МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant\left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} & (1) \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5} & (2) \end{cases}$$

1) (2): Воспользуемся формулой суммы синусов:

$$2\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right) = -\frac{4}{5} \quad |:2$$

$$\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$$

Пользуясь (1) получаем:

$$-\frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\beta = -\frac{2}{5} \quad |\cdot -\sqrt{5}$$

$$\cos 2\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\cos^2 2\beta} = \pm\sqrt{\frac{25}{25}-\frac{20}{25}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$$

2) Преобразуем (1):

$$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad (3)$$

3) Рассмотрим случай: $\cos 2\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ и $\sin 2\beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$

Подставим эти значения в (3). Получаем:

$$\frac{2\sqrt{5}}{5}\sin 2\alpha + \frac{\sqrt{5}}{5}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad |:\sqrt{5}$$

$$\frac{2}{5}\sin 2\alpha + \frac{1}{5}\cos 2\alpha = -\frac{1}{5} \quad |\cdot 5$$

$$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$$

$4\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha - \cancel{\sin^2\alpha} + \cancel{\sin^2\alpha} + \cos^2\alpha = 0$

$4\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha = 0 \quad |:2$

$\cos\alpha(2\sin\alpha + \cos\alpha) = 0$

$\left[\begin{array}{l}\cos\alpha = 0 \text{ — нам не подходит, т.к. } tg \text{ не существует} \\ 2\sin\alpha + \cos\alpha = 0 \quad |:\cos\alpha \neq 0\end{array}\right.$

$2tg\alpha + 1 = 0$

$tg\alpha = -\frac{1}{2}$

4) Рассмотрим случай $\cos 2\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ и $\sin 2\beta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

Подставим эти значения в (3). Получаем:

$\frac{2\sqrt{5}}{5}\sin 2\alpha - \frac{\sqrt{5}}{5}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad |:\sqrt{5}$

$\frac{2}{5}\cdot\sin 2\alpha - \frac{1}{5}\cos 2\alpha = -\frac{1}{5} \quad |\cdot 5$

$2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$

$4\sin\alpha\cos\alpha - \cancel{\cos^2\alpha} + \sin^2\alpha + \sin^2\alpha + \cancel{\cos^2\alpha} = 0$

$4\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin^2\alpha = 0 \quad |:2$

$2\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha = 0$

$\sin\alpha(2\cos\alpha + \sin\alpha) = 0$

$\left[\begin{array}{l}\sin\alpha = 0 \\ 2\cos\alpha + \sin\alpha = 0 \quad |:\cos\alpha \neq 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}tg\alpha = 0 \\ 2 + tg\alpha = 0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}tg\alpha = 0 \\ tg\alpha = -2\end{array}\right.$

Ответ: -2 ; $-\frac{1}{2}$; 0

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} & (1) \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 & (2) \end{cases}$$

(1): $x-2y=\sqrt{x(y-1)-2(y-1)}$

$x-2-2y+2=\sqrt{(y-1)(x-2)}$

$(x-2)-2(y-1)=\sqrt{(y-1)(x-2)}$

(2): $\cancel{x^2+}\ x^2-4x+4-4+9y^2-18y+9-9=12$

$(x-2)^2+(3y-3)^2-13=12$

$(x-2)^2+9(y-1)^2=25$

После проделанных преобразований система принимает вид:

$$\begin{cases} (x-2)-2(y-1)=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$$

Замена:

$x-2=a$

$y-1=b$

$$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} & (3) \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Поработаем с (3):

$a-2b=\sqrt{ab}$

$(a-2b)^2=ab$

– преобразование не равносильное, но все полученные решения мы проверим, подставив в систему.

$a^2-4ab+4b^2=ab$

$a^2-5ab+4b^2=0$

Решим квадратное уравнение относительно a.

$D=25b^2-16b^2=9b^2$

$$\left[\begin{array}{l} a=\dfrac{5b+|3b|}{2} \\ a=\dfrac{5b-|3b|}{2} \end{array}\right.$$

Вне зависимости от знака b мы получим следующую ~~систему~~ совокупность:

$$\left[\begin{array}{l} a=b \\ a=4b \end{array}\right.$$

Получаем:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=b \\ a=4b \end{array}\right. \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$$

Сперва подставим $a=b$ в (3):

$b^2+9b^2=25$

$10b^2=25$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2b^2 = 5$

$b^2 = \frac{5}{2}$

$b = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$

Получаем 2 решения для a и b:

$$\left[\begin{array}{l} a = b = \sqrt{\frac{5}{2}} \\ a = b = -\sqrt{\frac{5}{2}} \end{array}\right.$$

Теперь подставим $a = 4b$ в (3):

$16b^2 + 9b^2 = 25$

$25b^2 = 25$

$b^2 = 1$

$b = \pm 1$

Получаем 2 решения для a и b:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 4 \\ b = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} a = -4 \\ b = -1 \end{cases} \end{array}\right.$$

В итоге для a и b мы получили 4 решения.

Обратная замена и проверка для $a=4$ и $b=1$:

$$\begin{cases} x-2=4 \\ y-1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases}$$

Подставим в (1):

$$6-4=\sqrt{12-6-4+2}$$

$$2=\sqrt{4}$$

$2=2$ - верно $\Rightarrow$ $(6;2)$ - решение

Обратная замена и проверка для $a=-4$ и $b=-1$:

$$\begin{cases} x-2=-4 \\ y-1=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases}$$

Подставим в (1):

$-2=\sqrt{2+2}$ - неверно $\Rightarrow$ $(-2;0)$ - не решение.

Проверим $a=b=\sqrt{\frac{5}{2}}$.

Подставим в (3):

$$\sqrt{\frac{5}{2}}-2\sqrt{\frac{5}{2}}=\sqrt{\frac{5}{2}}$$

$-\sqrt{\frac{5}{2}}=\sqrt{\frac{5}{2}}$ - неверно, значит $a=b=\sqrt{\frac{5}{2}}$ не может давать решений для исходной системы, т.к. все преобразования до замены и сама замена были полностью равносильны.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Проверим $a=b=-\sqrt{\frac{5}{2}}$. Подставим в (3):

$$-\sqrt{\frac{5}{2}} + 2\sqrt{\frac{5}{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

$\sqrt{\frac{5}{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$ ✓ верно $\Rightarrow$ $a=b=\sqrt{\frac{5}{2}}$ дает решение для исходной системы, т.к. все преобразования до замены и сама замена являются полностью равносильными.

Обратная замена:

$$\begin{cases} x-2 = -\sqrt{\frac{5}{2}} \\ y-1 = -\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2-\sqrt{\frac{5}{2}} \\ y = 1-\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases}$$

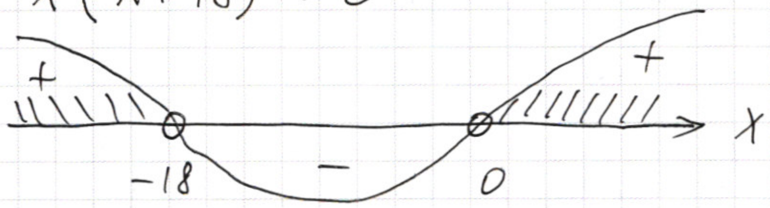
Ответ: $(6;\ 2)$, $\left(2-\sqrt{\frac{5}{2}};\ 1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$

№3.

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$$

ОДЗ: $x^2+18x>0$

$x(x+18)>0$



$x \in (-\infty; -18) \cup (0; +\infty)$

Заметим, что на ОДЗ $|x^2+18x|$ всегда будет раскрываться так: x^2+18x.

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2+18x \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}$$

Пользуясь тем, что $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

получаем:

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+(x^2+18x) \geq 13^{\log_{12}(x^2+18x)}$$

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+12^{\log_{12}(x^2+18x)} \geq 13^{\log_{12}(x^2+18x)}$$

Замена: $\log_{12}(x^2+18x)=y$

$$5^y+12^y \geq 13^y$$

При $y=2$ выполняется равенство.

Очевидно, что уравнение $5^y+12^y=13^y$ имеет только одно решение $y=2$. При $y<2$ левая часть > правой, а при $y>2$ наоборот.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Нам нужны $y \le 2$.

Обратная замена:

$\log_{12}(x^2+18x) \le 2$

$\log_{12}(x^2+18x) \le \log_{12} 144$

$x^2+18x \le 144$

$x^2+18x-144 \le 0$

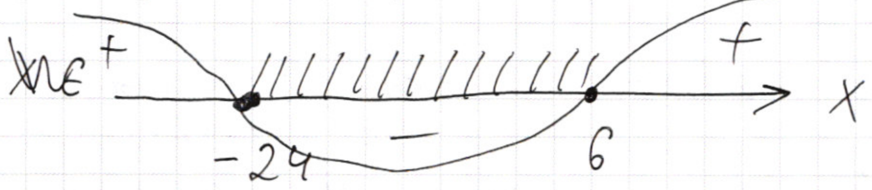
$D = 324 + 4\cdot 144 = 324+576 = 900$

Найдем корни $x^2+18x-144=0$.

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-18+30}{2} = 6 \\ x = \dfrac{-18-30}{2} = -\dfrac{48}{2} = -24 \end{array}\right.$$

Неравенство принимает вид:

$(x-6)(x+24) \le 0$

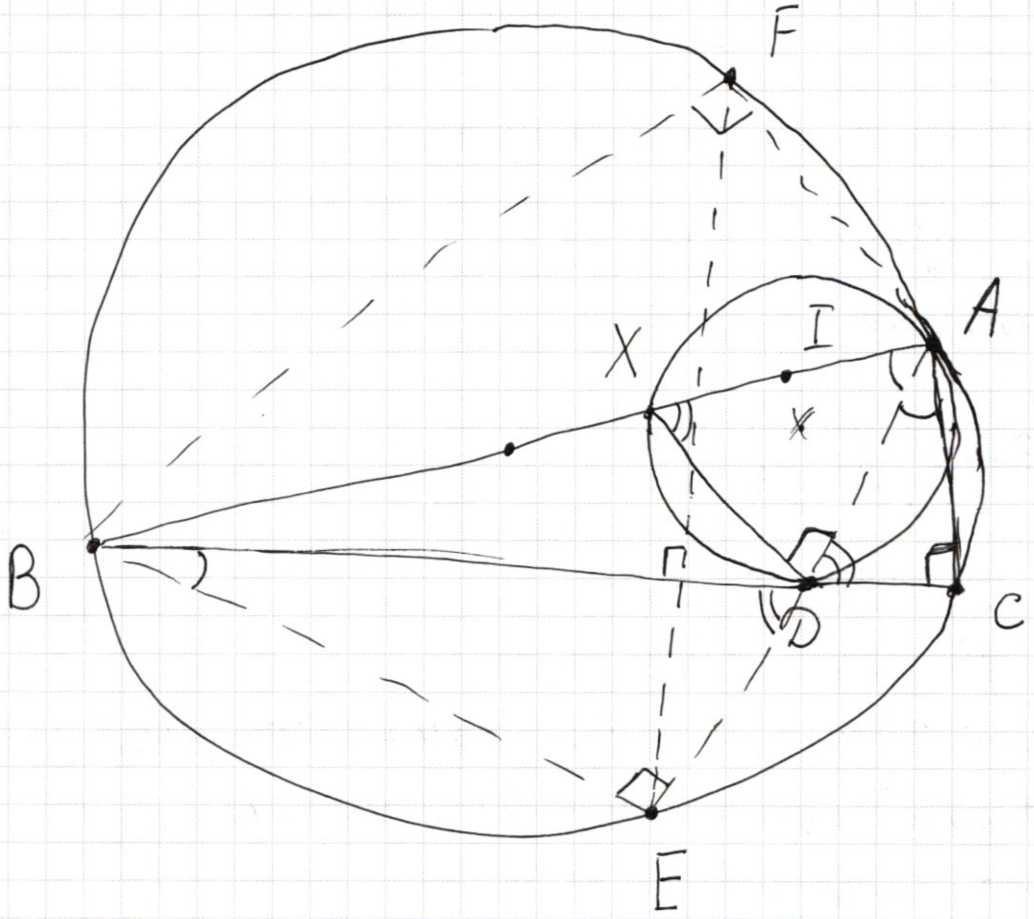


$x \in [-24; 6]$

Учитывая ОДЗ получаем: $x \in [-24; -18) \cup$
$\cup (0; 6]$

Ответ: $x \in [-24; -18) \cup (0; 6]$

№4.



1) Пусть O - центр Ω, а I - центр ω. ~~Пусть~~ X - точка пересечения AB с ω. Тогда $I \in AX$

2) $\angle ADC = \angle AXD$ (угол между хордой и кас. = вписан. углу опир. на эту хорду)
$\angle ADC = \angle BDE$ (как верт).

$\angle BFA = \angle BCA = \angle BEA = 90^\circ$ - как впис. углы, опир. на диаметр.

$\angle XDA = 90^\circ$ - ~~как~~ т.к. опирается на диаметр.

3) $\angle DAC = \angle BAD = \cancel{180^\circ} \cancel{\angle A}\ 90^\circ - \angle ADC \Rightarrow AD$ - биссектриса $\angle BAC$.

4) По ~~т. о биссектрисе~~ св-ву бисс-сы: $\frac{AB}{AC} = \frac{17}{8} \Rightarrow$
$\Rightarrow AB = \cancel{4}\ \frac{17}{8} AC \Rightarrow \cancel{M}\ 2R = \frac{17}{8} AC \Rightarrow AC = \frac{16}{17} R$

5) По т. Пифагора из $\triangle ABC$: $4R^2 = 625 + \frac{16^2}{17^2} R$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.

$$\frac{12x+11}{4x+3} \leq ax+b \leq -8x^2-30x-17$$

$$f(x) = \frac{12x+11}{4x+3}$$

$$g(x) = -8x^2-30x-17$$

Построим схематически графики $f(x)$ и $g(x)$ при $x \in \left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

1) Исследуем $f(x)$:

в $x = -\frac{3}{4}$ $f(x)$ не существует

при $x = -\frac{11}{12}$ $f(x) = 0$

$$f'(x) = \frac{12(4x+3) - 4(12x+11)}{(4x+3)^2} = \frac{\cancel{12 \cdot 4x} + 36 - \cancel{4 \cdot 12x} - 44}{(4x+3)^2}$$

$$= -\frac{8}{(4x+3)^2}$$

Заметим, что $f'(x) < 0$ всегда $\Rightarrow f(x)$ убывает на всей области определения.

$$f\left(-\frac{11}{4}\right) = \frac{-\cancel{12}^{3} \cdot \frac{11}{\cancel{4}} + 11}{-4 \cdot \frac{11}{4} + 3} = \frac{-33+11}{-11+3} = \frac{22}{8} = \frac{11}{4}$$

2) Исследуем $g(x)$:

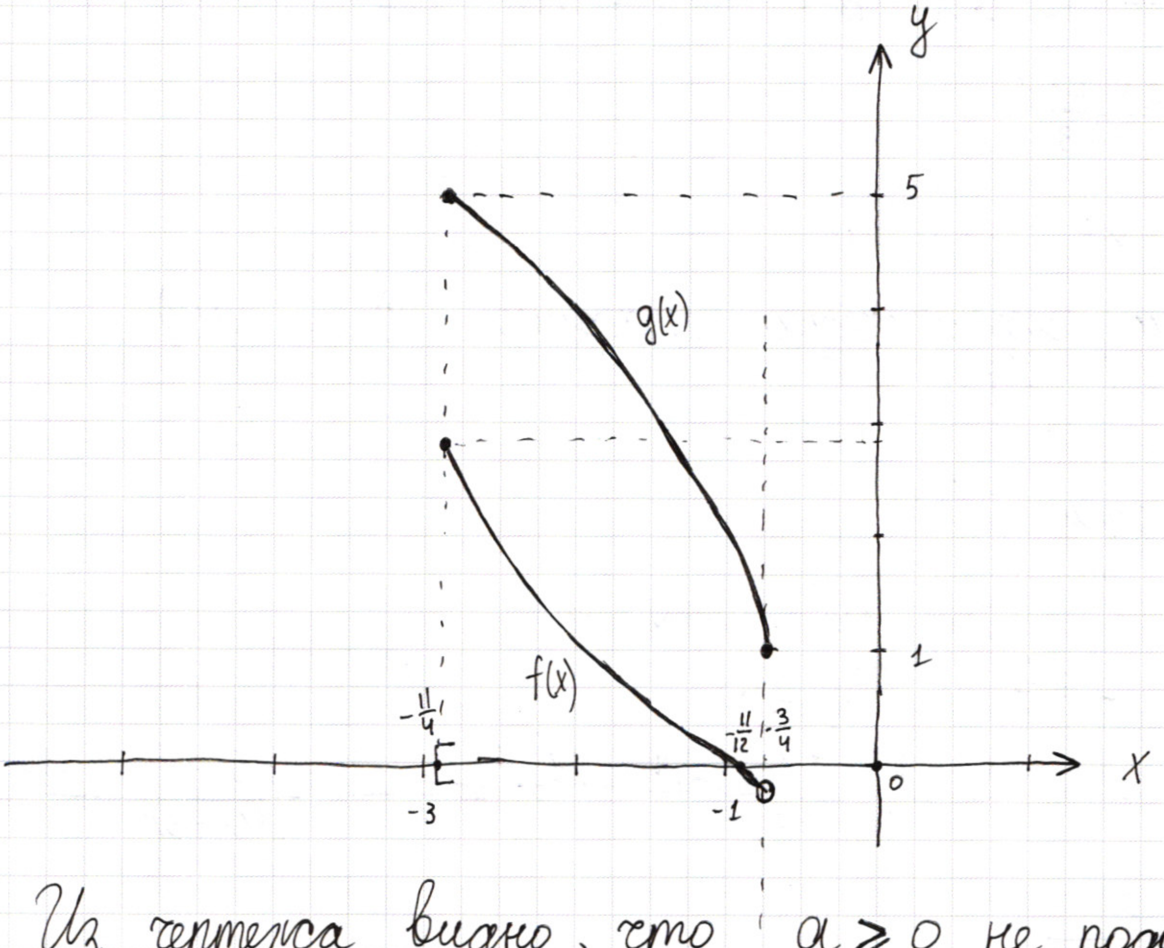
$$g\left(-\frac{11}{4}\right) = -\left(8 \cdot \frac{121}{16} - 30 \cdot \frac{11}{4} + 17\right) = -\left(\frac{121}{2} - \frac{15 \cdot 11}{2} + \frac{34}{2}\right)$$

$$= -\left(\frac{121-165+34}{2}\right) = -\left(\frac{-44+34}{2}\right) = -(-5) = 5$$

$$g\left(-\frac{3}{4}\right) = -\left(8\cdot\frac{9}{16} - 30\cdot\frac{3}{4} + 17\right) = -\left(\frac{9}{2} - \frac{45}{2} + \frac{34}{2}\right) =$$

$$= -\left(\frac{9}{2} - \frac{11}{2}\right) = 1$$

Построим схематичный чертёж:



Из чертежа видно, что $a \geqslant 0$ не подойдут.

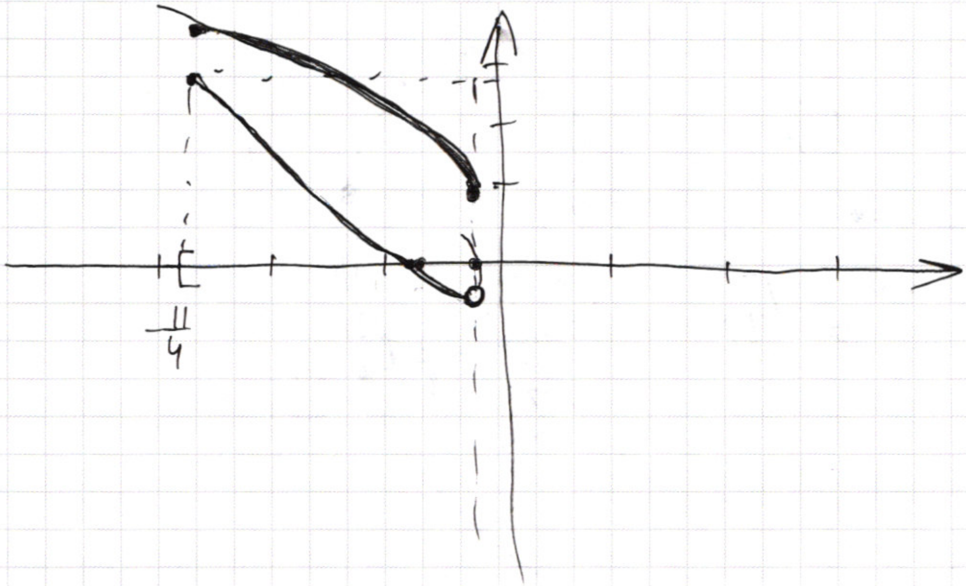
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$f(x) = \frac{12x+11}{4x+3}$ — всегда убывает

$f(-\frac{11}{4}) = \frac{11}{4}$

$g(x) = -8x^2 - 30x - 17$

$g(-\frac{11}{4}) = \frac{14}{4}$

$g(-\frac{3}{4}) = -(\cancel{8}\cdot\frac{9}{\cancel{16}_2} - \overset{15}{\cancel{30}}\cdot\frac{3}{\cancel{4}_2} + 1\overset{12}{7}) = -(\frac{9}{2} - \frac{45}{2} + \frac{34}{2})$

$= -(\frac{9}{2} - \frac{11}{2}) = -(-\frac{2}{2}) = 1$

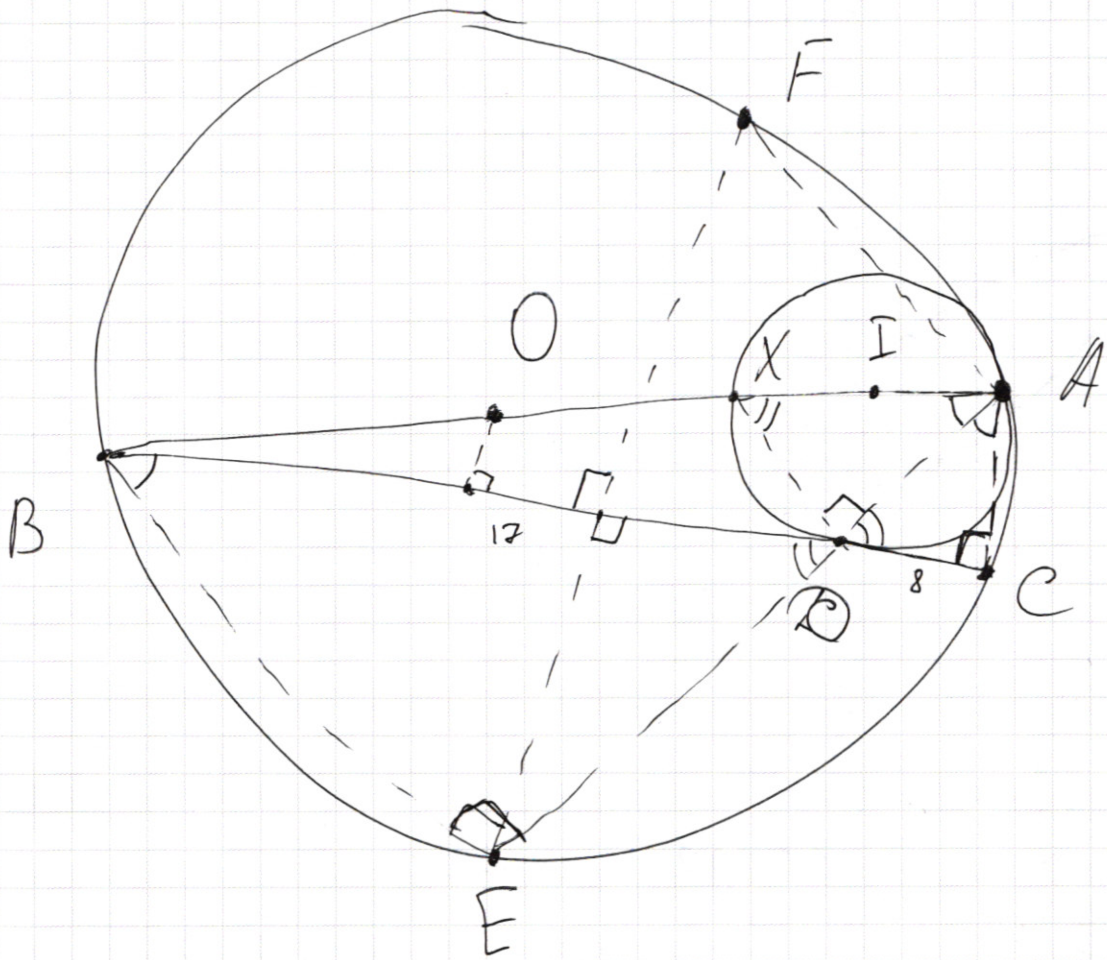
$$\begin{array}{r} \times\ 15 \\ 11 \\ \hline 15 \\ 15\ \ \\ \hline 165 \end{array}$$

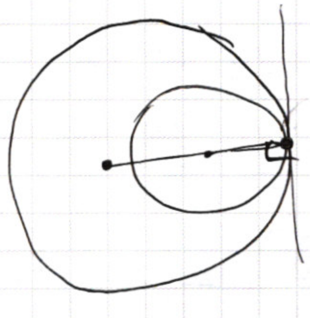
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)





$BX \cdot XA = 17^2$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

$$xy-x-2y+2 = x(y-1)-2(y-1) = (x-2)(y-1)$$

$$(x-2)-2(y-1)=\sqrt{(x-2)(y-1)}$$

$$(x^2-4x+4)-4+(\underbrace{9y^2}_{(3y)^2}-\underbrace{18y}_{2\cdot(3y)\cdot 3}+9)-9=12$$

$$(x-2)^2+(3y-3)^2=25$$

$$\begin{cases} (x-2)-2(y-1)=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$$

Замена:

$x-2=a$

$y-1=b$

$$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \quad (1) \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$$

$$a^2-4ab+4b^2=ab$$

$$a^2-5ab+4b^2=0$$

$$D=25b^2-16b^2=9b^2 \Rightarrow \quad a=\frac{5b\pm|3b|}{2}$$

$b>0$

$$\left[\begin{aligned} a&=\frac{5b-3b}{2}=b \\ a&=\frac{5b+3b}{2}=4b \end{aligned}\right.$$

$b<0$

$$a=\frac{5b+3b}{2}=4b$$

$$a=\frac{5b-3b}{2}=$$

$a = b = \sqrt{\frac{5}{2}}$ $\times$

$-\sqrt{\frac{5}{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$ $\times$

$\times\begin{array}{r}18\\18\\\hline 144\\18\\\hline 324\end{array}$ $\times\begin{array}{r}144\\4\\\hline 576\end{array}$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$

$5^{\log_{12} t} + t \geq t^{\log_{12} 13}$

$5^{\log_{12} t} + 12^{\log_{12} t} \geq 13^{\log_{12} t}$

$5^y + 12^y \geq 13^y$

$25 + 144 = 169$

$D = 324 + 4 \cdot 144$

$324 + 576$

$+\begin{array}{r}324\\576\\\hline 900\end{array}$

$y \leq 2$

$\log_{12} t \leq 2$

$\log_{12} t \leq \log_{12} 144$

$t \leq 144$

$x^2+18x \leq 144$

$x^2+18x-144 \leq 0$

$\frac{2R}{AC} =$

$12^2 = 3^2 \cdot 4^2$ $D = 18^2 + 4 \cdot 144$

$5^{2y} + 12^{2y} + 2 \cdot 5^{2y} 12^{2y} \geq 13^{2y}$

13^{2y}

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$\frac{12x+11}{4x+3}$

$y=-8x^2-30x-17$

$-8x^2+30x+17=0$

$D=900-32\cdot 17=356$

$178 : 2 = 89$

$32 \cdot 17 = 544$

$900-544=356$

$356 : 2 = 178$

$17 \cdot 5 = 85$

$13 \cdot 5 = 65$

356 | 2
178 | 2
89

$2\sqrt{89}$

$y\left(-\frac{11}{4}\right)=\frac{-33+11}{-11+3}=$

$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{-30-2\sqrt{89}}{16} \\ x=\frac{-30+2\sqrt{89}}{16} \end{array}\right.$$

$=\frac{-22}{-8}=\frac{22}{8}=\frac{11}{4}$

$\frac{14}{4}$

$-8\cdot\frac{121}{16}+30\cdot\frac{11}{4}+17=$

$=-\frac{121}{2}+\frac{15\cdot 11}{2}+17$

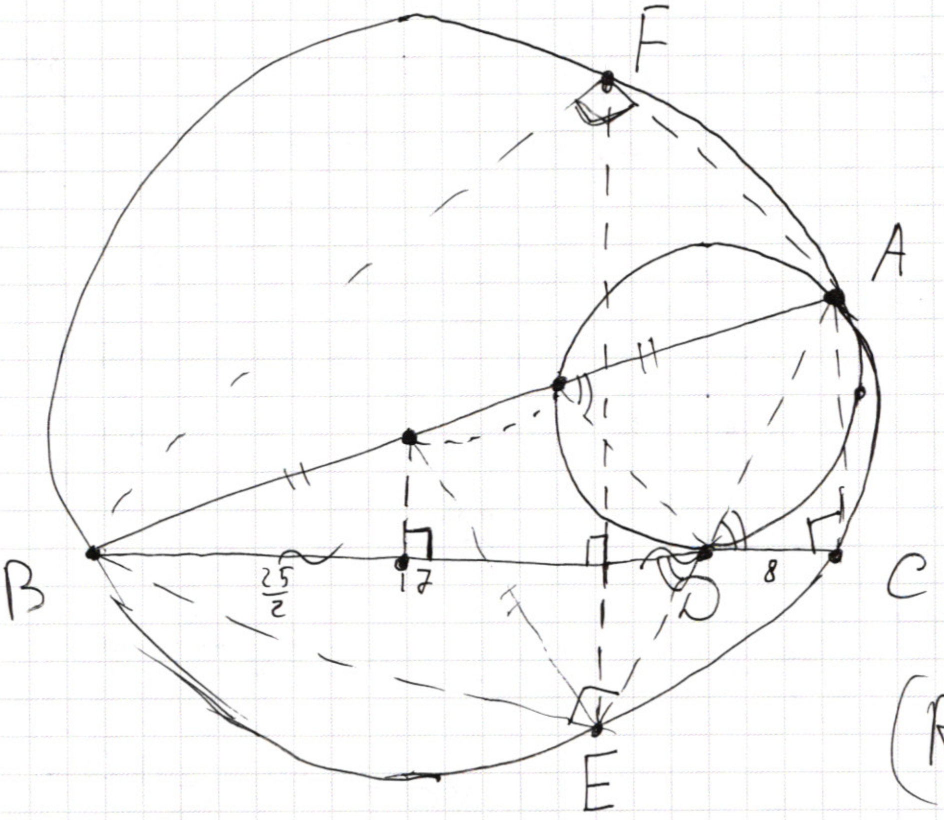
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$(R+x)\cdot R=17^2$

$$y=\frac{12x+11}{4x+3}$$

$x=-\frac{3}{4}$ – асимптота.

$-\frac{3}{4}$ $\wedge$ $-\frac{11}{12}$ 13

$-\frac{9}{12}$ $\wedge$ $-\frac{11}{12}$

$12x=-11$

$x=-\frac{11}{12}$ – нуль

$$y'=\frac{12(4x+3)-4(12x+11)}{(4x+3)^2}=\cancel{12\cdot 4x}+36-\cancel{4\cdot 12x}-44$$

Функция всегда убывает.

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$

$\cancel{2\sin(}-\frac{2}{\sqrt{5}}\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$

$$\boxed{\cos 2\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}}$$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin^2 2\beta = 1-\frac{20}{25} = \frac{5}{25}$

$\sin 2\beta = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$

1. $\cos 2\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ $\quad \sin 2\beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$\sin 2\alpha \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} + \cos 2\alpha \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha \cdot 2\sqrt{5} + \cos 2\alpha \cdot \sqrt{5} = -\frac{5}{\sqrt{5}}$

$2\cdot\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$4\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha - \cancel{\sin^2\alpha} + \cancel{\sin^2\alpha} + \cos^2\alpha = 0$

$\cancel{2}4\sin\alpha\cos\alpha + \cancel{2}\cos^2\alpha = 0$

$\cos\alpha(2\sin\alpha + \cos\alpha) = 0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$2\sin\alpha + \cos\alpha = 0 \quad | : \cos\alpha \neq 0$

$2\,tg\,\alpha + 1 = 0$

$tg\,\alpha = -1$

2. $\cos 2\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5} \qquad \sin 2\beta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\sin 2\alpha \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} - \cos 2\alpha \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha \cdot 2\sqrt{5} - \cos 2\alpha \cdot \sqrt{5} = -\frac{5}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha \cdot 2 - \cos 2\alpha = -1$

$4\sin\alpha\cos\alpha - \cancel{\cos^2\alpha} + \sin^2\alpha + \cancel{\cos^2\alpha} + \sin^2\alpha = 0$

$4\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin^2\alpha = 0$

$\sin\alpha\,(2\cos\alpha + \sin\alpha) = 0$

$\sin\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad tg\,\alpha = 0$

$2\cos\alpha + \sin\alpha = 0 \quad | : \cos\alpha \neq 0$

$2 + tg\,\alpha = 0$

$tg\,\alpha = -2$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)