25\cdot\frac{1}{2}=5\sqrt{\frac{13}{2}}=$

$=2,5\sqrt{26}$ $\quad \frac{5}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$$

$-6+6-6+6 \quad -\sqrt{6}$

$y-6x=\sqrt{(x-1)(y-6)}$

$9(x-1)^2+(y-6)^2=90$

$a=x-1$

$b=y-6$

$b-6a=\sqrt{ab}$

$9a^2+b^2=90$

$b^2=9(10-a^2)$

$b=3\sqrt{10-a^2}$

$b^2-13ab+36a^2=0$

$90-9a^2-39a\sqrt{10-a^2}+36a^2=0$

$13a\sqrt{10-a^2}=9a^2+30$

$169a^2(10-a^2)=81a^4+540a^2+900$

$1690a^2-169a^4=81a^4+540a^2+900$

$250a^4-1150a^2+900=0$

$5a^4-23a^2+18=0$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 23 \\ \hline 69 \\ 46 \\ \hline 529 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 13 \\ \times 13 \\ \hline 39 \\ 13 \\ \hline 169 \end{array}$$

$9\cdot30\cdot2=$

$=60\cdot9=540$

$\frac{50-18}{5}=\frac{32}{5}=$

$=4\sqrt{2}$

$15-12=\sqrt{30-12-15+6}$

$9\cdot4+225-36-180=45$

$6\sqrt{\frac{2}{5}}$

$6\sqrt{\frac{2}{5}}$

$\sqrt{6-30\sqrt{\frac{2}{5}}+\frac{36\cdot2}{5}-6+18\sqrt{\frac{2}{5}}-6+12\sqrt{\frac{2}{5}}+6}$

$\frac{72+60}{5}=6\frac{10+12}{5}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

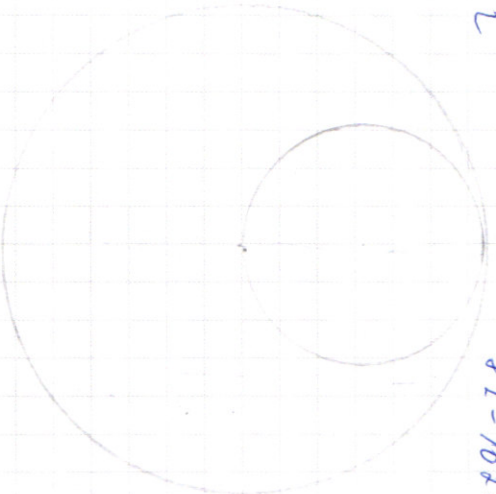
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

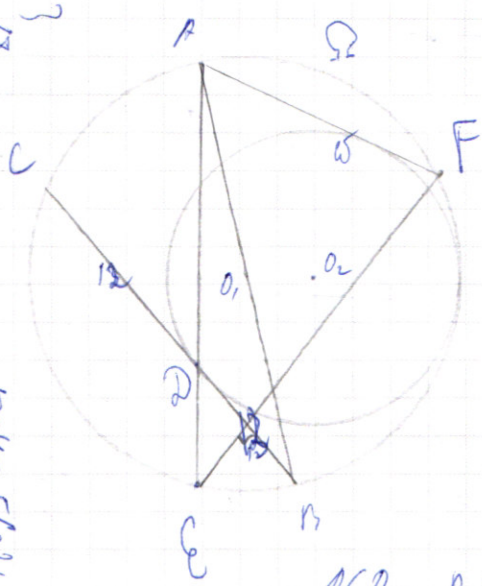
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



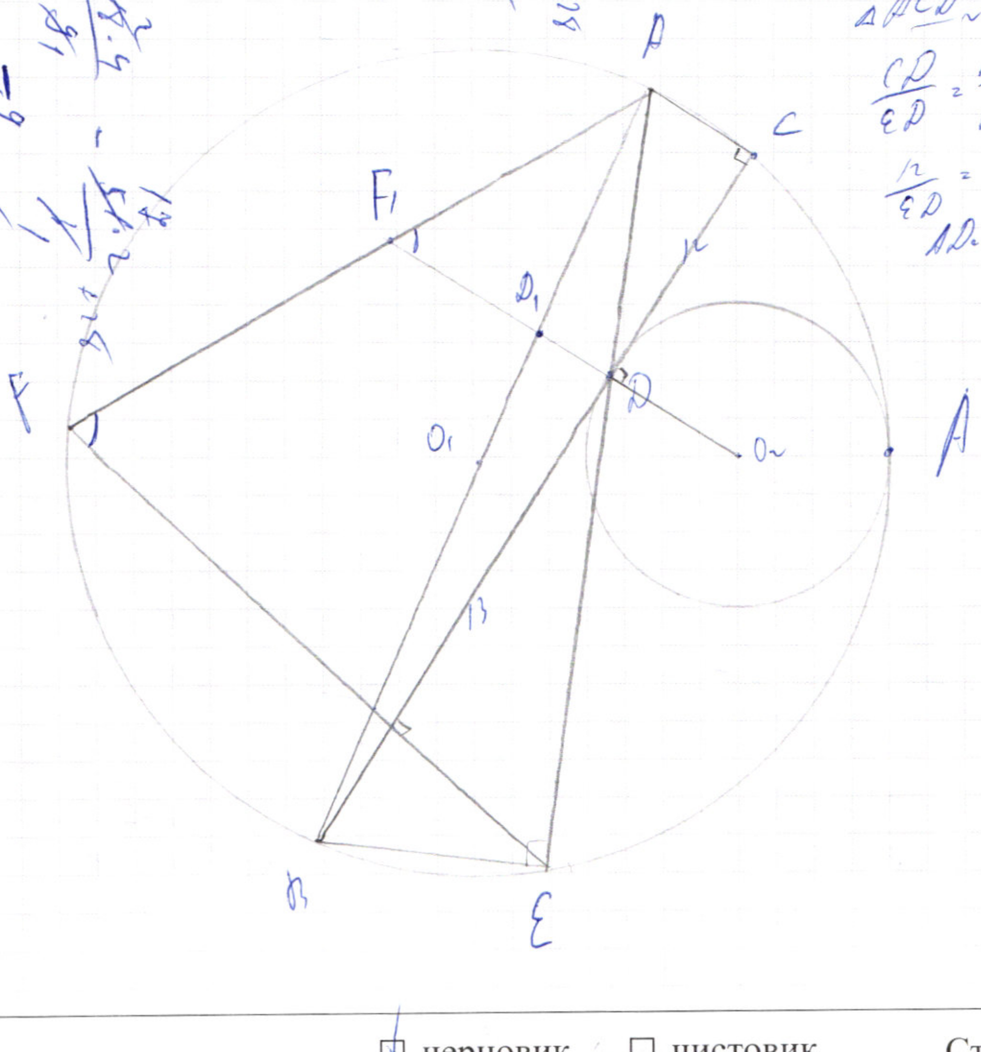


$\triangle ACD \sim \triangle BED$

$\frac{CD}{ED} = \frac{AD}{BD}$

$\frac{12}{ED} = \frac{AD}{13}$

$AD \cdot ED = 12 \cdot 13.$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

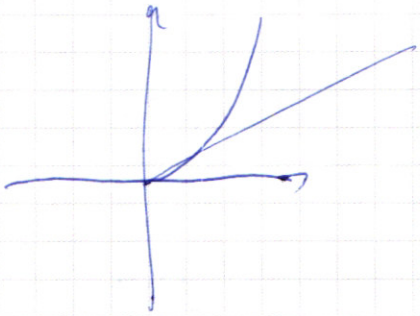
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№3. $|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

$$\begin{cases} (26x-x^2)^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)} \\ 26x-x^2>0 \end{cases}$$

$26x-x^2=a$, $a>0$



$a^{\log_5 12}+\cancel{a}\,a \geq 13^{\log_5 a}$

~~$a\left(a^{\log_5 12-\log_5 5}+1\right) \geq 13^{\log_5 a}$~~

~~$a \geq 13^{\log_5 a}$~~

$\log_5 12\; a^{\log_5 12}+1$

$ax+b \leq \frac{8-6x}{3x-2}$

$\frac{8-6x}{3x-2}=-\frac{6x-8}{3x-2}=-\frac{6x-4-4}{3x-2}=$

$18x^2-51x+28 \leq ax+b$

$=-2+\frac{4}{3x-2}$ $\cdot 6$ $-2\frac{4}{5}$

$\frac{+17}{2\cdot 18}=$ 6

$\frac{18\cdot 17\cdot 17}{12\cdot 12}-\frac{51\cdot 17}{12}+28$

$\frac{17\cdot 17}{8}-\frac{2\cdot 17\cdot 17}{8}=-\frac{17\cdot 17}{8}+28$

$\frac{-289+224}{8}=\frac{-65}{8}$

$17\cdot 17=119$, $+17$, 289

$28\cdot 8=224$; $\frac{14}{-5}$

$18\cdot 4=72$; $72\cdot 28$: $576+144=2016$

$51\cdot 51$: $51+255=2601$

$\frac{8+6}{-3-2}$

$\frac{8}{-2}$

$2601-18\cdot 28\cdot 4$

$2601-2016=585$

585 | 5
117 | 9
13 |

$\sqrt{5\cdot 9\cdot 13}$

$-2{,}5$

-9

$\frac{8-12}{6-2}$

$\frac{-1}{4}=\frac{21}{21}-\frac{21}{32}$

$\frac{8-18}{9-2}=\frac{-10}{7}$ $-1\frac{3}{7}$

$\frac{60}{-8}$

$\frac{8+12}{-6-2}$

$\frac{21}{6}=\frac{21}{8}-\frac{21}{21}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)