МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg} \alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant \left|x^2 + 18x\right|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 24$, $1 \leqslant y \leqslant 24$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 - 30x - 17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$ (1) $\quad \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$ (2)

преобразуем (2) в произведение:

① $2\sin\frac{4\alpha+4\beta}{2}\cos\frac{4\beta}{2} = -\frac{4}{5} \Rightarrow 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{4}{5} \Rightarrow \cos 2\beta = -\frac{2}{5}\cdot(-\sqrt5) = \frac{2}{\sqrt5}$

② $\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5} \Rightarrow$ по ОТТ $\sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{4}{5}} = \pm\frac{1}{\sqrt5}$

рассмотрим случаи: (1)

$$\left[\begin{array}{l} \sin 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5} + \cos 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5} - \cos 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1 \\ 2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1\end{array}\right.$$

перейдём от 2α к α:

$$\left[\begin{array}{l} 4\sin\alpha\cos\alpha \cancel{-1} + 2\sin^2\alpha = \cancel{-1} \\ 4\sin\alpha\cos\alpha \cancel{-1} + 2\cos^2\alpha = \cancel{-1}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin^2\alpha = 0 \\ 4\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha = 0\end{array}\right.$$; разделим на $\cos^2\alpha \neq 0$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{(2\cos\alpha + \sin\alpha)}{\cos\alpha} = 0 \\ \frac{2\cos\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{(2\sin\alpha + \cos\alpha)}{\cos\alpha} = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\operatorname{tg}\alpha\,(2+\operatorname{tg}\alpha) = 0 \\ 2\,(2\operatorname{tg}\alpha+1) = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\alpha = -2 \\ \operatorname{tg}\alpha = 0 \\ \operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2}\end{array}\right.$$ при $\cos\alpha \neq 0$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\alpha = -2 \\ \operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2} \\ \operatorname{tg}\alpha = 0\end{array}\right.$ при $\cos\alpha \neq 0$

№2

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2} \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2-2y+2 = \sqrt{x(y-1) - 2(y-1)} \\ (x^2-4x+4) + 9(y^2-2y+1) = 25\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2) - 2(y-1) = \sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2 + 9(y-1)^2 = 25\end{cases}$$

проведём замену: пусть $(x-2) = a$, $(y-1) = b$ $\left[\begin{array}{l} \text{ОДЗ: } ab \geq 0 \\ a-2b \geq 0\end{array}\right]$

$\begin{cases} a-2b = \sqrt{ab} \\ a^2+9b^2 = 25\end{cases}$; возведём обе части 1-го уравн. в квадрат / возможны посторонние корни) $\begin{cases} a^2 - 4ab + 4b^2 = ab \\ a^2 + 9b^2 = 25\end{cases} \Leftrightarrow$

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-5ab+4b^2=0 \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$$

решим 1ое уравнение как квадратное относительно a:

$a^2-5ab+4b^2=0 \qquad D=25b^2-16b^2=9b^2 \Rightarrow \sqrt{D}=3b$

$a_{1,2}=\dfrac{5b\pm 3b}{2} \begin{matrix}\nearrow 4b \\ \searrow b\end{matrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=4b \\ a=b \end{array}\right.$

подставим результат во 2ое уравн системы:

$$\left[\begin{array}{l} 16b^2+9b^2=25 \Leftrightarrow b^2=1 \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} b=1 \ ; a=4 & (1) \\ b=-1 \ ; a=-4 & (2) \end{array}\right. \\ b^2+9b^2=25 \Leftrightarrow b^2=\frac{5}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} b=-\sqrt{\frac{5}{2}} \ ; a=-\sqrt{\frac{5}{2}} & (3) \\ b=+\sqrt{\frac{5}{2}} \ ; a=\sqrt{\frac{5}{2}} & (4) \end{array}\right. \end{array}\right.$$

проверим корни (1) - (4):

(1) $ab=4\geq 0$, $a-2b=2\geq 0$ - подходит

(2) $ab=4\geq 0$, $a-2b=-2<0$ - не подходит

(3) $ab=\frac{5}{2}\geq 0$, $a-2b=\sqrt{\frac{5}{2}}\geq 0$ - подходит

(4) $ab=\frac{5}{2}\geq 0$, $a-2b=-\sqrt{\frac{5}{2}}<0$ - не подходит

подошли корни (1) и (3); проведём обратную замену

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-2=4 \\ y-1=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x-2=-\sqrt{\frac{5}{2}} \\ y-1=-\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2-\sqrt{\frac{5}{2}} \\ y=1-\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(2-\sqrt{\frac{5}{2}}; 1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right); (6;2)$

№3

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$$

ОДЗ: $x^2+18x>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;-18)\cup(0;+\infty)$

проведем замену $x^2+18x=t>0$; $|t|=t$

$5^{\log_{12}t}+t\geq t^{\log_{12}13}$

$5^{\frac{\log_5 t}{\log_5 12}}+t\geq t^{\log_{12}13}$ (по св-ву логарифма)

$t^{\log_{12}5}+t\geq t^{\log_{12}13}$ ← вычислить t при том, что слева и справа - монотонно возрастающие ф-ции $\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\text{общая точка у них может быть ОДНА} \\ \text{они совпадут}\end{array}\right.$

$t=1$ подходит

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №2

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4.

Дано:

Ω кас. $\omega = A$

AB - диаметр Ω ; $C \in \Omega$

BC касается $\omega = D$

$AD \cap \Omega = E$

$E \in a$; $a \perp BC$; $a \cap \Omega = F$

$BD = 17$; $CD = 8$

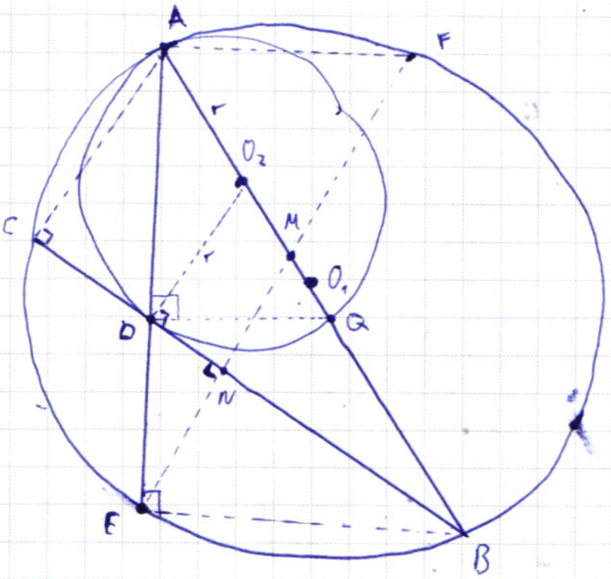
$R = ?$ $r = ?$

$\angle AFE = ?$

$S_{\Delta AEF} = ?$

Решение:

пусть ц. $\Omega = O_1$, ц. $\omega = O_2$



1) A, O_1 и O_2 лежат на одной прямой (из аксиомы о прямой и перпендикуляре), т.к. у окр. Ω и ω общ. касат. через т. A.

2) AB - диаметр Ω => $\angle ACB = 90°$

$O_2D \perp BC$ (радиус в т. касания) => $\angle O_2DB = 90°$

по усл. $EF \perp BC$ => $\angle FNB = 90°$

=> $\Delta ACB \sim \Delta O_2DB \sim \Delta MNB$ (по 2 углам)

3) из п.2 => $\frac{O_2B}{AB} = \frac{DB}{CB} = \frac{17}{25}$; $O_2B = 2R - r$; $AB = 2R$; итого:

$\frac{2R-r}{2R} = \frac{17}{25}$ => $50R - 25r = 34R$ => $16R = 25r$ => $R = \frac{25}{16}r$

из ΔO_2DB по Th Пифагора $DB^2 = -O_2D^2 + O_2B^2$ => $17^2 = (2R-r)^2 - r^2 = \left(\frac{34}{16}r\right)^2 - r^2 = \frac{(1156-256)r^2}{256} = \frac{900}{256}r^2$ => $r^2 = \frac{17^2 \cdot 16^2}{30^2}$ => $r = \frac{17 \cdot 16}{30} = \frac{136}{15}$; $R = \frac{25}{16} \cdot \frac{136}{15} = \frac{85}{6}$

$r = \frac{136}{15}$

$R = \frac{85}{6}$

4) по св-ву хорд $AD \cdot DE = CD \cdot BD = 136$

$\Delta ADQ \sim \Delta AEB$ (по 2 углам) => $\frac{AD}{AE} = \frac{AQ}{AB} = \frac{r}{R} = \frac{16}{25}$ => т.к. $AE = AD + DE$, то $\frac{AD}{DE} = \frac{16}{9}$

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$$\begin{cases} AD\cdot DE = 136 \\ \frac{AD}{DE} = \frac{16}{9} \end{cases} \Rightarrow \frac{16}{9}DE^2 = 136 \Rightarrow DE = \sqrt{\frac{17\cdot 136\cdot 9}{\frac{16}{2}}} = 3\sqrt{\frac{17}{2}} \Rightarrow AD = \frac{16}{3}\sqrt{\frac{17}{2}} \Rightarrow AE = \frac{25}{9}\sqrt{\frac{17}{2}}$$

(5) по Тh sin: $\frac{AE}{2\sin\angle AFE} = R \Rightarrow \sin\angle AFE = \frac{AE}{2R} \Rightarrow \sin\angle AFE = \frac{\cancel{6}^{1}}{\cancel{85}_{17}} \cdot \frac{\cancel{25}^{5}}{\cancel{18}_{3}}\sqrt{\frac{17}{2}} = \frac{5}{3}\sqrt{\frac{1}{34}} =$

$= \sqrt{\frac{25}{306}} \Rightarrow \angle AFE = \arcsin\left(\sqrt{\frac{25}{306}}\right)$

1) $r = \frac{136}{15}$

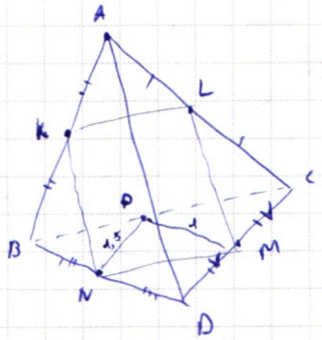
$R = \frac{85}{6}$

2) $\angle AFE = \arcsin\left(\sqrt{\frac{25}{306}}\right)$

(6) $O_1Q = R - (2R - 2r)$

O

№7.



Дано: пирамида ABCD

K, L, M, N, P - середины соотв. сторон

A, K, L, M, N, P принадл. сфере

~~ABC~~, BD = 2, CD = 3

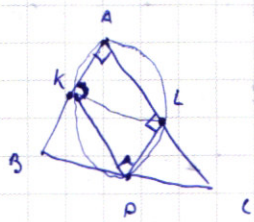
Найти:

BC = ?

r_{min} = ?

Лемма 1.

(1) рассмотрим пл-ть (ABC)



сфера пересекает пл-ть по окр-ти

LP ∥ AK, KP ∥ AC (т.к. ср. линии) ⇒ AKLP - параллелограмм. т.к. AKLP вписан в окр., то AKLP - прямоугольник.

Лемма 2.

(2) KN ∥ AD ∥ LM, KL ∥ BC ∥ NM ⇒ KLMN - параллелограмм.

K, L, M, N лежат в одной пл-ти ⇒ KLMN вписан в окр. ⇒ KLMN - прямоугольник. $KL = \frac{1}{2}BC = \sqrt{KP^2 + LP^2} = \sqrt{LN^2 - KN^2}$

☐ черновик ☒ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

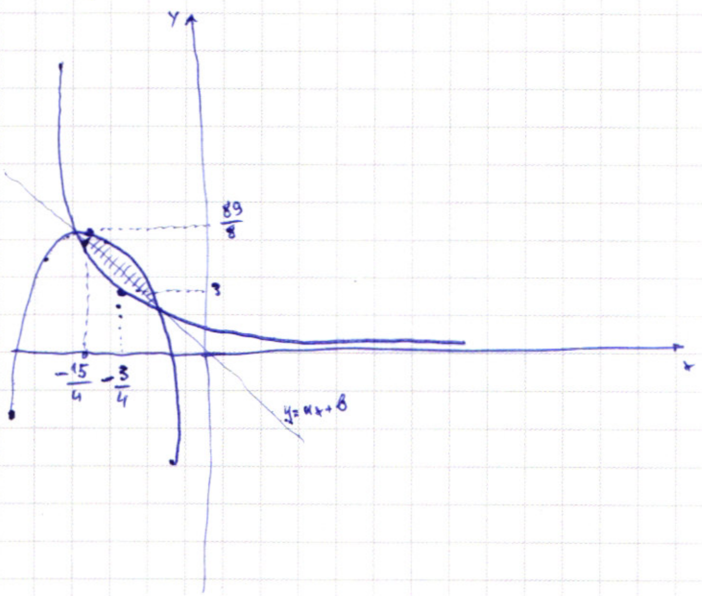
№6.

$$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$$

$$\frac{3}{1} + \frac{2}{4x+3} \le ax+b \le -8\left(x+\frac{15}{4}\right)^2+\frac{89}{8} \quad (*)$$

$\boxed{\text{утверждение.}}$ требуется посчитать угл. знач. производной (*), чтобы выполнялось условие

рисунок:



№5

$$f(x/y) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$$

делители → сумма

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases};$$

$\frac{12+13}{5}$ $\log_{12}12\cdot\log_{12}13$

$\log_2 4$ $\log_2 16$ $\log_2$

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{x(y-1)-2(y-1)} \\ (x^2-4x+4)+(9y^2-18y+9)=25 \end{cases};\quad \begin{cases} x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$$

ОДЗ:
$(x-2)(y-1)\geq 0$
$(x-2)-2(y-1)\geq 0$

$\log_{12}$

$\log_{12}13=\log_{12}5+\log_{12}\frac{13}{5}$ $x-2-2y+2$

$x-2=a$

$y-1=b$

$$\begin{cases} x-2-2(y-1)=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$$

$t^{\log_{12}5}\left(1+t^{\log_{12}\frac{13}{5}}\right)\frac{15}{4}=2\cdot\frac{15}{8}$

$a-2b=\sqrt{ab}$ $ab\geq 0$

$a-2b\geq 0$

$a^2+9b^2=25$

$\frac{12x+11}{4x+3}=3+\frac{2}{4x+3}=3+\frac{1}{2\left(x+\frac{3}{4}\right)}$

$a^2-4ab+4b^2=ab$

$-8x^2-30x-17=-(8x^2+30x+17)=-8\left(x^2+\frac{15}{4}x+\frac{17}{8}\right)$

$a^2+9b^2=25$

$\left(x+\sqrt{\frac{15}{8}}\right)^2$

$a^2-5ab+4b^2=0$

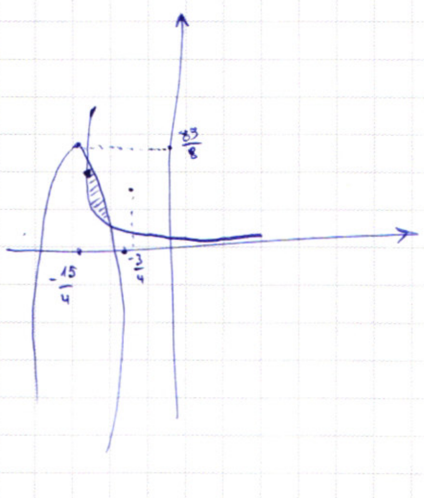
$\frac{225}{64}-\frac{136}{64}=\frac{89}{64}$

$a^2+9b^2=25$

$-8\left(\left(x+\frac{15}{8}\right)^2-\frac{89}{64}\right)=-8\left(x+\frac{15}{4}\right)^2+\frac{89}{8}$

$25b^2-16b^2=9b^2\Rightarrow\sqrt{D}=3b$

$\left[\begin{array}{l} a=4b \\ a=b \end{array}\right.$ $\frac{5b\pm 3b}{2}$ → $4b$, b



пусть $a=4b$

$16b^2+9b^2=25\Rightarrow b^2=1\Rightarrow b=\pm1\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} b=1 \\ a=4\end{cases} \\ \begin{cases} b=-1 \\ a=-4\end{cases}\end{array}\right.$ проверить

пусть $a=b$

$b^2+9b^2=25\Rightarrow b^2=\frac{5}{2}\Rightarrow b=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} a=\sqrt{\frac{5}{2}} \\ b=\sqrt{\frac{5}{2}}\end{cases} \\ \begin{cases} a=-\sqrt{\frac{5}{2}} \\ b=-\sqrt{\frac{5}{2}}\end{cases}\end{array}\right.$ проверить

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$5^{\log_{12} t} + t \geqslant t^{\log_{12} 13}$

$5^{\frac{\log_5 t}{\log_5 12}} = t^{\log_{12} 5}$

$t^{\log_{12} 5} + t \geqslant t^{\log_{12} 13}$

$t^{\frac{\log_t 5}{\log_t 12}}$

$\underbrace{5^{\log_{12} t} + 12^{\log_{12} t}}_{\text{монотонно возр.}} \geqslant \underbrace{13^{\log_{12} t}}_{\text{монотонно возр.}}$

$t \geqslant 13^{\log_{12} t} - 5^{\log_{12} t}$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = [p/4]$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$

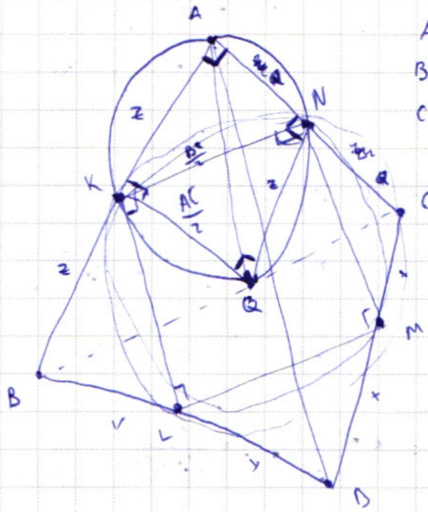
BC=

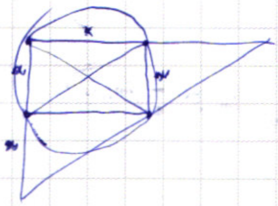
AB=1

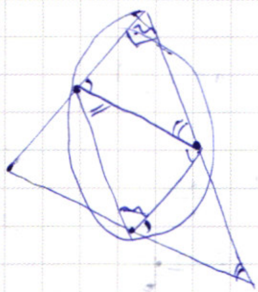
BD=2

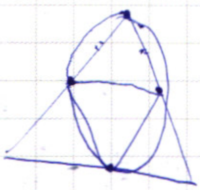
CD=3

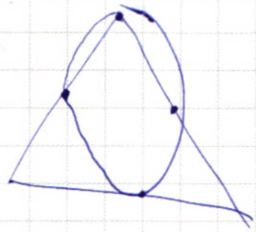
$KN = \frac{1}{2} BC$











$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$

$x^2+18x>0$

$x^2+18x=t>0$

$5^{\log_{12}t} + t \geq t^{\log_{12}13}$

$\cancel{\frac{\sqrt{5}^{\log_5 t}}{5^{\log_5 12}} + t \geq t^{\log_{12}13}}$

$\sin 45^\circ + \sin 135^\circ = \frac{2\sqrt2}{2} = \sqrt2$

$2\sin 90 \cos 45^\circ = \sqrt2$

$2\cos 90$ 0

$\cancel{5^{\frac{\log_5 t}{\log_5 12}} = \sqrt[12]{t} + t \geq t^{\log_{12}13}}$

$\cancel{\sqrt[12]{t} + t \geq t^{\frac{\log_t 13}{\log_t 12}}}$

$\cancel{\sqrt[12]{t} + t \geq \sqrt[12]{13}}$

$5^{\log_{12}t} + t \geq t^{\log_{12}13}$

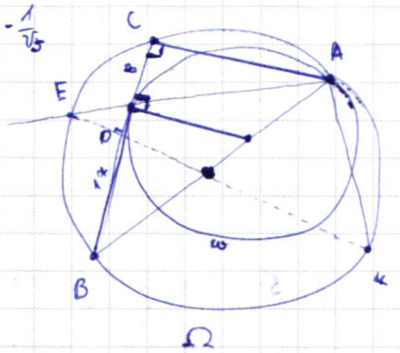
$2\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\cos\frac{4\beta}{2} = -\frac45$

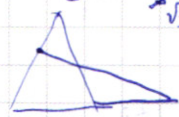
$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac45$

$\frac{2}{\sqrt5}\sin 2\alpha + \frac{1}{\sqrt5}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\frac{1}{\sqrt5}\cos 2\beta = \pm\frac{2}{\sqrt5}$ $\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$

$\sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt5}$





$$\left[\begin{array}{l} 2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1 \\ 2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1 \end{array}\right.$$

$2\cos^2\beta - 1 = \frac{2}{\sqrt5}$

$\cos^2\beta = \frac{\sqrt5+2}{2\sqrt5}$ $\frac{5+2\sqrt5}{10} = \frac12 + \frac{1}{\sqrt5}$

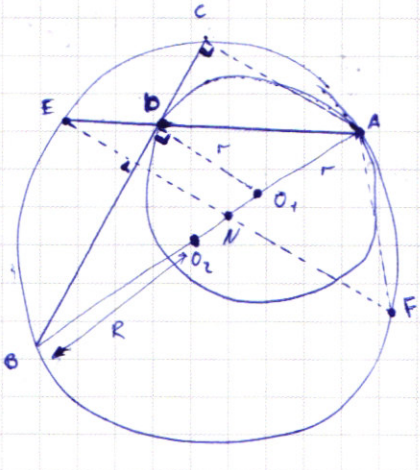
$$\left[\begin{array}{l} 4\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1 = -1 \\ 4\sin\alpha\cos\alpha - 1 + 2\sin^2\alpha = 1 \end{array}\right.$$

$\frac{AD}{DE}\cdot\frac{BD}{1}$

$\frac{AD}{CD} = \frac{BD}{DE} = k$

$BD = 17$

$CD = 8$



$\frac{AD}{DE}\cdot\frac{BD}{CD} = \frac{17^2}{8^2}$

r $\Downarrow$ EN

$\frac{r}{4r} = \frac{17}{25}$

$$\left[\begin{array}{l} 4\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha = 0 \\ 4\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin^2\alpha = 0 \end{array}\right.$$

$\frac{2R-r}{2R} = \frac{17}{25}$

$50R - 25r = 34R$

$34 \times 34 = 136 + 102 = 1156$

$16R = 25r$

$R = \frac{25}{16}r$

$$\left[\begin{array}{l} 2\cos\alpha(2\sin\alpha + \cos\alpha) = 0 \quad |\cos^2\alpha \\ \operatorname{tg} 2\sin\alpha(2\cos\alpha + \sin\alpha) = 0 \quad |\cos^2\alpha \end{array}\right.$$

BD

$\frac{2(2\operatorname{tg}\alpha + 1)}{2\operatorname{tg}\alpha(2+\operatorname{tg}\alpha)}$

$r = \frac{16\cdot17}{30}$

$R = \frac{25\cdot16\cdot17}{16\cdot16} = \frac{85}{6}$

$BD^2 - 17^2 + (2R-r)^2 = r^2$

$r^2 + 289 = \frac{34^2}{256}r^2$

$\frac{1156}{256} - \frac{256}{256}r^2 = 289$

$r^2 = \frac{256\cdot289}{900}$

$r = \frac{16\cdot17}{30} = \frac{8\cdot17}{15}$ $r = \frac{136}{15}$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow \cos(2\alpha+2\beta) = \pm\frac{2}{\sqrt5}$

$\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)} =$

$\sin(2\alpha+2\beta+2\beta)+\sin 2\alpha = -\frac45$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cos2\beta+\sin2\beta\cos(2\alpha+2\beta)+\sin2\alpha = -\frac45$

$\sin2(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} = \cos2(\alpha+\beta) = \pm\frac{2}{\sqrt5}$

$\left[\begin{array}{l} 1-2\sin^2(\alpha+\beta) = \frac{2}{\sqrt5} \\ 1-\sin^2(\alpha+\beta) = -\frac{2}{\sqrt5} \end{array}\right.$

$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y = 12 \end{cases}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha = -\frac45$

$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = -\frac45$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos2\beta = -\frac45$

$\Downarrow$

$\cos2\beta = -\frac{\frac{2}{5}}{\sqrt5}\cdot\left(-\frac{\sqrt5}{2}\right)$

$\cos2\beta = -\frac{2}{\sqrt5} \Rightarrow \sin2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt5}$

$x^2-4xy+4y^2 = xy-x-2y+2$

$x^2-5xy+x+2y+4y^2+2=0$

$x^2-4x+4+9(y^2-2y+1) = 25$

$(x-2)^2+9(y-1)^2 = 25$

$5^{\log_5 t} = t^{\log_{12}5}$

$5^{\log_{12}t}+t^{\log_{12}5}+t \geq t^{\log_{12}13}$

$t^{\log_{12}5}+t^{\log_{12}12} \geq t^{\log_{12}13}$

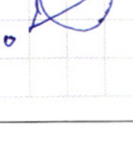
$\log$

$\sin2\alpha\cos2\beta+\sin2\beta\cos2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\left[\begin{array}{l} -\frac{2}{\sqrt5}\sin2\alpha+\frac{1}{\sqrt5}\cos2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \\ -2\sin2\alpha-\cos2\alpha = -1 \end{array}\right.$

AB=1
BD=2
CD=3

△ABD:



△ABC: