# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы $\alpha$ и $\beta$ удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2},\\ x^2+9y^2-4x-18y=12.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности $\Omega$ и $\omega$ касаются в точке $A$ внутренним образом. Отрезок $AB$ – диаметр большей окружности $\Omega$, а хорда $BC$ окружности $\Omega$ касается $\omega$ в точке $D$. Луч $AD$ повторно пересекает $\Omega$ в точке $E$. Прямая, проходящая через точку $E$ перпендикулярно $BC$, повторно пересекает $\Omega$ в точке $F$. Найдите радиусы окружностей, угол $AFE$ и площадь треугольника $AEF$, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция $f$ определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел $a$ и $b$ из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа $p$ ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее $x$). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех $x$ на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина $A$ которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра $AD$. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра $BC$. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}$

$x^2-4x+9y^2-18y=12$ $\qquad (x-2)^2+(3y-3)^2=12$

$\qquad\qquad\qquad\qquad -4 \qquad -9$

$\cancel{x-2y=xy}$ $\qquad (x-2)^2+9(y-1)^2=25$

$x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2$ $\qquad t=x-2y$

$x^2-5xy+4y^2+x+2y-2=0$

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$ $\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha=-\frac{4}{5}$

$\sin2\alpha\cos2\beta+\sin2\beta\cos2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geq|x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$

$5^{\log_{12}t}+t-|t|^{\log_{12}13}\geq0$ $\qquad t>0$

$5^{\log_{12}t}-13^{\log_{12}t}+t\geq0$

$h=\log_{12}t$ $\qquad t+5^{\log_{12}t}\geq13^{\log_{12}t}$

$5^h-13^h+12^h\geq0$ $\qquad t^{\log_{12}5}-t^{\log_{12}13}+t\geq0 \quad :t$

$5^h+12^h\geq13^h$

$t^{\log_{12}5-1}-t^{\log_{12}13-1}+1\geq0$

$t^{\log_{12}5}-t^{\log_{12}13}+t^{\log_{12}12}\geq0$

$t^{\log_{12}5}\left(1-t^{\log_{12}13-\log_{12}5}+t^{1-\log_{12}5}\right)\geq0$

$\left(1-t^{\log_{12}\frac{13}{5}}+t^{\log_{12}\frac{12}{5}}\right)\geq0$

$\begin{cases}x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}\\x^2+9y^2-4x-18y=12\end{cases}$

$x^2+9y^2-2(x-9y)=12$

$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$$

$$\frac{12x+9+2}{4x+3} = 3+\frac{2}{4x+3}$$

$$tg2x = \frac{2tgx}{1-tg^2x}$$

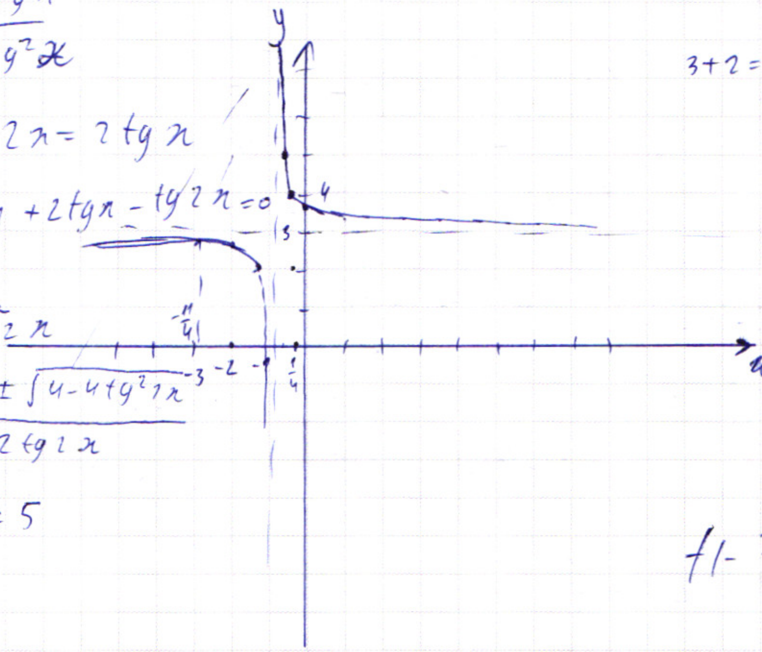
$$(1-tg^2x)tg2x = 2tgx$$

$$tg^2x \cdot tg2x + 2tgx - tg2x = 0$$

$$D = 4-4tg^2 2x$$

$$tgx = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4tg^2 2x}}{2tg2x}$$

$23 : 4 = 5$



$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) =$

$4x+3 = 2$

$x = -\frac{1}{4}$

$4x+3 = 1$

$x = -\frac{1}{2}$

$3+2=5$ $\quad \frac{2}{7}+3$

$3-\frac{2}{5} = 3{,}4 =$

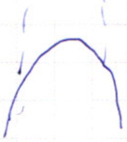
$-8+3=-5 \quad = 2{,}6$

$-8x^2-30x-17=0$

$\cancel{D}$ $8x^2+30x+17=0$

$\cancel{D}$ $x_в = -\frac{30}{16} = -\frac{15}{8}$

$f(-\frac{11}{4})$



$$5^{\log_{12} t} + t \ge t^{\log_{12} 13}$$

$$t^{\log_{12} 5} + t - t^{\log_{12} 13} \ge 0$$

$$t(t^{\log_{12} 5 - 1} - t^{\log_{12} 13 - 1} + 1) \ge 0$$

$$t^{\log_{12} 5 - \log_{12} 12} - t^{\log_{12} \frac{13}{12}} + 1$$

$$t^{\log_{12} \frac{5}{12}} - t^{\log_{12} \frac{13}{12}} + 1 \ge 0$$

$$t^{\log_{12} \frac{5}{12}}(1 - t^{\log_{12} \frac{13}{5}}) + 1 \ge 0$$

$\cancel{5^{\log_{12}(x^2-18x)}}$

$\cancel{5^t + 12^t \ge 13^t}$

$\cancel{5^t}$

$t^{\log_{12} 5}$

$f(1) = 0$

$f(2) = 0$

$f(3) = 0$

$f(5) =$

$f(xy) = f(x) + f(y)$

$f(\frac{x}{y}) + f(y) = f(x)$

$f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)$

$f(x) < f(y)$

1

2

3

4

5 V

6

7

$= tg2x(tg2x - 1) \quad \frac{tg2x-1}{tg2x+2} = tg2x$

$\sin 2x = 2\sin x \cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\sin x = \frac{\sin 2x}{2\cos x}$

$tgx = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin 2x}{2\cos^2 x}$

$2\cos^2 x = \cos 2x + 1$

$\frac{\sin 2x}{\cos 2x + 1}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$\cancel{5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13} - 18x}$ $\quad x \in \left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$

$\cancel{5^{\log_{12}}}$

$\frac{12x+11}{4x+3} \leq ax + b$ $\qquad y =$

$12x+11 \geq (ax+b)(4x+3)$ $\qquad (4x+3 < 0$ при наших $x)$

$12x+11 \geq 4ax^2 + (3a+4b)x + 3b$

$4ax^2 + (3a+4b-12)x + 3b - 11 \leq 0$

1) $a = 0$

$(4b-12)x + 3b - 11 \leq 0$ $\qquad f(x) = (4b-12)x + 3b - 11$

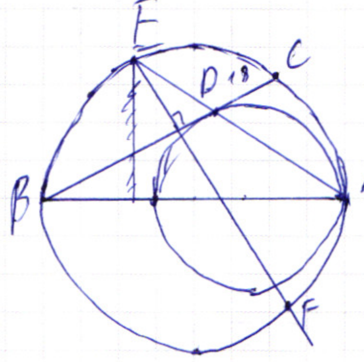
$\begin{cases} f(-\frac{11}{4}) \leq 0 \\ f(-\frac{3}{4}) \leq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -(4b-12)\frac{11}{4} + 3b - 11 \leq 0 \\ -(4b-12)\frac{3}{4} + 3b - 11 \leq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -11(b-3) + 3b - 11 \leq 0 \\ -3(b-3) + 3b - 11 \leq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} -11b + 33 + 3b - 11 \leq 0 \\ -3b + 9 + 3b - 11 \leq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -8b + 22 \leq 0 \\ -2 \leq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} b \geq \frac{22}{8} \\ b \in R \end{cases}$

при $a = 0$ $\quad b \in \left[\frac{22}{8}; +\infty\right)$

2) $a < 0$

$g(x_B) \leq 0$ $\quad$, т.к. $x_B =$



$CD = 18$ апроизводная

$BD = 17$

$$\sqrt{x(y-1) - 2(y-1)} = x - 2y$$

$$\sqrt{(x-2)(y-1)} = x - 2y$$

$$(x-2)^2 + 9(y-1)^2 = 25$$

$$(x-2)(y-1) = (x-2y)^2$$

$$(y-1) = \frac{x-2}{(x-2y)^2}$$

$$(x-2)^2 + \frac{9(x-2)^2}{(x-2y)^4} = 25$$

$x - 2 = t$

$y - 1 = h$

$x - 2y = t - 2h$

$$t^2 + 9h^2 = 25$$

$$th = (t-2h)^2$$

$$(t+3h)^2 = t^2 + 6th + 9h^2 = 25 + 6(t-2h)^2$$

$$(t+3h)^2 - 6(t-2h)^2 = 25$$

$$5^{\log_{12} t} + t \geq t^{\log_{12} 13}$$

$$5^{\log_{12} t} \geq -t^{\log_{12} 12} + t^{\log_{12} 13}$$

$$t^{\log_{12} 5} \geq t^{\log_{12} 13} - t^{\log_{12} 12}$$

$\log_{12} 5$

$$5^{\log_{12} t} + t \geq t^{\log_{12} 13}$$

$$\log_{12}(5^{\log_{12} t} + t) \geq \log_{12} t^{\log_{12} 13}$$

$$5^h + 12^h \geq 13^h$$

$25 \times 5 = 125$

$18 \cdot 18$: $144 + 18 = 324$

6

$5 + 12 \geq 13$

$25 + 144 \geq 169$

$144 \cdot 12 = 1728$

$144 \cdot 12$: $288 + 144 = 1728$

$225 \cdot 15$: $1125 + 225 = 3375$

2

1

$332 = 2 \cdot 166 =$

$= 2 \cdot 2 \cdot 82 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 41$

166

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$

$\sin(2\alpha + 2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$

$\cos 2\beta =$

$2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$

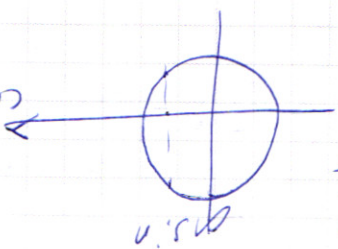
$\sin 2\alpha$

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{25}{1}$$

$\alpha + 2\beta = \pi/2 + \pi n$

$= 1 + n$

$\frac{\pi}{4}$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$tg\,2\alpha = \frac{2\,tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha}$ $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} =$ $17 \cdot 5 = 85$ 3

$tg2\alpha - tg2\alpha\, tg^2\alpha = 2\,tg\alpha$

$tg2\alpha = tg\alpha(tg\alpha\, tg2\alpha + 2)$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ $\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha$

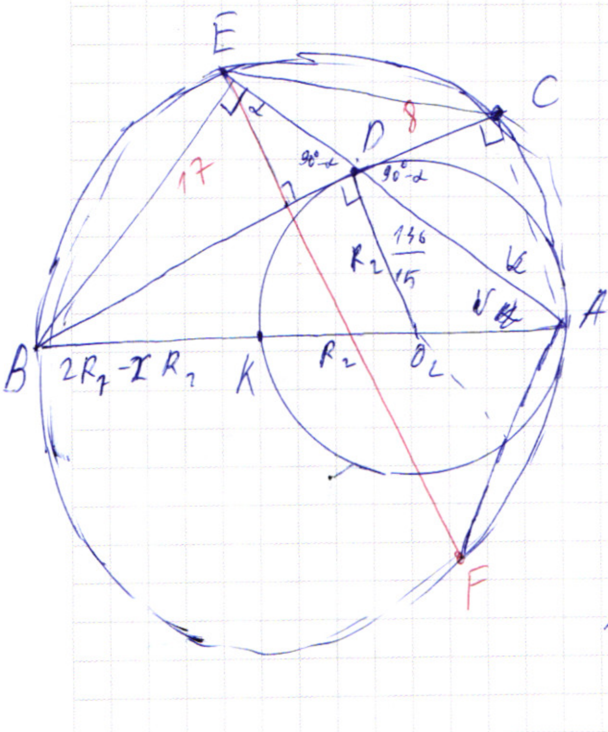
$\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha$ $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$

$\sin^2\alpha = (1-\cos 2\alpha):2$ $\cos^2\alpha =$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ $85 \cdot 5 = 425$

$\cos^2\alpha = \frac{\cos 2\alpha + 1}{2}$ $tg\frac{\alpha}{2} =$ $17 \cdot 8 = 136$ 5 $425 - 136 = 289$ 2

$tg^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha + 1} =$




$R_1, R_2$ - ? $S_{AEF}$ - ? AD ✓

$AB = 2R_1$

$BK = 2R_1 - 2R_2$

$(2R_1 - 2R_2)\cdot 2R_1 = 289$

$4R_1^2 - 4R_1R_2 = 289$

$R_2 = \frac{4R_1^2 - 289}{4R_1}$

$\frac{17}{2R_1 - R_2} = \frac{25}{2R_1}$

$-\frac{4}{3} = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

$\frac{4}{3} = \frac{2tg\alpha}{tg^2\alpha - 1}$

$4tg^2\alpha - 4 = 6tg\alpha$

$4tg^2\alpha - 6tg\alpha - 4 = 0$

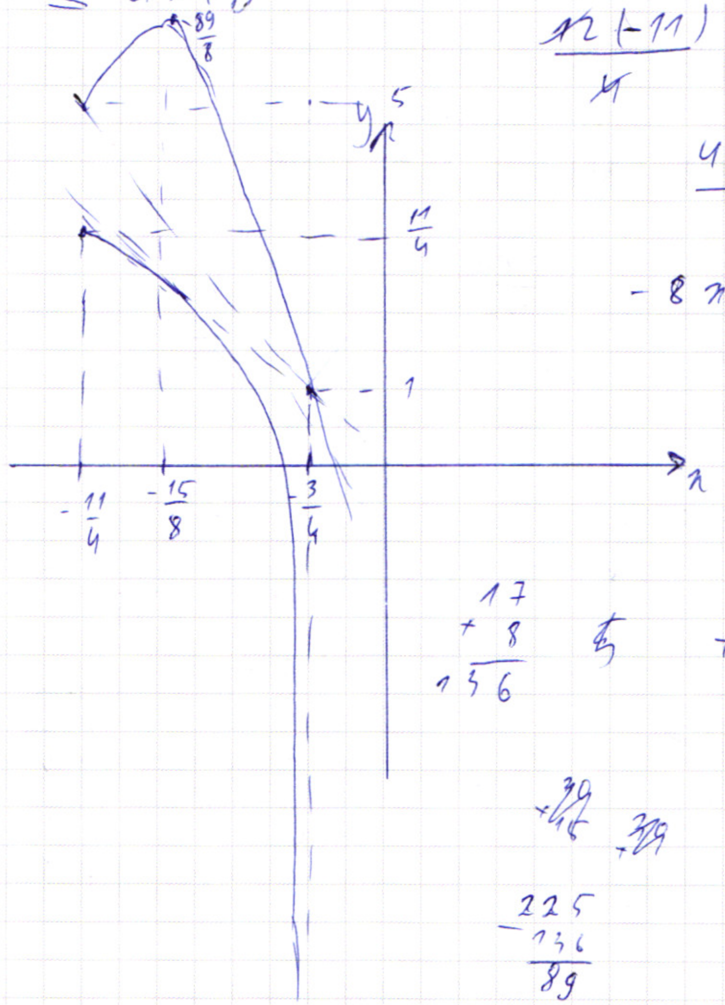
$D = 36 + 100 = 106$

$tg\alpha = \frac{6 \pm \sqrt{106}}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$\frac{12x+11}{4x+3} \leq 4x+b$




$\frac{\cancel{12}^{3}(-11)}{\cancel{4}} + 11 = 11 - 33 = -22$

$\frac{11}{4}$

$\frac{4\cdot(-11)}{4} + 3 = 3 - 11 = -8$

$-8x^2 - 30x - 17 = 0$

$\cancel{8x^2 + 30x + 17 = 0}$

$x_в = \frac{-30}{16} = -\frac{15}{8}$

$f(x_в) = -8 \cdot \frac{225}{64_8} +$

$+ 30 \cdot \frac{15}{8} - 17 =$

$= -\frac{225}{8} + \frac{450}{8} - 17 =$

$= \frac{225}{8} - 17 = \frac{225 - 136}{8} = \frac{89}{8}$

$17 \times 8 = 136$

$225 - 136 = 89$

$-\cancel{8}^{2} \cdot \frac{121}{\cancel{16}_{4}\,_{2}} + \frac{30 \cdot 11}{4} - 17 = -\frac{121}{2} + \frac{330}{4} - 17 = -\frac{121}{2} + \frac{165}{2} - 17 =$

$= 22 - 17 = 5$

$-\cancel{8} \cdot \frac{9}{\cancel{16}_{2}} + \cancel{30}^{15} \cdot \frac{3}{\cancel{4}_{2}} - 17 = \frac{-9}{2} + \frac{45}{2} - 17 = 1$

$330 + 231 = 561$

$16 \cdot 726$

$y = kx + b$

$y = \frac{12x+11}{4x+3}$

$kx + b = \frac{12x+11}{4x+3}$

$-\frac{15}{8}\ ?\ -\frac{11}{4}$

$\frac{11}{4}\ ?\ \frac{15}{8}$

$22\ ?\ 15$

$>$

$400 : 16 = 25$

$25 \times 9 = 225$

$111 \times 6 = 726$

$726 - 561 = 165$

$66 \times 5 = 330$

$12 \times 8 = 96$

$12 \times 6 = 72$

$16 \times 3 = 48$

$21 \times 11 = 231$

$231 \times 5 = 1155$

$121 - 66 = 55$

$1155 + 225 = 1380$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$f(ab) = f(a) + f(b)$

Пусть $a = \frac{x}{y}$

$b = y$

$f(x) = f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$, если $f(x) > f(y)$

$f(1) = 0$ $\quad$ $f(5) = 1$ $\quad$ $f(9) = 0$

$f(2) = 0$ $\quad$ $f(6) = f(2) + f(3) = 0$ $\quad$ $f(10) = 1$

$f(3) = 0$ $\quad$ $f(7) = 1$ $\quad$ $f(11) = 2$

$f(4) = f(2) + f(2) = 0$ $\quad$ $f(8) = f(2) + f(4) = 0$ $\quad$ $f(12) = 0$

$f(13) = 3$ $\quad$ $f(17) = 4$ $\quad$ $f(21) = 1$

$f(14) = 1$ $\quad$ $f(18) = 0$ $\quad$ $f(22) = 2$

$f(15) = 1$ $\quad$ $f(19) = 4$ $\quad$ $f(23) = 5$

$f(16) = 0$ $\quad$ $f(20) = 1$ $\quad$ $f(24) = 0$

~~Значение 0 : 1, 2,~~ 3,

Значение 0 – 11 чисел

1 – 7 чисел

2 – 2 чисел

3 – 1 числа

4 – 2 чисел

5 – 1 число

$(t-2k)^2 = tk \qquad (t-2k \geq 0)$

$t^2 - 4tk + 4k^2 = tk \qquad$ (условие $tk \geq 0$ выполняется)

$t^2 - 5tk + 4k^2 = 0$

$t^2 - tk - 4tk + 4k^2 = 0$

$t(t-k) - 4k(t-k) = 0$

$(t-4k)(t-k) = 0$

$t = 4k$ или $t = k$

$4k - 2k \geq 0 \quad k \geq 0$

$t^2 + 9k^2 = 25$

$16k^2 + 9k^2 = 25$

$k^2 = 1$

$k = -1$ или $k = 1$

$\cancel{y-1=-1}$ $\qquad y-1=1$

$\cancel{y=0}$ $\qquad y=2$

$\cancel{t=-4}$ $\qquad t=4$

$\cancel{x=t+2=-2}$ $\qquad x=t+2=6$

$\cancel{(-2;0)}$ $\qquad (6;2)$

не подходит

$k - 2k \geq 0 \qquad k \leq 0$

$t^2 + 9k^2 = 25$

$k^2 + 9k^2 = 25$

$10k^2 = 25$

$k^2 = \frac{5}{2}$

$k = -\sqrt{\frac{5}{2}}$ или $k = \sqrt{\frac{5}{2}}$

не подходит.

$y - 1 = -\sqrt{\frac{5}{2}}$

$y = 1 - \sqrt{\frac{5}{2}}$

$t = k = -\sqrt{\frac{5}{2}}$

$x = t + 2 = 2 - \sqrt{\frac{5}{2}}$

$\left(2-\sqrt{\frac{5}{2}};\ 1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$

Ответ: $(6;2)$; $\left(2-\sqrt{\frac{5}{2}};\ 1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$.

№ 1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

1) $\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$2\sin(2\alpha + 2\beta)\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$

$\sin(2\alpha + 2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) Пусть $f(x)=5$, тогда $f(y)<5$, т.е. 23 числа

$23\cdot 1=23$

2) Пусть $f(x)=4$, тогда $f(y)<4$ т.е. 21 число

$21\cdot 2=42$

3) Пусть $f(x)=3$, тогда $f(y)<3$ т.е. 20 чисел.

$20\cdot 1=20$

4) Пусть $f(x)=2$, тогда $f(y)<2$ т.е. 18 чисел

$18\cdot 2=36$

5) Пусть $f(x)=1$, тогда $f(y)<1$ т.е. 11 чисел.

$7\cdot 11=77$

$77+36+20+42+23=100+56+42=198$

Ответ: 198

№ 3

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$ О.Д.З. $x^2+18x>0$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2+18x \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}$ (по О.Д.З. $(x^2+18x)>0$)

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+12^{\log_{12}(x^2+18x)} \geq 13^{\log_{12}(x^2+18x)}$

Пусть $t=\log_{12}(x^2+18x)$

$5^t+12^t \geq 13^t$

$5^t+12^t$ - монотонно возрастающая функция

$13^t$ - монотонно возрастающая функция

~~При $t=1$ $5^1+12^1=17$ $13^1=13$ $17\geq 13$~~

$f(t)=5^t+12^t-13^t$ - монотонно убывающая функция

При $t=1$ $5^1+12^1-13^1=4$

При $t=2$ $5^2+12^2-13^2=25+144-169=0$

~~При t≥3~~ При $t>2$ $f(t)<0$

$t\in(-\infty;2]$

$\begin{cases} x^2+18x\le 2 \\ x^2+18x>0 \end{cases}$

$x^2+18x-2=0$

$D=18^2+8=324+8=332$

$x_{1,2}=\frac{-18\pm\sqrt{332}}{2}=-9\pm\sqrt{82}$

$\begin{cases} x\in[-9-\sqrt{82};-9+\sqrt{82}] \\ x(x+18)>0 \end{cases}$

$\begin{cases} x\in[-9-\sqrt{82};-9+\sqrt{82}] \\ x\in(-\infty;-18)\cup(0;+\infty) \end{cases}$

$x\in[-9-\sqrt{82};-18)\cup(0;-9+\sqrt{82}]$

Ответ: $x\in[-9-\sqrt{82};-18)\cup(0;-9+\sqrt{82}]$

## №2

$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2-4x+9y^2-18y=12 \end{cases}$

$\begin{cases} x-2y=\sqrt{x(y-1)-2(y-1)} \\ x^2-4x+4-4+9y^2-18y+9-9=12 \end{cases}$

$\begin{cases} x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$

Пусть $t=x-2$

$k=y-1$

Тогда $x-2y=t+2-(2k+2)=t-2k$

$\begin{cases} t-2k=\sqrt{tk} \\ t^2+9k^2=25 \end{cases}$

□ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

б) $\cos 2\alpha = -\sqrt{1-\sin^2 2\alpha}$ $\quad \cos 2\alpha \le 0$

$-\sqrt{1-\sin^2 2\alpha} = 2\sin 2\alpha + 1$ $\quad -2\sin^2\alpha - 1 \ge 0$

$1-\sin^2 2\alpha = 4\sin^2 2\alpha + 4\sin 2\alpha + 1$

$5\sin^2 2\alpha + 4\sin 2\alpha = 0$

$\sin 2\alpha = 0$ или $\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\cos 2\alpha = -1$ $\quad \cos 2\alpha = -\frac{8}{5} + 1 = -\frac{3}{5}$

$\operatorname{tg} 2\alpha = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = 0$ $\quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{4}{3}$ $\quad \frac{4}{3} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$ $\quad 4 - 4\operatorname{tg}^2\alpha = 6\operatorname{tg}\alpha$

$4\operatorname{tg}^2\alpha + 6\operatorname{tg}\alpha + 4 = 0$

$D = 36 - 64 = 100$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{-6 \pm 10}{8}$

$\operatorname{tg}\alpha = -2$ $\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$

2) $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\frac{2}{\sqrt{5}}\sin 2\alpha + \frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$\cos 2\alpha = -1 - 2\sin 2\alpha$

а) $\cos 2\alpha = \sqrt{1-\sin^2 2\alpha}$ $\quad \cos 2\alpha \ge 0$

$\sqrt{1-\sin^2 2\alpha} = -(1+2\sin 2\alpha)$ $\quad (1+2\sin 2\alpha \le 0)$

$1-\sin^2 2\alpha = 1 + 4\sin 2\alpha + 4\sin^2 2\alpha$

$5\sin^2 2\alpha + 4\sin 2\alpha = 0$

$\sin 2\alpha = 0$ $\quad \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

не подходит

$\cancel{\cos 2\alpha = 1}$ $\quad \cos 2\alpha = -(1-\frac{8}{5}) = \frac{3}{5}$

$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{4}{3}$

$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{4}{3} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$ $\quad \operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2}$

$\operatorname{tg}\alpha = 2$

б) $\cos 2\alpha = -\sqrt{1-\sin^2 2\alpha}$ $\quad \cos 2\alpha \le 0$

$\sqrt{1-\sin^2 2\alpha} = 1 + 2\sin 2\alpha$

$1-\sin^2 2\alpha = 1 + 4\sin 2\alpha + 4\sin^2 2\alpha$

$5\sin^2 2\alpha + 4\sin 2\alpha = 0$

$\sin 2\alpha = 0$ $\quad \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\cos 2\alpha = -1$ $\quad$ тоже не подходит.

$\operatorname{tg} 2\alpha = 0$

Ответ: $0; \pm 2; \pm\frac{1}{2}$.

$-\frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$

$\frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\beta = \frac{2}{5}$

$\cos 2\beta = \frac{2\cdot\sqrt{5}}{5}$

$\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\cos^2 2\beta} = \pm\sqrt{1-\frac{4}{5}} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

1) $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\frac{2}{\sqrt{5}}\sin 2\alpha + \frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$

$2\alpha + 2\beta = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \pi n \quad n\in\mathbb{Z}$

а) n - четное

$2\alpha + \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\frac{2}{\sqrt{5}}\sin 2\alpha - \frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$

$\cos 2\alpha = 2\sin 2\alpha + 1$

а) $\cos 2\alpha = \sqrt{1-\sin^2 2\alpha}$ $\quad (\cos 2\alpha \geq 0)$

$\sqrt{1-\sin^2 2\alpha} = 2\sin 2\alpha + 1$

$1-\sin^2 2\alpha = 4\sin^2 2\alpha + 4\sin 2\alpha + 1$ $\quad (2\sin 2\alpha + 1 \geq 0)$

$5\sin^2 2\alpha + 4\sin 2\alpha = 0$

$\sin 2\alpha(5\sin 2\alpha + 4) = 0$

$\sin 2\alpha = 0$ или $\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\cos 2\alpha = 1$ $\quad$ $\cancel{\cos 2\alpha = \frac{8}{5} + 1}$ $\cos 2\alpha = -\frac{8}{5} + 1 = -\frac{3}{5}$

$\operatorname{tg} 2\alpha = 0$ $\quad$ ~~не подходит.~~ не подходит.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

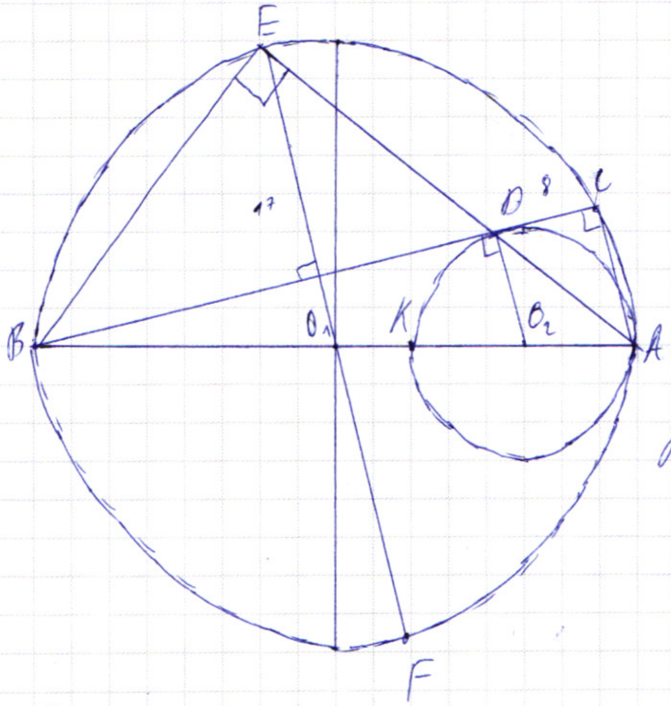
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4




$O_1$ - центр окр $\Omega$

$O_2$ - центр окр $\omega$

$R_1$ - радиус окр $\Omega$

$R_2$ - радиус окр $\omega$

$CD = 8 \quad BD = 17$

Найти: $R_1, R_2, S_{AEF}$

Решение:

$AB = 2R_1 \qquad AK = 2R_2$

$BK = 2R_1 - 2R_2$

по т. о кас. и секущей из одной точки: $BD^2 = BK \cdot AB$

$289 = (2R_1 - 2R_2) \cdot 2R_1$

$4R_1^2 - 4R_1R_2 - 289 = 0$

$\angle BCA = 90^\circ$ (опирается на диаметр $AB$)

$\angle BDO_2 = 90^\circ$ ($BD \perp O_2D$ по св. касательных)

$\triangle BDO_2 \sim \triangle BCA$ ($\angle B$ общий)

$\frac{BD}{BO_2} = \frac{BC}{AB}$

$\frac{17}{2R_1 - R_2} = \frac{25}{2R_1} \qquad 34R_1 = 50R_1 - 25R_2 \qquad 16R_1 = 25R_2 \quad R_2 = \frac{16}{25}R_1$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$4R_1^2 - 4R_1 \cdot \frac{16}{25} R_1 - 289 = 0$

$\left(4 - \frac{4\cdot 16}{25}\right) R_1^2 = 289$

$R_1^2 = \frac{289\cdot 25}{4\cdot 25 - 4\cdot 16} = \frac{289\cdot 25}{4\cdot 9}$

$R_1 = \frac{17\cdot 5}{2\cdot 3} = \frac{85}{6}$

$R_2 = \frac{16}{25}\cdot\frac{85}{6} = \frac{17\cdot 8}{5\cdot 3} = \frac{136}{15}$

$\cancel{BO_2 = 2R_1 - R_2 = \frac{85}{3} - \frac{136}{15} = \frac{425-136}{15} = \frac{289}{15}}$

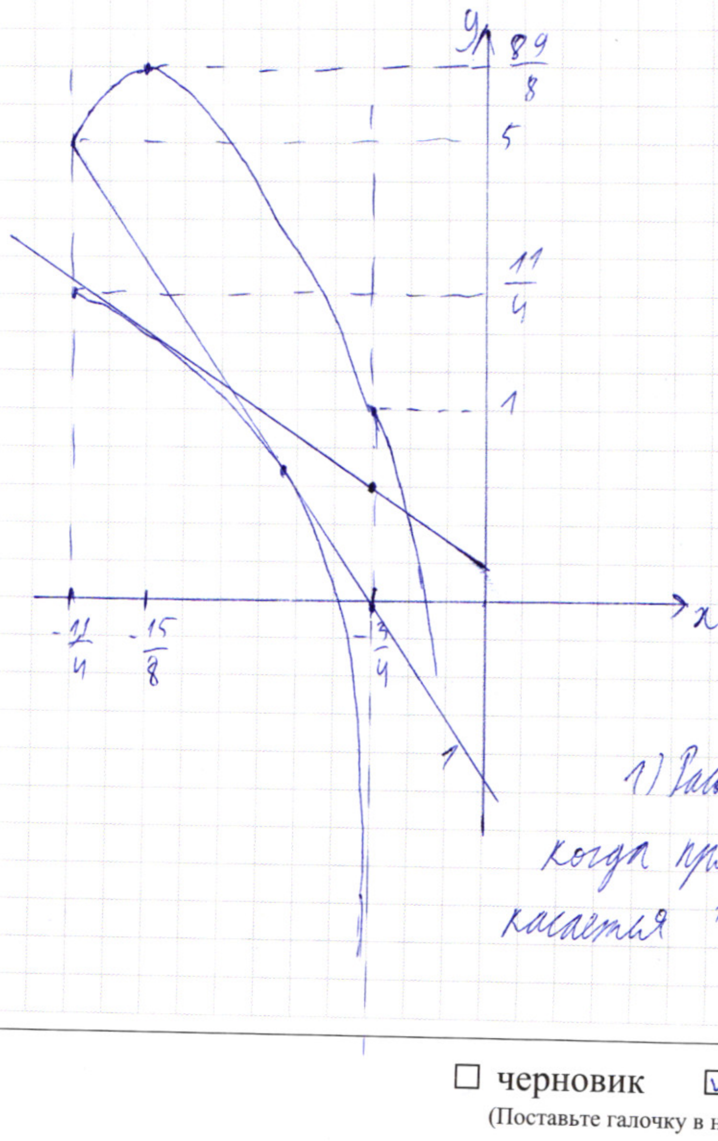
$\cancel{\cos\angle DBO_2 = \frac{BD}{BO_2} = \frac{17\cdot 15}{289} = \frac{15}{17}}$

$AB =$

Ответ: $R_1 = \frac{85}{6}$, $R_2 = \frac{136}{15}$

№ 6

Построю эскизы графиков функций $y = \frac{12x+11}{4x+3}$ и $y = -8x^2 - 30x - 17$




$\frac{12\cdot\frac{-11}{4}+11}{4\left(-\frac{11}{4}\right)+3} = \frac{11}{4}$

$y = -8x^2 - 30x - 17$

$x_в = \frac{30}{-16} = -\frac{15}{8}$

$f(x_в) = \frac{-8\cdot 15\cdot 15}{64} + \frac{30\cdot 15}{8} - 17 = \frac{-225+450}{8} - 17 = \frac{225-136}{8} = \frac{89}{8}$

$f\left(-\frac{11}{4}\right) = -8\cdot\frac{121}{16} + \frac{30\cdot 11}{4} - 17 = \frac{-242+330-17\cdot 4}{4} = \frac{165-121-34}{2} = 5$

$f\left(-\frac{3}{4}\right) = -8\cdot\frac{9}{16} + \frac{30\cdot 3}{4} - 17 = 1$

1) Рассмотрю крайнее положение, когда прямая $ax+b$ проходит через $\left(-\frac{11}{4}; 5\right)$ и касается $\frac{12x+11}{4x+3}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$5 = -\frac{11}{4}a + b$

$\frac{11}{4}a = b - 5 \qquad 11a = 4b - 20$

$\left(\frac{12x+11}{4x+3}\right)' = \frac{(12x+11)'(4x+3) - (12x+11)(4x+3)'}{(4x+3)^2} = \frac{12\cdot(4x+3) - (12x+11)\cdot 4}{(4x+3)^2} =$

$= \frac{3\cdot 12 - 4\cdot 11}{(4x+3)^2} = -\frac{12}{(4x+3)^2}$

$ax + b = \frac{12x+11}{4x+3}$

$(ax+b)(4x+3) = 12x + 11$

$4ax^2 + (3a+4b)x + 3b - 12x - 11 = 0$

$4ax^2 + (3a+4b-12)x + 3b - 11 = 0$

$D = (3a+4b-12)^2 - 4\cdot 4a(3b-11) = 0$

$9a^2 + (4b-12)^2 + 6a(4b-12) - 16a\cdot 3b + 16a\cdot 11 = 0$

$9a^2 + 16b^2 - 96b + 144 + 24ab - 72a - 48ab + 176a = 0$

$9a^2 + 16b^2 - 96b - 24ab + 104a = 0$

$\left(\frac{4b-20}{11}\right)^2\cdot 9 + 16b^2 - 96b - 24\cdot\frac{4b-20}{11}\cdot b + 104\cdot\frac{4b-20}{11} = 0$

$\frac{(16b^2 - 160b + 400)\cdot 9 + 16\cdot 121b^2 - 96\cdot 121 b - 24\cdot 11(4b-20)b + 104(4b-20)11}{121} = 0$

$(b^2 - 10b + 25)\cdot 9 + 121b^2 - 6\cdot 121b - 6\cdot 11(b-5)b + 21(b-5)\cdot 11 = 0$

$9b^2 - 90b + 225 + 121b^2 - 726b - 66b^2 + 330b + 231b - 1155 = 0$

$64b^2 - 275b - 1380 = 0$

$D = 275^2 - 4\cdot 64\cdot 1380$

$b_{1,2} = \frac{275 \pm \sqrt{275^2 - 4\cdot 64\cdot 1380}}{128}$

$b = \frac{275 - \sqrt{275^2 - 4\cdot 64\cdot 1380}}{128}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

г) Второе крайнее значение: когда прямая проходит через $(-\frac{3}{4}; 1)$ и касается $\frac{12x+11}{4x+3}$

$1 = -\frac{3}{4}a + b$

$4 = -3a + b \qquad b = 3a + 4$

$9a^2 + 16b^2 - 96b - 24ab + 104a = 0$

$9a^2 + 16(3a+4)^2 - 96(3a+4) - 24a(3a+4) + 104a = 0$

~~$9a^2 + 16(9a^2 + 24a + 16) =$~~

Тем самым мы найдем ограничения на $b$, далее для каждого $b$ найдем ограничения по $a$, используя точку $(-\frac{11}{4}; 5)$ и касательную к $\frac{12x+11}{4x+3}$.