МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 $\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} & (1) \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 & (2) \end{cases}$

(2): $(x-6)^2+(6y-3)^2-36-9=0$

$(x-6)^2+(6y-3)^2-45=0 \Rightarrow (x-6)^2+9(2y-1)^2-45=0$

(1): $x-12y=\sqrt{2y(x-6)-(x-6)}=\sqrt{(2y-1)(x-6)}$

$(x-6)=a$, $(2y-1)=b$; $\cancel{x-12y}$, $(x-6)-6(2y-1)=x-12y=a-6b$

Имеем: $\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} & (3) \\ a^2+9b^2-45=0 & (4) \end{cases}$

(3): $(a-6b)^2=(\sqrt{ab})^2$

$a^2-12ab+36b^2-ab=0$

$a^2-13ab+36b^2=0$

$(a-9b)(a-4b)=0 \Rightarrow a_1=4b$; $a_2=9b$

Подставим в (4): $\left[\begin{array}{l} 16b_1^2+9b_1^2=45 \\ 81b_2^2+9b_2^2=45 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b_1^2=\frac{45}{25}=\frac{9}{5} \\ b_2^2=\frac{45}{90}=\frac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b_1=\frac{3}{\sqrt5} \\ b_2=\frac{1}{\sqrt2} \end{array}\right.$

Если $b_1=\frac{3}{\sqrt5}$, то $a_1=\frac{12}{\sqrt5}$; Если $b_2=\frac{1}{\sqrt2}$, то $a_2=\frac{9}{\sqrt2}$

Тогда: $x_1-6=\frac{12}{\sqrt5} \Rightarrow x_1=\frac{6\sqrt5+12}{\sqrt5}=\frac{30+12\sqrt5}{5}$

$x_2-6=\frac{9}{\sqrt2} \Rightarrow x_2=\frac{6\sqrt2+9}{\sqrt2}=\frac{12+9\sqrt2}{2}$

$2y_1-1=\frac{3}{\sqrt5} \Rightarrow y_1=\frac{\sqrt5+3}{2\sqrt5}=\frac{5+3\sqrt5}{10}$

$2y_2-1=\frac{1}{\sqrt2} \Rightarrow y_2=\frac{\sqrt2+1}{2\sqrt2}=\frac{2+\sqrt2}{4}$

Учитывая ограничения: $x-12y\geq0$:

$\cancel{\left(\frac{30+12\sqrt5}{5}; \frac{12+9\sqrt2}{2}\right): \frac{30+12\sqrt5}{5}-\overset{6}{12}\frac{(12+9\sqrt2)}{2}=\frac{30+12\sqrt5-30\cdot12-30\cdot9\sqrt2}{5}<0}$

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$\frac{9}{2}=2\frac{(12+9\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}{84}-3(2+\sqrt{2})-\frac{12+9\sqrt{2}}{2}+6$

$\frac{9}{2}=\frac{24+18\sqrt{2}+12\sqrt{2}+18}{4}-6-3\sqrt{2}-6-\frac{9\sqrt{2}}{2}+6$

$\frac{9}{2}=6+\frac{9\sqrt{2}}{2}+3\sqrt{2}+\frac{9}{2}-6-3\sqrt{2}-6-\frac{9\sqrt{2}}{2}+6$

3) $10x+|x^2-10x|^{\log_3 4}\geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

~~логарифм. по осн 3.~~

$|x^2-10x|^{\log_3 4}\geq x^2-10x+5^{\log_3-(x^2-10x)}$ $\cancel{x^2-10x=t}$

$\cancel{|t|^{\log_3 4}\geq t+5^{\log_3-t}}$ $10x-x^2\geq 0$

$(10x-x^2)^{\log_3 4}-(10x-x^2)\geq 5^{\log_3(10x-x^2)}$ $\Downarrow$

$x^2-10x\leq 0$

$10x-x^2=t$ модули со знаком "-"

$t^{\log_3 4}-t\geq 5^{\log_3 t}$ $x(x-10)<0$ $x\in(0;10)$

$t^{(\log_3 4-1)}\geq 5^{\log_3 t}$ логарифм по осн. 3

$\log_3 t\cdot(\log_3 4-1)\geq\log_3 t\cdot\log_3 5$

$\log_3 t(\log_3 4-1-\log_3 5)\geq 0$

$\log_3 t\geq 0$

$\log_3(10x-x^2)\geq 0$

$10x-x^2\geq 1$

$\begin{array}{r}24\\ \times\ 4\\ \hline 96\end{array}$

$x^2-10x+1\leq 0$

$D=100-4=96=4\cdot 24=4\cdot 4\cdot 6=(4\sqrt{6})^2$

$x=\frac{10+4\sqrt{6}}{2}=5+2\sqrt{6}$

$x=5-2\sqrt{6}$

$5-2\sqrt{6}\vee 0$

$-2\sqrt{6}\vee -5$

$x\in[5-2\sqrt{6};5+2\sqrt{6}]$

$|24|<|25|\Rightarrow 5-2\sqrt{6}>0$

$5+2\sqrt{6}\vee 10$

$2\sqrt{6}\vee 5$

$2\sqrt{6}<5\Rightarrow 2\sqrt{6}<10$ Ответ: $[5-2\sqrt{6};5+2\sqrt{6}]$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

к №2

$\left(\frac{30+12\sqrt5}{5}; \frac{5+3\sqrt5}{10}\right)$: $\frac{30+12\sqrt5}{5} - \frac{\overset{6}{\cancel{12}}(5+3\sqrt5)}{\cancel{10}\,5} = \frac{30+12\sqrt5-30-18\sqrt5}{5} = -\frac{6\sqrt5}{5}$ - не уровл., т.к <0

$\left(\frac{12+9\sqrt2}{2}; \frac{2+\sqrt2}{4}\right)$: $\frac{12+9\sqrt2}{2} - \frac{\overset{6}{\cancel{12}}(2+\sqrt2)}{\cancel{4}\,2} = \frac{12-12+9\sqrt2-6\sqrt2}{2} = \frac{3\sqrt2}{2}$ - удовл., т.к >0

Ответ: $\left(\frac{12+9\sqrt2}{2}; \frac{2+\sqrt2}{4}\right)$.

<u>№3</u> $10x+|x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2+5^{\log_3 (10x-x^2)}$

Ограничение: $10x-x^2>0$ (1), следовательно, $x^2-10x<0$, тогда модуль $|x^2-10x|$ всегда раскрывается со знаком „$-$"

$(10x-x^2)^{\log_3 4}-(10x-x^2) \geq 5^{\log_3(10x-x^2)}$; Пусть $(10x-x^2)=t$

$t\left(t^{\log_3 4-1}-1\right) \geq 5^{\log_3 t}$ логарифмируем по основанию 3

$\cancel{\log_3 t+\log_3 t}$ $\log_3\left(t\left(t^{\log_3 4-1}-1\right)\right) \geq \log_3 t\cdot\log_3 5$

$\log_3 t+\log_3\left(t^{\log_3 3}-1\right)-\log_3 t\cdot\log_3 5 \geq 0$

$(\log_3 t)(1-\log_3 5)+\log_3(t-1) \geq 0$

$\log_3(t-1)-\log_3(t)^{(1-\log_3 5)} \geq 0$

$\frac{t-1}{t^{1-\log_3 5}} \geq 0 \Rightarrow t \geq 1$, т.к. $t^{1-\log_3 5} \neq 0$

$10x-x^2 \geq 1$

$10x-x^2-1 \geq 0$

$x^2-10x+1 \geq 0$

$D=96=(4\sqrt6)^2$

$x_1=\frac{10+4\sqrt6}{2}=5+2\sqrt6$

$x_2=5-2\sqrt6$

из (1) $x\in(0;10)$

Сравним x_1 и x_2 с границами

$5-2\sqrt6 \vee 0$

$|2\sqrt6| \vee |5|$

$24<25 \Rightarrow 5-2\sqrt6>0$

$5+2\sqrt6 \vee 0$

$2\sqrt6 \vee 5 \Rightarrow 2\sqrt6+5<10$

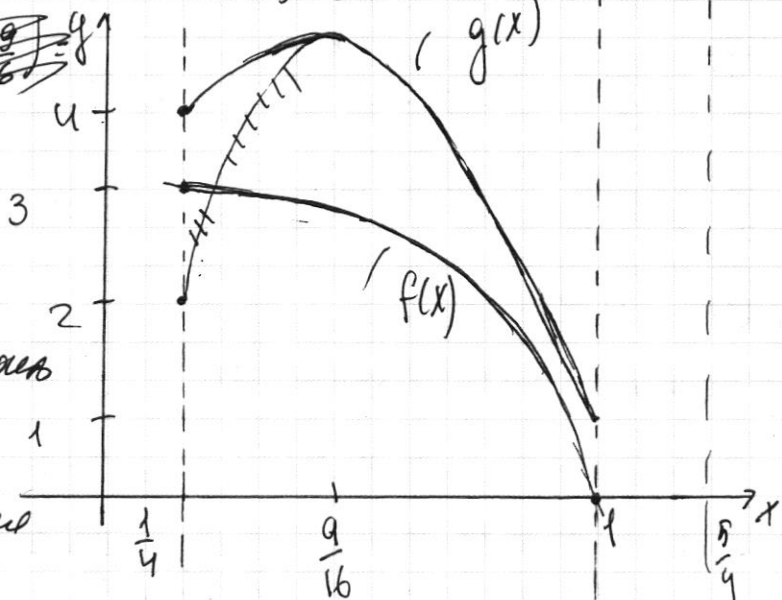
Ответ: $[5-2\sqrt6; 5+2\sqrt6]$

№6

$f(x) = \frac{16x-16}{4x-5} = 4 + \frac{4}{4x-5}$ $f(1) = 0$; $f(\frac{1}{4}) = 3$; асимптота $x = \frac{5}{4}$; $y = 4$

$g(x) = -32x^2 + 36x - 3$; вершина: $x_0 = \frac{-36}{32(-2)} = \frac{18}{32} = \frac{9}{16}$

$g(1) = 1$; $g(\frac{1}{4}) = 4$; ~~$g(\frac{9}{16}) =$~~



$y = ax + b$ − прямая,

~~должна касаться графика f(x)~~, или

которая должна проходить через т. $(\frac{1}{4}; 3)$ или $(1;1)$ (а)

или т. $(\frac{1}{4}; 4)$ и т. $(1;1)$, (б)

не пересекаясь или касаясь графика $f(x)$

(а): $\begin{cases} 3 = \frac{a}{4} + b \\ 1 = a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 - b \\ 3 = \frac{1-b}{4} + b \end{cases}$

$3 \cdot 4 = 1 - b + 4b$

$11 = 3b$

$b = \frac{11}{3} \Rightarrow a = -\frac{8}{3}$

Проверим пересечение с $f(x)$:

$4 + \frac{4}{4x-5} = -\frac{8}{3}x + \frac{11}{3}$

$\frac{4}{4x-5} + \frac{8x}{3} = \frac{11}{3} - 4$

$\frac{12 + 32x^2 - 40x + 4x - 5}{3(4x-5)} = 0$

$32x^2 - 36x + 7 = 0$

$\frac{D}{4} = 324 - 224 > 0$ − не подходит

(б): $\begin{cases} 4 = \frac{a}{4} + b \\ 1 = a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 - b \\ 4 = \frac{1-b}{4} + b \end{cases}$

$16 = 1 - b + 4b$

$15 = 3b \Rightarrow b = 5 \Rightarrow a = -4$

Проверим кас. с $f(x)$:

$4 + \frac{4}{4x-5} = -4x + 5$

$-1 + \frac{4}{4x-5} + 4x = 0$

$\frac{5 - 4x + 4 + 16x^2 - 20x}{4x-5} = 0$

$16x^2 - 24x + 9 = 0$

$\frac{D}{4} = 144 - 144 = 0$

касается, значит,

$y = -4x + 5$ − единственная прямая, удовл. условию.

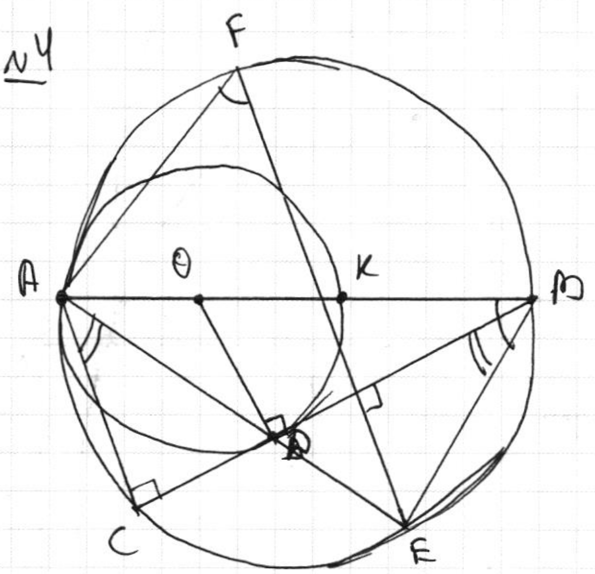
Ответ: $(-4; 5)$

☐ черновик ☒ чистовик Страница № 3

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



Дано:

Ω, ω – окружности

AB – диаметр Ω

BC – кас. к ω

$FE \perp BC$

$CD = \frac{15}{2}$

$BD = \frac{17}{2}$

Найти:

$R = ?$ – радиус Ω

$r = ?$ – радиус ω

$\angle AFE = ?$

S_{AFE} – ?

1) Проведем из центра ω (т. O) радиус в т. касания, тогда по св-ву $OD \perp BC$

2) $\angle ACB = 90^\circ$, т.к. опирается на диаметр $\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle BOD$ по двум углам, тогда: $\frac{2R}{BD+CD} = \frac{2R-r}{BD}$

3) По т. о касательной и секущей: $BD^2 = BK \cdot BA = (2R-2r)\cdot 2R$

4) Из (2): $2R\cdot\frac{17}{2} = (2R-r)\left(\frac{17+15}{2}\right) \Rightarrow r = \frac{15}{16}R$, подставим в (3)

$\frac{289}{4} = 4R^2 - \frac{4R\cdot 15R}{\cancel{4}64} = \frac{16R^2-15R^2}{4} \Rightarrow R^2 = 289 \Rightarrow R = 17$, тогда $r = \frac{255}{16}$

4) $\triangle ABC$: $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{4\cdot 17^2 - 16^2} = \sqrt{4\cdot 289 - 256} = 30$

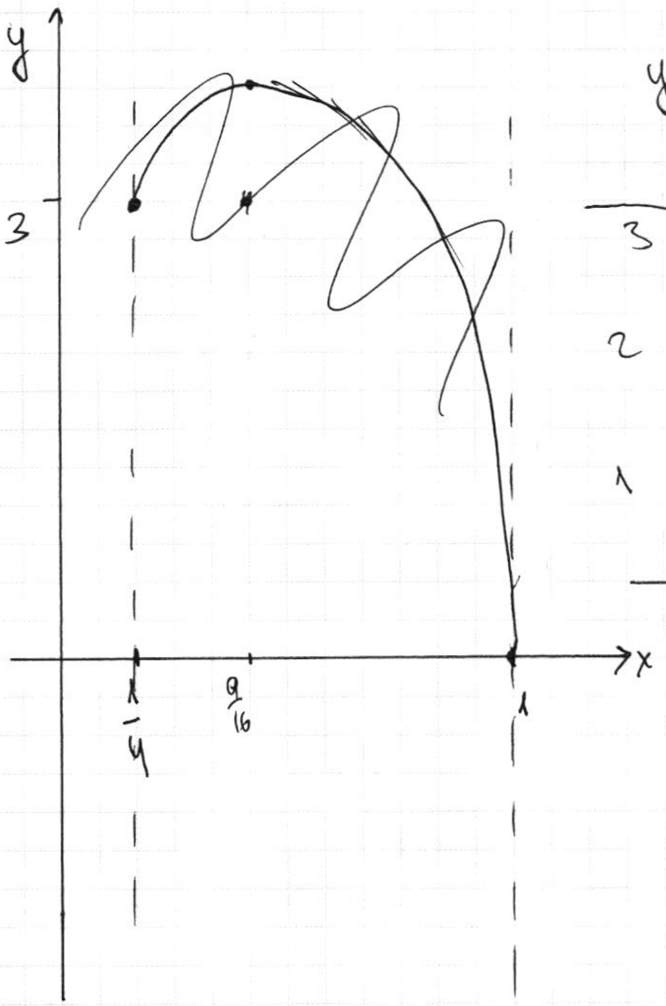
5) Т.к. углы, опирающиеся на равные дуги равны, то:

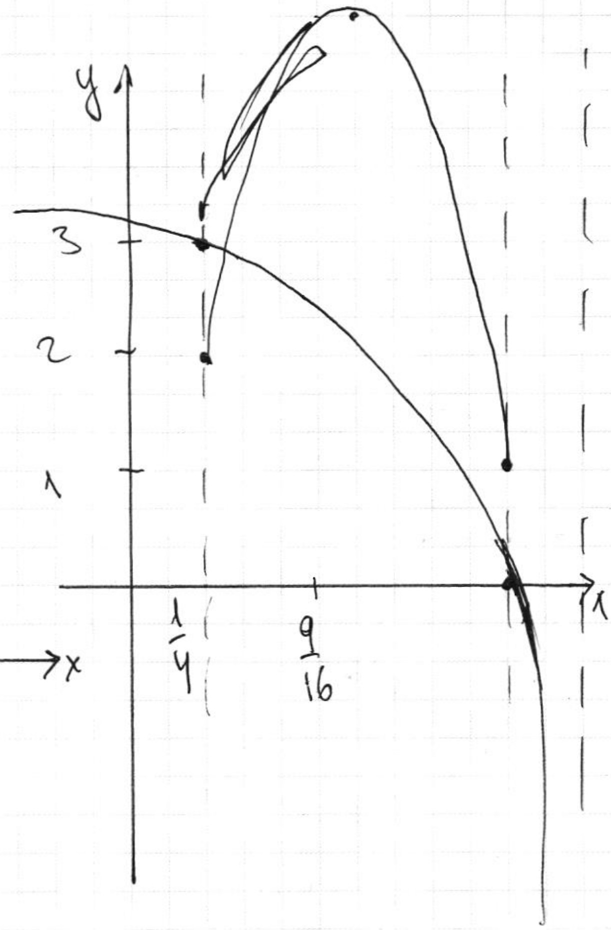
$\angle AFE = \angle ABE$; $\angle CBE = \angle ACE$

6) $tg\angle ABC = \frac{AC}{BC} = \frac{30}{32} = \frac{15}{16}$; $tg\, CBE = tg\, ACE = \frac{CD}{AC} = \frac{15}{2\cdot 30} = \frac{1}{4}$

И $\angle AFE = \angle ABE = \angle ABC + \angle EBC \Rightarrow tg\, AFE = \frac{tg\, ABC + tg\, EBC}{1 - tg\, ABC \cdot tg\, EBC} =$

$= \frac{\frac{15}{16}+\frac{1}{4}}{1-\frac{15}{16}\cdot\frac{1}{4}} = \frac{\frac{15+4}{16}}{1-\frac{15}{64}} = \frac{19\cdot 64}{16\cdot 49} = \frac{76}{49} \Rightarrow \angle AFE = arctg\frac{76}{49}$


y
3
x
1/4
9/16
1


y
3
2
1
x
1/4
9/16
1

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

к №4

Ответ: радиус большей окружности $R = 17$

радиус меньшей окружности $r = \frac{255}{16}$

$\angle AFE = \operatorname{arctg} \frac{76}{49}$

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(10x-x^2)^{\log_3 4}-(10x-x^2)\geq 5^{\log_3(10x-x^2)}$

$(10x-x^2)\left((10x-x^2)^{\log_3 3}-1\right)\geq 5^{\log_3(10x-x^2)}$

$(10x-x^2)\left((10x-x^2)-1\right)\geq 5^{\log_3(10x-x^2)}$

$\overset{\shortparallel}{b}$ $\quad \log_3 b+\log_3 b-1\geq \log_3 5\cdot\log_3 b$

$\cancel{\log_3 b}$ $\log_3(b-1)\geq \log_3 b\,(\log_3 5-1)$

$\log_3 b-1\geq \log_3 b^{(\log_3 5-1)}$

$\cancel{b-1\geq b^{\log_3 5-1}}$

$\cancel{b-b^{\log_3 5-1}\geq 1}$

$\cancel{b\left(1-b^{\log_3 5-2}\right)\geq 1}$

$10x-x^2+(10x-x^2)^{\log_3 4}\geq 5^{\log_3(10x-x^2)}$

$b+b^{\log_3 4}\geq 5^{\log_3 b}$

$\cancel{b+b}$ $b\left(1+b^{\log_3 3}\right)\geq 5^{\log_3 b}$

$b(1+b)\geq 5^{\log_3 b}$

$5^{\log_3 b}=\cancel{\ }$

$\cancel{=\log_3 5\log_3 b}$

$\log_3 b+\log_3(b+1)\geq \log_3 5\cdot\log_3 b$

$(\log_3 b)(1-\log_3 5)+\log_3(b+1)\geq 0$

$\cancel{\sin\left(2(\alpha+\beta)\right)=-\frac{1}{\sqrt5}}$ $\quad \sin($ $\quad \sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin\left((2\alpha+2\beta)+\beta\right)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}$

$\sin 2(\alpha+\beta)=2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)=2(\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha)(\cos\alpha\cos\beta-$
$-\sin\alpha\sin\beta)=\cancel{2(\sin\alpha\cos^2\beta+\sin\alpha}=2(\sin\alpha\cos\alpha\cdot\cos^2\beta+\sin\beta\cos\beta\cdot\cos^2\alpha-$
$-\sin\beta\cos\beta\,\cancel{\cos}\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha\sin^2\beta)=$

$=2\left(\sin\alpha\cos\alpha\left(\cos^2\beta-\sin^2\beta\right)+\sin\beta\cos\beta\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)\right)=$

$=\cancel{2}\sin 2\alpha\cdot\cos 2\cancel{\beta}+\sin 2\beta\cdot\cos 2\cancel{\beta}\alpha=\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha$

$\sin(2\alpha+2\beta)=2\sin(\alpha+2\beta)\cos(\alpha+2\beta)=2(\sin\alpha\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos\alpha)(\cos\alpha\cos 2\beta-$
$-\sin\alpha\sin 2\beta)=2(\sin\alpha\cos\alpha\cdot\cos^2 2\beta+\sin 2\beta\cos 2\beta\cos^2\alpha-\cos 2\beta\sin 2\beta\sin^2\alpha-$
$-\cos\alpha\sin\alpha\sin^2 2\beta)=\sin 2\alpha\cdot\cos^2 2\beta+\sin 2\beta\cdot\cos^2\alpha-\sin 2\beta\cdot\sin^2\alpha-\sin 2\alpha\sin^2\beta=$
$=\sin 2\alpha(\cos^2 2\beta-\sin^2 2\beta)+\sin 4\beta(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=\sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta+\sin 4\beta\cdot\cos 2\alpha$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha\cdot\cos$

☒ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$

$10x - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 - 10x < 0 \Rightarrow |x^2 - 10x| = \cancel{10x} - x^2$

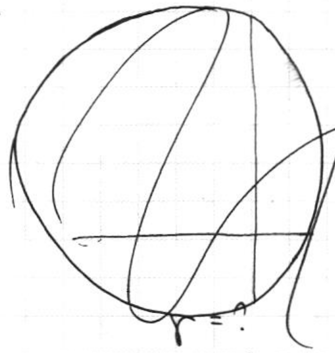
$10x - x^2 + (10x - x^2)^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3(10x - x^2)}$; $10x - x^2 = b$

$\log_3 (b + b^{\log_3 4}) \geq \log_3 b \cdot \log_3 5$

$\log_3 b + b^{\log_3 4} \geq \log_3 b^{\log_3 5}$

$b + b^{\log_3 4} - b^{\log_3 5} \geq 0$

$\cancel{b + b^{\log_3 4}(1 - b^{\log_3 5})}$



$r = ?$

$R = ?$

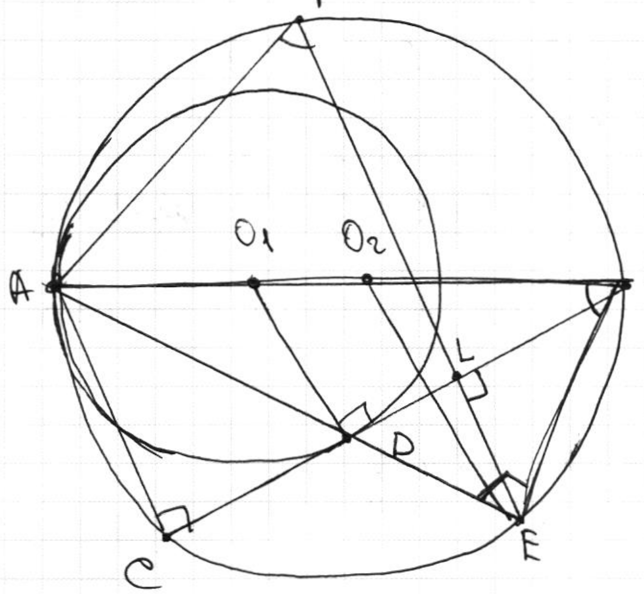
$\angle AFE = ?$

$S_{AEF} = ?$

$\begin{array}{r} 17 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ +17 \\ \hline 289 \end{array}$

$CD = \frac{15}{2}$

$BD = \frac{17}{2}$



1) $BD^2 = (2R - 2r) \cdot 2R$

$\cancel{(2R - r)^2 = r^2 + BD^2}$

$\angle ACB$ – прямой, т.к. опирается на диаметр.

$\triangle BDO \sim \triangle ABC$

$$\frac{2R}{BD + CD} = \frac{2R - r}{BD}$$

$\begin{array}{r} 15 \\ \times 17 \\ \hline 105 \\ +15 \\ \hline 255 \end{array}$

$\cancel{BD^2 = 2R^2 - 2Rr}$

$$\begin{cases} BD^2 = 4R^2 - 4Rr \\ 2R \cdot BD = (2R - r)(BD + CD) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{289}{4} = 4R^2 - 4Rr \\ 2R \cdot \frac{17}{2} = (2R - r)\left(\frac{17}{2} + \frac{15}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{289}{4} = 4R^2 - 4Rr \\ 17R = 32R - 16r \end{cases}$$

$\cancel{r = (32 - 17)R = 15R \quad \frac{289}{4} = 4R^2 -}$ $\quad r = \frac{15}{16} R$

$\cancel{\frac{289}{4} = 4R^2 - 60}$

$$\frac{289}{4} = 4R^2 - \frac{4R^2 \cdot 15}{16} = \frac{16R^2 - 15R^2}{4} = \frac{R^2}{4}$$

$R^2 = 289 \Rightarrow R = 17 \Rightarrow r = \frac{15 \cdot 17}{16} = \frac{255}{16}$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} \dfrac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \quad (1) \\ -32x^2+36x-3 \ge ax+b \end{cases} \Rightarrow \quad \cancel{16(x-1)}$$

(1) $\dfrac{16x-16}{4x-5} - \dfrac{(ax+b)(4x-5)}{} \le 0$

$$\frac{16x-16-4ax^2-4bx+5ax-5b}{4x-5} \le 0$$

$$\frac{-4ax^2-(4b-16-5a)x-16-5b}{4x-5} \le 0$$

$$\frac{4ax^2+(4b-16-5a)x+5b+16}{4x-5} \ge 0$$

$\cancel{D=(4b-5a-16)^2-4\cdot 4a(5b+16)=16b^2+25a^2+256-20ab-64a}$

$((4b-5a)-16)^2=(4b-16-5a)(4b-16-5a)=16b^2-64b-20ab-64b+256+80a-$
$-20ab+80a+25a^2=16b^2-128b-40ab+160a+25a^2-$

$-20ab-64a=16b^2-128b-60ab+96a+25a^2$

$f(ab)=f(a)+f(b)$ $\quad 2\le x\le 25$ $\quad 4=$ $\dfrac{16\cdot 9}{144}$ $\quad \dfrac{4-16}{1-56}$ $\quad \dfrac{18\cdot 18}{144}$

$f(p)=[p/4]$

$f(x/y)<0$

$f(x)=\dfrac{16x-16}{4x-5}=4+\dfrac{4}{4x-5}$ $\quad f(1)=4+\dfrac{4}{-1}=0$; $f\left(\frac{1}{4}\right)=4+\dfrac{4}{-4}=3$ $\quad \dfrac{-12}{-3}=4$

$g(x)=-32x^2+36x-3$; вершина: $\dfrac{-36}{-2\cdot 32}=\dfrac{9}{16}$ $\quad \dfrac{18}{32}=\dfrac{9}{16}$

$g(1)=-32+36-3=1$; $g\left(\frac{1}{4}\right)=-\dfrac{32}{8}+\dfrac{36}{4}-3=-4+9-3=2$

$g\left(\frac{9}{16}\right)=\dfrac{-32\cdot 81}{16\cdot 16}+\dfrac{36\cdot 9}{16}=\dfrac{81}{8}+\dfrac{81}{4}-3=\dfrac{3\cdot 81-24}{8}=\dfrac{3(81-8)}{8}=$

$=\dfrac{73\cdot 3}{8}$ $\quad \cancel{16x-20x+4}$ $\quad 4+\dfrac{4}{-4}=3$ $\quad \dfrac{32\cdot 7}{224}$

$-\dfrac{32\cdot 1}{16}-2+9-3=4$ $\quad \dfrac{11}{3}-\dfrac{12}{3}$

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos ABC = \frac{BC}{AB}$

$\cos EBC = \cos EAC$

$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2}$

$tg\, ABC = \frac{AC}{BC}$; $tg\, EBC = tg\, CAE = \frac{CD}{AC}$

$64 - 15 = 49$

$19 \cdot 4 = 40 + 36 = 76$

$16 \cdot 16 = 96 + 16 = 256$

$289 \cdot 4 = 1156$; 3256; 900

$(10x - x^2)^{\log_3 5}$ $\parallel$ $5^{\log_3(10x-x^2)}$

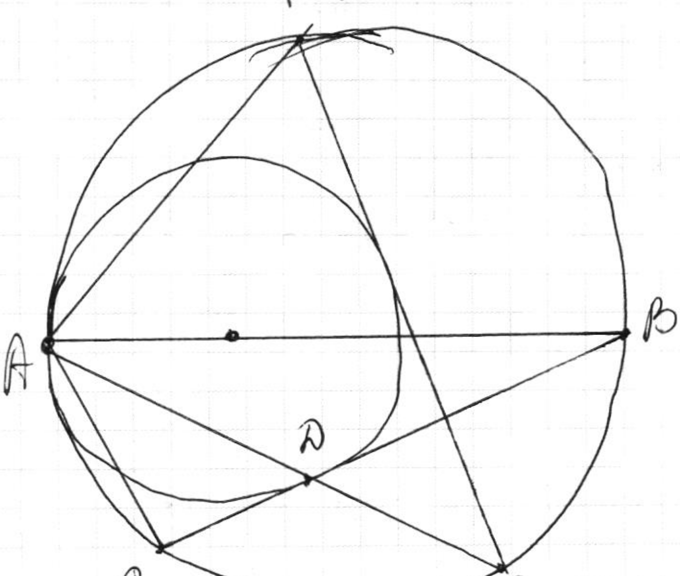
$(10x - x^2) + (10x - x^2)^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3(10x - x^2)}$

$t + t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t} = t^{\log_3 5}$

$\log_3(t + t^{\log_3 4}) \geq \log_3 5 \cdot \log_3 t$

$6 + 6^{\log_3 4} - 6^{\log_3 5} \geq 0$

$\frac{t-1}{t^{1-\log_3 5}} \geq 0$



$BD^2 = (D - d) \cdot D$

$\frac{2R}{16} = \frac{4R - 2r}{17}$

$\frac{34R}{16} = 4R - 2R$

$\frac{34R - 64R}{16} = -2r$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)