МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

из (2): $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$

$-\frac{2}{\sqrt{17}}\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$

$\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$ Если $\sin 2\beta > 0$:

$\sin 2\beta = \sqrt{1-\frac{16}{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}}.$

в (1):

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha + \frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$8\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1 = -1$

$\cos\alpha(4\sin\alpha+\cos\alpha) = 0$

$\cos\alpha = 0$ или $\sin\alpha = -\frac{\cos\alpha}{4}$ $\Rightarrow$ $\left\{\frac{\cos^2\alpha}{16} + \cos^2\alpha = 1\right.$

$\Downarrow$

$tg\,\alpha$ - не определен

$\Downarrow$

не уд. условию задачи

$\cos^2\alpha = \frac{16}{17}$

$\begin{cases}\cos\alpha = \pm\frac{4}{\sqrt{17}} \\ \sin\alpha = \mp\frac{1}{\sqrt{17}}\end{cases}$

$\Downarrow$

$tg\,\alpha = -0{,}25$

Аналогично, если $\sin 2\beta < 0$:

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

в (1):

$4\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$

$8\sin\alpha\cos\alpha - 1 + 2\sin^2\alpha = -1$

$\sin\alpha\,(4\cos\alpha + \sin\alpha) = 0$

$\sin\alpha = 0$ или $\sin\alpha = -4\cos\alpha \Rightarrow 17\cos^2\alpha = 1$

$\Downarrow$

$\operatorname{tg}\alpha = 0$

$\begin{cases} \cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin\alpha = \mp\frac{4}{\sqrt{17}} \end{cases}$

$\Downarrow$

$\operatorname{tg}\alpha = -4$

Ответ: -4; $-0{,}25$; 0.

№ 3

$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5} - x^2$

$x^2+6x > 0$

$\Updownarrow$

$x \in (-\infty; -6) \cup (0; +\infty)$

$x^2+6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5} - 3^{\log_4(x^2+6x)}$

Пусть $(x^2+6x) := t$, $t > 0$, тогда

$t \geq t^{\log_4 5} - 3^{\log_4 t}$

$4^{\log_4 t} \geq \left(4^{\log_4 t}\right)^{\log_4 5} - 3^{\log_4 t}$

$4^{\log_4 t} \geq \left(4^{\log_4 5}\right)^{\log_4 t} - 3^{\log_4 t}$

$4^{\log_4 t} \geq 5^{\log_4 t} - 3^{\log_4 t}$

$5^{\log_4 t} \leq 4^{\log_4 t} + 3^{\log_4 t}$

Нетрудно заметить, что в силу большей скорости возрастания показательной ф-ии, при $\log_4 t \geq 2$: $5^{\log_4 t} \geq 4^{\log_4 t} + 3^{\log_4 t} \Rightarrow$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 (продолжение)

$\Rightarrow \log_4 t \le 2$

$t \le 16$

$x^2+6x-16 \le 0$

$x \in [-8; 2]$

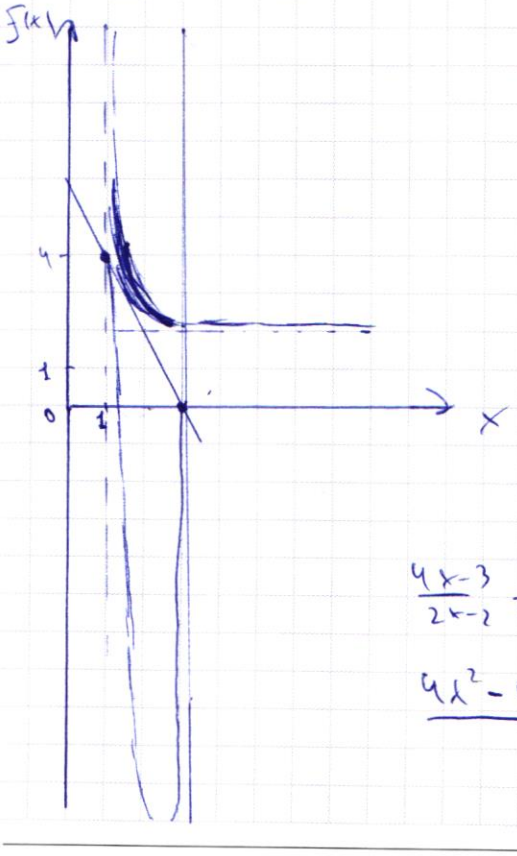
Учитывая D_3, получаем:

$x \in [-8; -6) \cup (0; 2]$

Ответ: $[-8; -6) \cup (0; 2]$

№6

$\frac{4x-3}{2x-2} \ge ax+b \ge 8x^2-34x+30 \quad \forall x \in (1; 3]$



Рассмотрим прямую, проходящую через точки $(1;4)$ и $(3;0)$:

$\begin{cases} 4 = k+b \\ 0 = 3k+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=-2 \\ b=6 \end{cases}$

Найдем пересечение с $f(x) = \frac{4x-3}{2x-2}$:

$\frac{4x-3}{2x-2} = -2x+6$

$\frac{4x^2-4x+4x-3-12x+12}{(2x-2)} = 0$

$$\frac{4x^2-12x+9}{(2x-2)}=0$$

$$\frac{(2x-3)^2}{(2x-2)}=0$$

$x=\frac{3}{2}$ Одна точка пересечения $\Rightarrow$ $y=-2x+6$ - касат.

к. $y=\frac{4x-3}{2x-2}$.

По рисунку видно, что ~~отделить~~ переместить прямую так, чтобы она удовлетворяла условиям задачи, невозможно $\Rightarrow$

$\exists!\,(a;b)$: $\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$ $\forall x \in (1;3]$.

Ответ: $(-2;6)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

x^2+6x

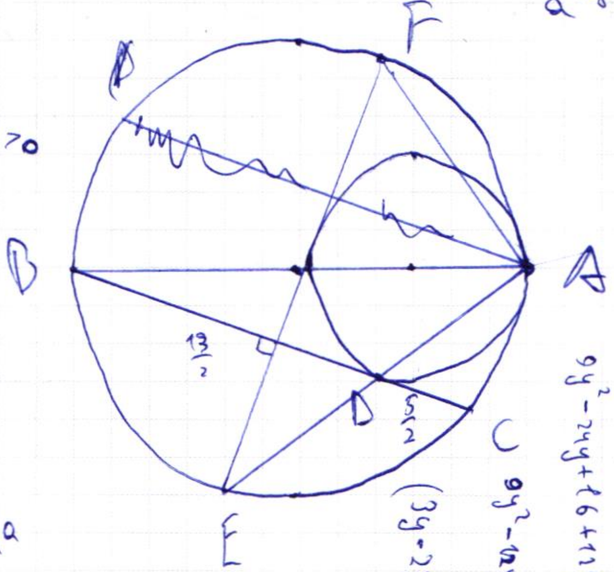
$a^{\log}$

$a \geq a^{\log_4 5} - 3^{\log_4 a}$, $a>0$

~~$\log_4 a \geq \log_4 (a^{\log_4 5} - 3^{\log_4 a})$~~

$a(1-a^{\log_4 5 - 1}$

$a(1-a^{\log_4 \frac{5}{4}}) \geq -3^{\log_4 a}$



$9y^2+4x^2-12xy+2x+3y-2=0$

$3y^2+3x^2-6x-4y-4=0$

$-5x^2-15xy+20x+15y+10=0$

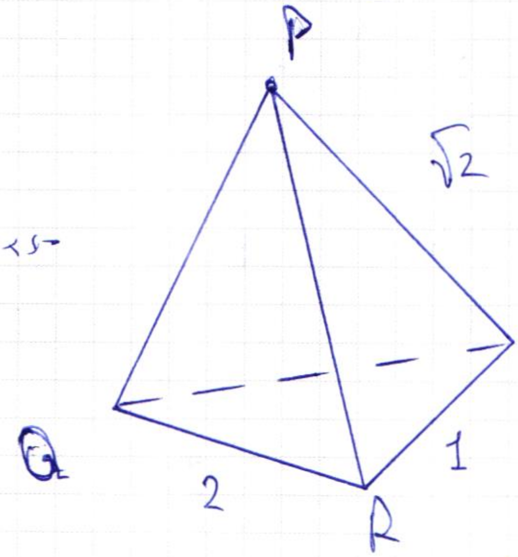
$x^2+3xy-4x-3y-2=0$

$D=(3y-4)^2+4(3y+2)$

$9y^2-24y+16+12y+8$

$9y^2-12y+24$

$(3y-2)^2+20$



$-5x^2-5y^2+\frac{3}{2}(x+y)^2$

$3(x+y)^2-(y+1)(6x+4y)=0$

$3(x+y)^2-6x(y+1)-4y(y+1)$

$(\sqrt{3}x+\sqrt{3}y)^2-6xy-6x-4y^2-4y=0$

$3x+y+12=3x-2y+\frac{3}{2}(x+y)^2$

$-6x-4y$ $\quad 3(x+y)^2=2(3x+y+2)$

$(3y-2)-2(x-1)$

$3y-2+(2x+2)$

$3y-2x=2$ $\quad 3(x-1)$ $\quad (3y-2)(x-1)$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$3x^2+3y^2-6x-4y-4=0$

$D=36-12(3y^2-4y-4)=-36y^2+48y+48+36=-36y^2+48y+84=$

$=-4(9y^2-12y-21)$

$9y^2-12y-21\geq 0$ $\qquad \sqrt{(3y-2)^2-25}$

$D=144+189\cdot 4=144+756=900=30^2$

$y=\frac{12\pm 30}{18}$ $\qquad y\in[-1;\frac{7}{3}]$

$y_1=-1$ $\qquad x\in$

$y_2=\frac{42}{18}=\frac{21}{9}=\frac{7}{3}$

$\boxed{x=\frac{6\pm\sqrt{(3y-2)^2-25}}{6}}$

$\begin{array}{r}19\\ \times 19\\ \hline 171\\ 19\\ \hline 361\end{array}$

$4x^2-x(19y-2)+9y^2+3y-2=0$

$D=(19y-2)^2-16(9y^2+3y-2)=$

$=361y^2-76y+4-144y^2-48y+32=$

$=217y^2-124y+36=0$

$19y$

$x=$ $\qquad x^2+$ $\qquad t^{\log}$

$t\geq t^{\log_4 5}-3^{\log_4 t}$

$4^{\log_4 t}\geq 4^{\log_4 t\cdot\log_4 5}-3^{\log_4 t}$ $\qquad \left(\frac{5}{4}\right)^4-\left(\frac{3}{4}\right)^4=1$

$4^{\log_4 t}\geq 5^{\log_4 t}-3^{\log_4 t}$ $\qquad 5^x-3^x=4^x$

$1\geq\left(\frac{5}{4}\right)^{\log_4 t}-\left(\frac{3}{4}\right)^{\log_4 t}$ $\qquad \log_4 t\leq 2$

$t\leq 16$

$\begin{cases}x^2+6x-16\leq 0\\ x^2+6x>0\end{cases}$ $\qquad \begin{cases}x\in[-8;2]\\ x\in(-\infty;-6)\cup(0;+\infty)\end{cases}$

$[-8;-6)\cup(0;2]$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x^2+6x>0$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$

$x^2+6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}-3^{\log_4(x^2+6x)}$

$1-t^{\log_4 5-1}>0$

$1>t^{\log_4 5-1}$

$t \geq t^{\log_4 5}-3^{\log_4 t}$

$3^{\log_3 t}+3^{\log_4 t}$

$t^0>t^{\log_4 5-1}$

$\underbrace{t(1-t^{\log_4 5-1})}_{\geq 0 \text{ при } t\in(0;1)} \geq -3^{\log_4 t}$

$t\geq 1$:

$t<1$:

< 0 при $t\in(1;+\infty)$

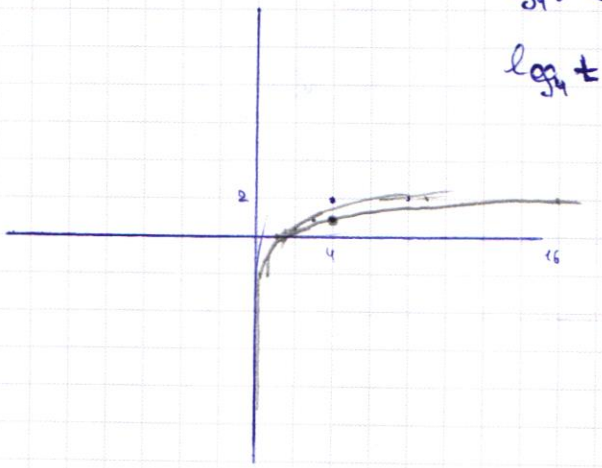
$\log_4 5=$

$\log_t$ $\quad 1\geq \log t$ $\quad 4^{\log_4 t}\geq t^{\log_4 5}-3^{\log_4 t}$

$t^{\log_4 5}-3^{\log_4 t}$ $\quad 3^{\log_4 t} \vee t$

$\log_4 t \ln 3 \vee \ln t$

$\log_4 t \vee \log_3 t$ $\quad$ if $t>1$: $t>3^{\log_4 t}$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$8x^2-34x+30=-2x+6$

$a,b \in R_+$

$y=$ $8x^2-32x+24=0$

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$8(x^2-4x+3)=0$ $\frac{-2}{-\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}$

480

$f(p)=\left[\frac{p}{4}\right]$. $\forall p$: p - простое

$x^2-4x+3=0$

960

$D=16-12=4$

$x=3$ $x=1$

$3 \le x \le 27$

$3 \le y \le 27$ и $f\left(\frac{x}{y}\right)<0$

$\frac{37}{18}$

$f(a^2)=2f(a)$ $-8(17^2-30\cdot16\cdot2)$

$-8(289-960)$

$f(1)=0$

$f(2)=0$

$f(3)=0$

$f(4)=0$

$f(5)=1$

$f(7)=1$

$f(11)=2$

$f(13)=3$

$f(17)=4$

$f(23)=5$

$8\cdot\frac{34^2}{16^2}-34\cdot\frac{34}{16}+30$

$f(7\cdot1)=f(7)+f(1) \Rightarrow f(1)=0$

$\frac{960}{-289}$
$\overline{671}$

$\frac{-2\cdot34^2+30\cdot16^2}{16^2}$

$\frac{13}{6}$ $\frac{34^2\cdot8-34^2\cdot16+30\cdot16^2}{16^2}$

$\frac{5}{2}$

$\frac{34}{16}$

$f\left(\frac{1}{3}\cdot3\right)=f(3)+f\left(\frac{1}{3}\right)$

$32-68+30=-$

$72-102+30$

$\frac{34}{16}=\frac{17}{8}$

$f\left(\frac{1}{5}\cdot5\right)=1+(-1)$

$y=-2x+6$

$\frac{4x-3}{2x-2} \ge ax+b \ge 8x^2-34+30$

$\frac{4x-3}{2x-2} \ge 8x^2-34+30$

$2k=-4$

$k=-2$

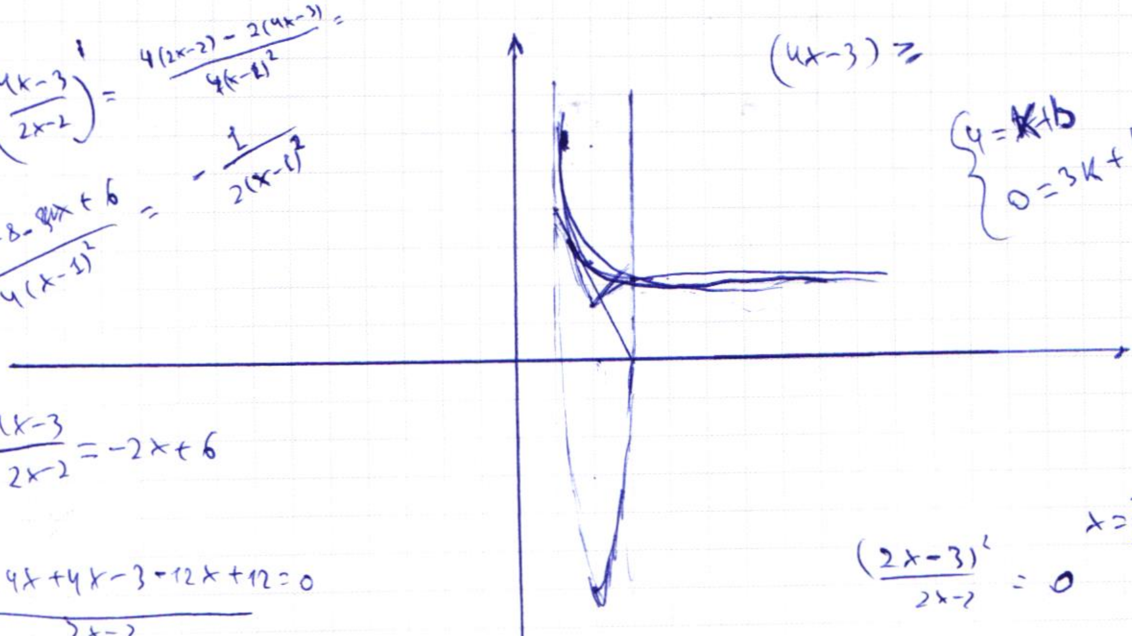
$\left(\frac{4x-3}{2x-2}\right)'=\frac{4(2x-2)-2(4x-3)}{4(x-1)^2}=$

$(4x-3) \ge$

$b=6$

$\begin{cases} 4=k+b \\ 0=3k+b \end{cases}$

$=\frac{8x-8-8x+6}{4(x-1)^2}=-\frac{1}{2(x-1)^2}$



$\frac{4x-3}{2x-2}=-2x+6$

$x=\frac{3}{2}$

$\frac{(2x-3)^2}{2x-2}=0$

$\frac{4x^2-4x+4x-3-12x+12}{2x-2}=0$

$\frac{4x^2-12x+9}{2x-2}=0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

9) $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad\quad$ $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$tg\,\alpha - ?$

$\sin(2\alpha+2\beta+2\beta)$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos(2\alpha+2\beta) + \sin 2\alpha$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\beta + \sin 2\beta(\cos 2\alpha\cos 2\beta - \sin 2\alpha\sin 2\beta) + \sin 2\alpha = \frac{8}{17}$

~~$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta$~~ $\cos 2\beta\cos 2\alpha$

Если $\sin 2\beta > 0$:

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$ $\quad\quad$ $\sin 2\beta = \sqrt{1-\frac{16}{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\frac{2}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\beta = \frac{8}{17}$

$\sqrt{17}\cos 2\beta = 4$ $\quad\quad$ $\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$ $\quad\quad$ $4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

~~$4tg2\alpha+1 = \frac{1}{\cos 2\alpha}$~~

$8\sin\alpha\cos\alpha +$

$\boxed{4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1}$ $\quad\quad$ $8\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1 = -1$

$\cos\alpha(4\sin\alpha + \cos\alpha) = 0$

$\cos\alpha = 0 \Rightarrow \sin\alpha = 1 \Rightarrow tg\alpha$ не сущ.

$\sin\alpha = \frac{\cos\alpha}{4}$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} + \frac{1}{\sqrt{17}}\left(\cos 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} - \sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$-\frac{4}{17} + \frac{4}{17}\cos 2\alpha - \frac{1}{17}\sin 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$-4 + 4\cos 2\alpha$ ~~$-\,8\ldots$~~ $+16\sin 2\alpha = -8$

$-4 + 4\underbrace{(\cos 2\alpha + 4\sin 2\alpha)}_{-1} = -8$

$\frac{\cos^2\alpha}{16} + \cos^2\alpha = 1$

$\frac{17}{16}\cos^2\alpha = 1$ $\quad$ $\cos^2\alpha = \frac{16}{17}$

$\cos\alpha = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$\sin 2\beta < 0$: $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha \frac{4}{\sqrt{17}} - \frac{1}{\sqrt{17}} \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$4 \sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$

~~2 sin α cos α~~.

$-\frac{1}{\sqrt{17}} \frac{4}{\sqrt{17}} - \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \cos(2\alpha+2\beta) + \sin 2\alpha = \frac{8}{17}$

$\frac{-4}{17} - \frac{1}{\sqrt{17}} \left(\frac{4}{\sqrt{17}} \cos 2\alpha + \frac{1}{\sqrt{17}} \sin 2\alpha\right) + \sin 2\alpha = \frac{8}{17}$

$-4 - (4 \cos 2\alpha + \sin 2\alpha) + 17 \sin 2\alpha = -8$

$-4 - 4\cos 2\alpha + 16 \sin 2\alpha = -8$

$-4 + 4 \underbrace{(-\cos 2\alpha + 4 \sin 2\alpha)}_{-1} = -8$

(2) $\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2} \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 \end{cases}$

ОДЗ:

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq \frac{2}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x < 1 \\ y \leq \frac{2}{3} \end{cases} \end{array}\right.$

~~$D = 36 - 12(3y^2 - 4y - 4) =$~~
~~$= 36 - 36y^2 + 48y + 48 =$~~
~~$= -36y^2 + 48y + 84 = -4(9y^2 - 12y -$~~

$D = 16 - 12(3x^2 - 6x - 4) = -36x^2 + 72x + 48 + 16 = -36x^2 + 72x + 64 = -4(9x^2 - 18x - 16) =$

$= -4((3x-3)^2 - 25))$

$(2x+3y)^2 = 4x^2 + 9y^2 + 12xy$

$(3x-3)^2 \leq 25$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3x - 3 \leq 5 \\ 3x - 3 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 3x - 3 \geq -5 \\ 3x - 3 < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leq \frac{8}{3} \\ x \geq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq -\frac{2}{3} \\ x < 1 \end{cases} \end{array}\right.$

$\begin{cases} 9y^2 - 16xy + 4x^2 = 3xy - 2x - 3y + 2 \\ 3y - 2x \geq 0 \quad !!!!! \end{cases}$

$9y^2 - 19xy + 4x^2 + 2x + 3y - 2 = 0$

$3y - 2x = \sqrt{(x-1)(3y-2)}$

$3y - 2x = \sqrt{3y(x-1) - 2(x-1)}$

$\left[\begin{array}{l} x \in [1; \frac{8}{3}] \\ x \in [-\frac{2}{3}; 1) \end{array}\right.$