МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}, \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}, \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y-2x\geq 0 \quad (1) \\ 9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2 \quad (2) \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \quad (3) \end{cases}$$

Преобразуем ур-е (2):

$4x^2+2x-15xy+9y^2+3y-2=0.$

Решим его как квадратное отн. x:

$D=(2-15y)^2-16(9y^2+3y-2)=4-60y+225y^2-144y^2-48y+32=$
$=81y^2-108y+36=(9y-6)^2$

$x=\dfrac{15y-2\pm(9y-6)}{8}=3y-1;\ \dfrac{3y+2}{4}$

• При $x=3y-1$ ур-е (3) принимает вид:

$3(3y-1)^2+3y^2-6(3y-1)-4y=4 \Leftrightarrow 30y^2-40y+5=0 \Leftrightarrow$
$6y^2-8y+1=0 \Leftrightarrow y=\dfrac{4\pm\sqrt{16-6}}{6}=\dfrac{4\pm\sqrt{10}}{6}$

При $x=3y-1$ неравенство (1) принимает вид $3y-6y+2\geq 0 \Leftrightarrow y\leq\dfrac{2}{3}$, а значит из полученных ~~реш~~ значений y только $y=\dfrac{4-\sqrt{10}}{6}$ явл. решением, тогда $x=\dfrac{4-\sqrt{10}}{2}-1=\dfrac{2-\sqrt{10}}{2}$.

• При $x=\dfrac{3y+2}{4}$ получим

$\dfrac{3(3y+2)^2}{16}+3y^2-\dfrac{3(3y+2)}{2}-4y-4=0 \quad |\times 16$

$3(9y^2+12y+4)+48y^2-24(3y+2)-64y-64=0$

$75y^2-100y-100=0 \Leftrightarrow 3y^2-4y-4=0 \Leftrightarrow y=\frac{2\pm\sqrt{16}}{3}=2;-\frac{2}{3}$

При $y=2$, $x=\frac{6+2}{4}=2$, эти корни удовл. нер-ву(1)

При $y=-\frac{2}{3}$, $x=0$ эти корни неудовл. нер-ву(1) $\Rightarrow$ решением не является.

Объединяя оба случая, получаем 2 решения.

Ответ: $(2;2)$, $\left(\frac{2-\sqrt{10}}{2};\frac{4-\sqrt{10}}{6}\right)$.

№1

Преобразуем $2^е$ равенство:

$\sin 2\alpha\cos 4\beta+\sin 4\beta\cos 2\alpha+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}$

$\sin 2\alpha(2\cos^2 2\beta-1)+2\sin 2\beta\cos 2\beta\cos 2\alpha+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$

$2\cos^2 2\beta\sin 2\alpha+2\sin 2\beta\cos 2\beta\cos 2\alpha=-\frac{8}{17}$

$2\cos 2\beta(\cos 2\beta\sin 2\alpha+\cos 2\alpha\sin 2\beta)=-\frac{8}{17}.$

$\cos 2\beta\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{4}{17}$

Из $1^{го}$ равенства $\cancel{\cos}$ $\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$, тогда

$\cos 2\beta=\frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin 2\beta=\pm\sqrt{1-\cos^2 2\beta}=\pm\frac{1}{\sqrt{17}}.$

Преобразуем $1^е$ равенство:

$\sin 2\alpha\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

- При $\cos 2\beta=\frac{4}{\sqrt{17}}$, $\sin 2\beta=\frac{1}{\sqrt{17}}$, получим

$\frac{4\sin 2\alpha}{\sqrt{17}}+\frac{\cos 2\alpha}{\sqrt{17}}=-\frac{1}{\sqrt{17}} \Leftrightarrow 8\sin\alpha\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1=-1 \Leftrightarrow$

$2\cos\alpha(4\sin\alpha+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\alpha=0\\ \sin\alpha=-\frac{1}{4}\end{array}\right.$

При $\cos\alpha=0$ $tg\alpha$ не определен; при $\sin\alpha=-\frac{1}{4}$ $\cos\alpha=$

$=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\pm\frac{\sqrt{15}}{4} \Rightarrow tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\pm\frac{1}{\sqrt{15}}$

- При $\cos 2\beta=\frac{4}{\sqrt{17}}$, $\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt{17}}$, получим.

$\frac{4\sin 2\alpha}{\sqrt{17}}-\frac{\cos 2\alpha}{\sqrt{17}}=-\frac{1}{\sqrt{17}} \Leftrightarrow 8\sin\alpha\cos\alpha-(\cancel{2\cos^2\alpha-1}\ 1-2\sin^2\alpha)=-1 \Leftrightarrow$

$2\sin\alpha(4\cos\alpha+$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2\cos\alpha(4\sin\alpha+\cos\alpha)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\alpha=0\\ 4\sin\alpha+\cos\alpha=0\end{array}\right.$

При $\cos\alpha=0$ $tg\,\alpha$ не определен, при $4\sin\alpha+\cos\alpha=0$, ~~tg α~~ поделив на $\cos\alpha\neq0$, получим $[tg\,\alpha=-\frac{1}{4}]$

При $\cos 2\beta=\frac{4}{\sqrt{17}}$, $\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt{17}}$, получим

$\frac{4\sin 2\alpha}{\sqrt{17}}-\frac{\cos 2\alpha}{\sqrt{17}}=-\frac{1}{\sqrt{17}} \Leftrightarrow 8\sin\alpha\cos\alpha-(1-2\sin^2\alpha)=-1 \Leftrightarrow$

$8\sin\alpha\cos\alpha+2\sin^2\alpha=0 \Leftrightarrow 2\sin\alpha(4\cos\alpha+\sin\alpha)=0 \Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l}\sin\alpha=0\\ 4\cos\alpha+\sin\alpha=0.\end{array}\right.$

При $\sin\alpha=0$ $[tg\,\alpha=0]$; при $4\cos\alpha+\sin\alpha=0$, поделив на $\cos\alpha\neq0$, получим $[tg\,\alpha=-4]$.

Были получены 3 значения $tg\,\alpha$, по условию их не менее 3-х, значит все они подходят.

<u>Ответ</u>: $tg\,\alpha=-4$, $tg\,\alpha=0$, $tg\,\alpha=-\frac{1}{4}$.

<u>№3</u>

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geq|x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$

Решение:

ОДЗ: $x^2+6x>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<-6\\ x>0\end{array}\right.$

На ОДЗ модуль раскрывается положительно,

$(x^2+6x)^{\log_4 5}=4^{\log_4(x^2+6x)\log_4 5}=5^{\log_4(x^2+6x)}$ и

$(x^2+6x)^1=4^{\log_4(x^2+6x)}$, тогда неравенство принимает вид:

$3^{\log_4(x^2+6x)}+4^{\log_4(x^2+6x)}\geq5^{\log_4(x^2+6x)}$

Известное равенство $3^a+4^a=5^a$ достигается лишь при $a=2$ и в следствие непрерывности ф-й $y(a)=3^a+4^a$ и $y(a)=5^a$ нер-во $3^a+4^a \geq 5^a$ выполняется при ~~0 ≥~~ $a \leq 2$, а значит

$\log_4(x^2+6x) \leq 2$

На ОДЗ оно равносильно

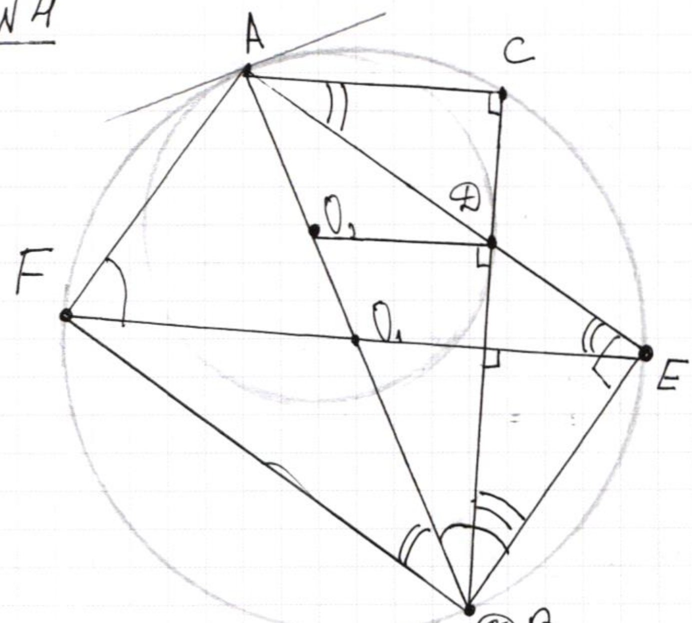
$x^2+6x \leq 16 \Leftrightarrow x^2+6x-16 \leq 0 \Leftrightarrow (x+8)(x-2) \leq 0 \Leftrightarrow$

~~$x\in[-\infty;2$~~ $x \in [-8;2]$.

С учетом ОДЗ: $x \in$ ~~$[-\infty$~~ $[-8;-6)\cup(0;2]$.

Ответ: ~~$x\in[-\infty$~~ $x \in [-8;-6)\cup(0;2]$.

№4



Дано: $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{21}$

Найти: r, R, $\angle AFE$, $S_{\triangle AEF}$.

Решение

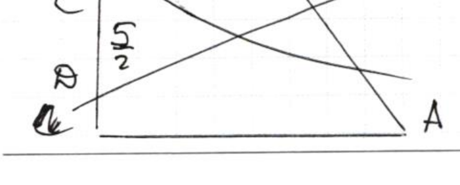
1) Т.к. AB - ~~касат~~ диаметр, провед. к ~~обоих~~ касательной обеих окружностей, то $O_2 \in AB$, где O_2 - центр ω.

2) $O_2D \perp CB$ (т.к. CB - касат.), ~~то~~ $AC \perp CB$ (т.к. $\angle ACB$ опирается на диаметр), то $AC \parallel O_2D \Rightarrow \triangle BO_2D \sim \triangle ACB \Rightarrow$

$\frac{AC}{O_2D} = \frac{CB}{DB} \Rightarrow \frac{AC}{O_2D} = \frac{\cancel{5}}{\cancel{2}} \; \frac{9\cdot 2}{13} = \frac{18}{13} \Rightarrow AC = \frac{18}{13} O_2D = \frac{18}{13} r$,

где r - радиус ω.

3) Рассмотрим трапецию O_2DCA:



Проведем прямую $CA_1 \parallel O_2A$, тогда ~~CA_1AO_2 - пар-м~~ $\Rightarrow CO_2 = A_1A = r \Rightarrow$ ~~$DA_1 = DA - AA_1 =$~~

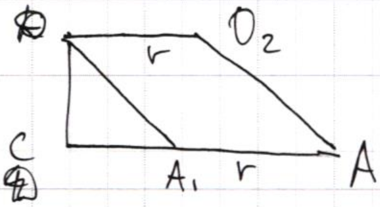
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Проведем прямую $DA_1 \parallel O_2A$, тогда DA_1AO_2 - парал-м $\Rightarrow AA_1 = r; DA_1 = O_2A = r$, тогда $CA_1 = CA - AA_1 = \frac{18}{13}r - r = \frac{5}{13}r$.

Из $\triangle CDA_1$ по теореме Пифагора:

$CA_1^2 + CD^2 = DA_1^2 \Rightarrow \frac{25}{13^2}r^2 + \frac{25}{4} = r^2 \Rightarrow \frac{13^2-5^2}{13^2}r^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 \Rightarrow$ $\left(\frac{12}{13}\right)^2 r^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 \Rightarrow \left[r = \frac{5\cdot 13}{12\cdot 2} = \frac{65}{24}\right]$

4) По теореме Пифагора для $\triangle ACB$:

$AB^2 = AC^2 + CB^2$

$AB^2 = \frac{18^2}{13^2}r^2 + 81 = \frac{18^2}{13^2}\cdot\frac{13^2\cdot 5^2}{8^2\cdot 3^2} + 81 = \frac{3^2\cdot 5^2}{4^2} + 81 = \cancel{\frac{36^2}{4^2}} =$

$\cancel{= 9^2 \Rightarrow AB = 9}$ $= \frac{1521}{4^2} = \left(\frac{39}{4}\right)^2 \Rightarrow AB = \frac{39}{4}$, но

$AB = 2R \Rightarrow \underline{R = \frac{39}{8}}$, где R - радиус Ω

~~5) ∠AFE = ∠EBA (как вписан., опир. на 1 дугу), аналогично ∠AEF = ∠ABF~~

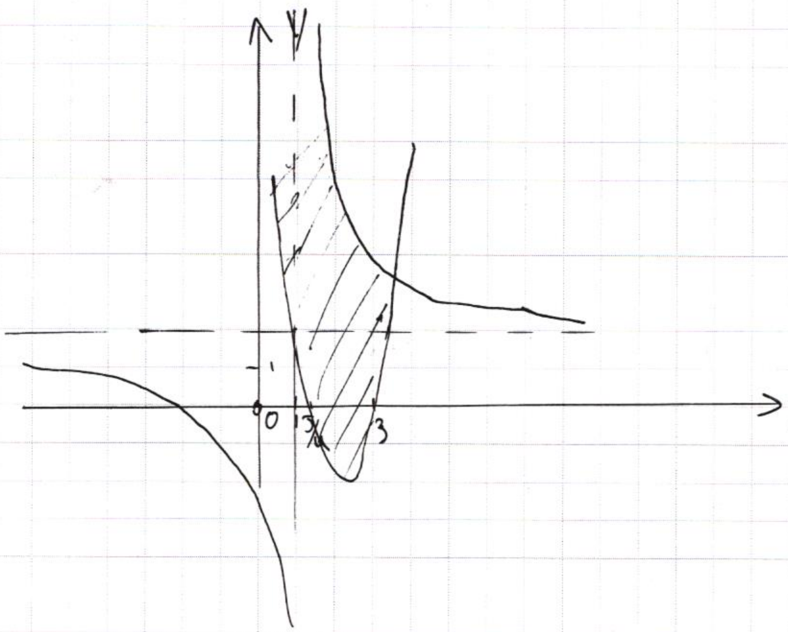
Ответ: $r = \frac{65}{24}$, $R = \frac{39}{8}$.

№6

Изобразим на плоскости yOx области, в которой выполняются оба этих нер-ва.

1) $y = \frac{4x-3}{2x-2} = \frac{4x-4+1}{2x-2} = 2 + \frac{1}{2(x-1)}$ $\cancel{\Rightarrow f(x)}$, тогда $ax+b \leq 2 + \frac{1}{2(x-1)}$

2) $y = 8x^2 - 34x + 30 = 8(x-3)\left(x - \frac{5}{4}\right)$ и $ax+b \geq 8(x-3)\left(x-\frac{5}{4}\right)$



В данной задаче нас интересует заштрихованая область. Надо найти такие значения a, в, чтобы на ~~отр~~ луче [1;3] ф-я $y=ax+в$ целиком лежала в этой области.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x = \frac{3y+2}{4}$

$\frac{3(3y+2)^2}{16} + 3y^2 - \frac{3(3y+2)}{2} - 4y = 4 \quad |\times 16$

$3(9y^2+12y+4) + 48y^2 - 24(3y+2) - 64y - 64 = 0$

$75y^2 - 100y - 100 = 0$

$3y^2 - 4y - 4 = 0$

$y = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{3} = \frac{2 \pm 4}{3} = 2; -\frac{2}{3}$

$x = 2$ $\qquad x = \frac{-2+2}{4} = 0$

$3y - 2x > 0$

$(2;2)$ $\qquad \frac{1-\sqrt{3}}{2}; \frac{3-\sqrt{3}}{6}$

3-0
5-1
7-2
11-2 13-3
17-4
19-4
23-5

$27 + 48 = 75$

$64 + 72 = 136$

$136 - 36$

12, 48

$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot 1 =$

$48 + 64 = 112$

$72 + 64 = 136$

289
240

$f\left(\frac{x}{4}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$x = \frac{17 \pm \sqrt{17^2 - 30 \cdot 8}}{}$ $\qquad \frac{17 \pm 7}{8} =$

$3^{\log_3}$

$(x^2+6x)^{\log_4 3} + (x^2+6x)^1 - (x^2+6x)^{\log_4 5} \geq 0$

$(x^2+6x)^{\log_4 3} + (x^2+6x)^1 \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}$

$a^{\log_4 3} + a^1 \geq a^{\log_4 5}$

$\log_4 5 = \cancel{\log_4(2.5 \cdot 2)}$

$\log_4\left(\frac{5}{3} \cdot 3\right) = \log_4 \frac{5}{3} + \log_4 3$

$8 \cdot 9 - 102 + 30$

$a = x^2 + 6x$

$72 + 30$

$(x^2+6x)^{\log_4 3} + 1$

$a^{\log_4 3} + a^1 \geq a^{\log_4 5}$

$a^{\log_4(4 \cdot \frac{3}{4})} = a^{1 + \log_4 \frac{3}{4}}$

$a\left(a^{\log_4 \frac{3}{4}} + 1\right) \geq a^{\log_4 5}$

$a^{\log_4 \frac{3}{4}} + 1 \geq a^{\log_4 (5) - 1}$

$a^{\log_4 \frac{3}{4}} + 1 \geq a^{\log_4 \frac{5}{4}}$

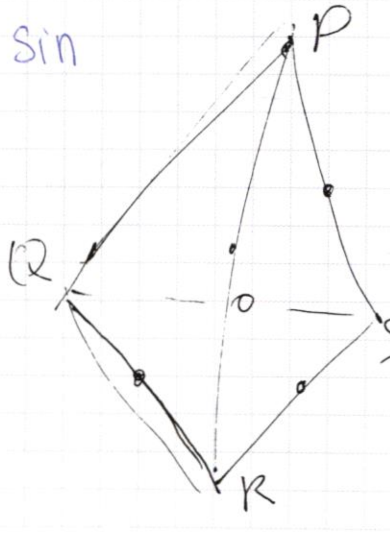
$\frac{1}{4}$

$\frac{9}{4} =$

$\log_4 \frac{5}{4} = \log$

$\sin 2\alpha + \cos 2\beta + c$

$\sin$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\sin\gamma\cos2\beta + \sin2\beta\cos\gamma = -\frac{8}{17}$. 1) $\cos2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$-\frac{\cos2\beta}{\sqrt{17}} + \frac{4\sin2\beta}{\sqrt{17}} + \sin2\alpha = -\frac{8}{17}$.

$\frac{8\sin\beta\cos\beta}{\sqrt{17}} -$

$\cancel{\sin(2(\alpha+\beta)) = -\frac{1}{\sqrt{17}}}$

$\cancel{\sin 2(\alpha+2\beta)} + \sin2\alpha = -\frac{8}{17}$.

$\sin2\alpha\cos4\beta + \sin4\beta\cos2\alpha + \sin\alpha = -\frac{8}{17}$.

$\cancel{\sin2\alpha\cos^2 ...}$

$\sin2\alpha(2\cos^2 2\beta - 1) + \sin4\beta\cos2\alpha + \sin\alpha = -\frac{8}{17}$

$2\cos^2 2\beta\sin2\alpha + \sin4\beta\cos2\alpha$.

$\boxed{\sin2\alpha\cos2\beta + \sin2\beta\cos2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}}$

$\sin2\alpha\cos2\beta + \sin2\beta\cos2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

1) $\sin2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\frac{4}{\sqrt{17}}\sin2\alpha + \frac{1}{\sqrt{17}}\cos2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$4\sin2\alpha + 1\cos2\alpha = -1$

$8\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$

$2\cos\alpha(1 + \cancel{8}4\sin\alpha)$.

$\sin\alpha = -\frac{1}{4}$

$2\cos^2 2\beta\sin2\alpha + 2\sin2\beta\cos2\beta\cos2\alpha$

$2\cos2\beta(\cos2\beta\sin2\alpha + \sin2\beta\cos2\alpha)$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot 2\cos2\beta = -\frac{8}{17}$

$\boxed{\cos2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}} \Rightarrow \boxed{\sin2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}}$

$\sin2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\frac{4}{\sqrt{17}}\sin2\alpha - \frac{1}{\sqrt{17}}\cos2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$4\sin2\alpha - 1\cos2\alpha = -1$

$8\sin\alpha\cos\alpha - (1-2\sin^2\alpha) = -1$

$\sin^2\alpha + 4\sin\alpha\cos\alpha = 0$

$\sin\alpha = 0 \Rightarrow$ $\cos\alpha = -\frac{1}{4}$

$\cancel{a^{\log_4 3} - a^{\log_4 5} \geq a^{\log_4}}$

$a^{\log_4 5} - a^{\log_4 3} \geq a^1$.

При $a > 1$

$a^1 + a^{\log_4 3} \leq a^{\log_4 5}$ $tg\alpha = 0$.

$a > 1$.

$a^{\log_4 3} \leq a^{\log_4 5} - a^1$

$\ln(\log_4 5)\, a^{\log_4 5} - 0 > 0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

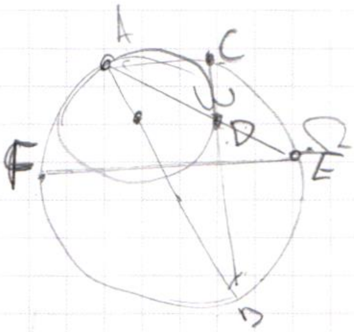
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

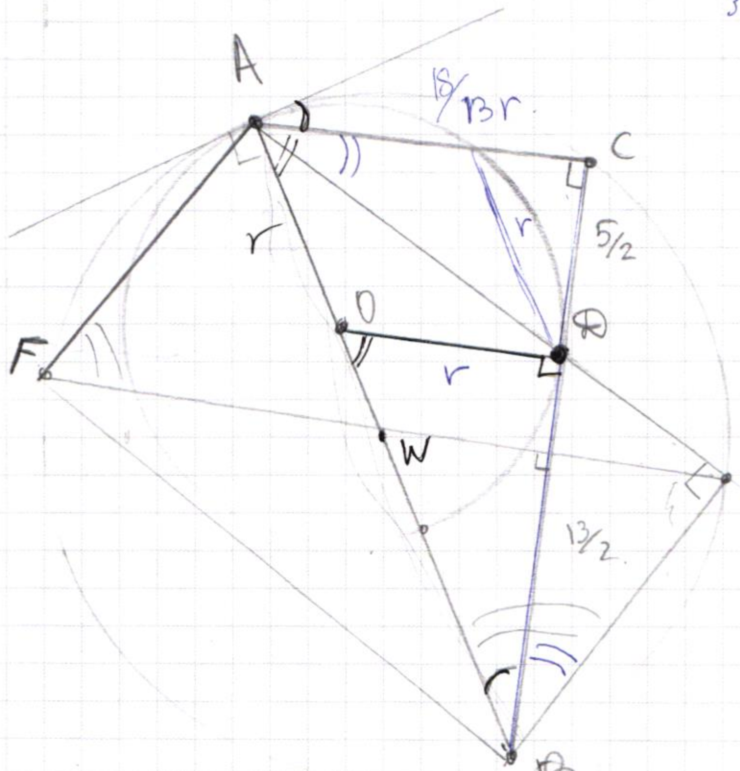


$3^{\log_4(x^2+6x)} + x^2 + 6x \geq 5^{\log_4(x^2+6x)}$

$3^{\log_4(x^2+6x)} + 4^{\log_4(x^2+6x)} \geq 5^{\log_4(x^2+6x)}$

$3^a + 4^a \geq 5^a$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{5}$ $\quad \frac{7}{12} \geq \frac{1}{5}$



$CB = 9$

$\frac{CD}{DB} = \frac{5}{2}$

$\frac{CB}{DB} = \frac{9 \cdot 2}{13} = \frac{18}{13} \Rightarrow$

$AC = \frac{18}{13} r$

$\frac{25}{4} + \frac{25}{13^2} r^2 = r^2$

$\frac{13^2 - 5^2}{13^2} r^2 = \frac{25}{4}$

$\frac{12^2}{13^2} r^2 = \frac{25}{4}$

$r^2 = \frac{(5 \cdot 13)^2}{(2 \cdot 12)^2} =$

$r = \frac{65}{24}$

$AC = \frac{5 \cdot 18}{24} = \frac{5 \cdot 3}{4} = \frac{15}{4}$

$AB = 2R = \sqrt{81 + \frac{225}{16}} =$

$\sqrt{1296} = 36$

$D/4 = 9 + 16 = 25$

$x = \frac{-3 \pm 5}{1} =$

$3^a + 4^a = 5^a$

$\log_4(x^2+6x) = 5^a - 3^a$

$\ln 3 \cdot 3^a + \ln 4 \cdot 4^a = \ln 5 \cdot 5^a$

$\frac{2 \cdot 13}{5 \cdot 12}$ $\quad \frac{5 \cdot 13}{2 \cdot 12} = \frac{65}{24}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$3^{\log_4(x^2+6x)} + 4^{\log_4(x^2+6x)} \geq 5^{\log_4(x^2+6x)}$

$\cancel{3^{\log}}$ $\cancel{\log_5}\ 3^{\log_4}$

$\log_5(3^a+4^a) \geq \cancel{\log_4 x^2+6}$ $a \geq \log_4(x^2+6x)$

$3^a + 4^a \geq 5^a$. $3^{\log_4(x^2+6x)} + 4^{\log_4(x^2+6x)} \geq 5^{\log_4}$

$x^2+6x = 4^{\log_4(x^2+6x)}$

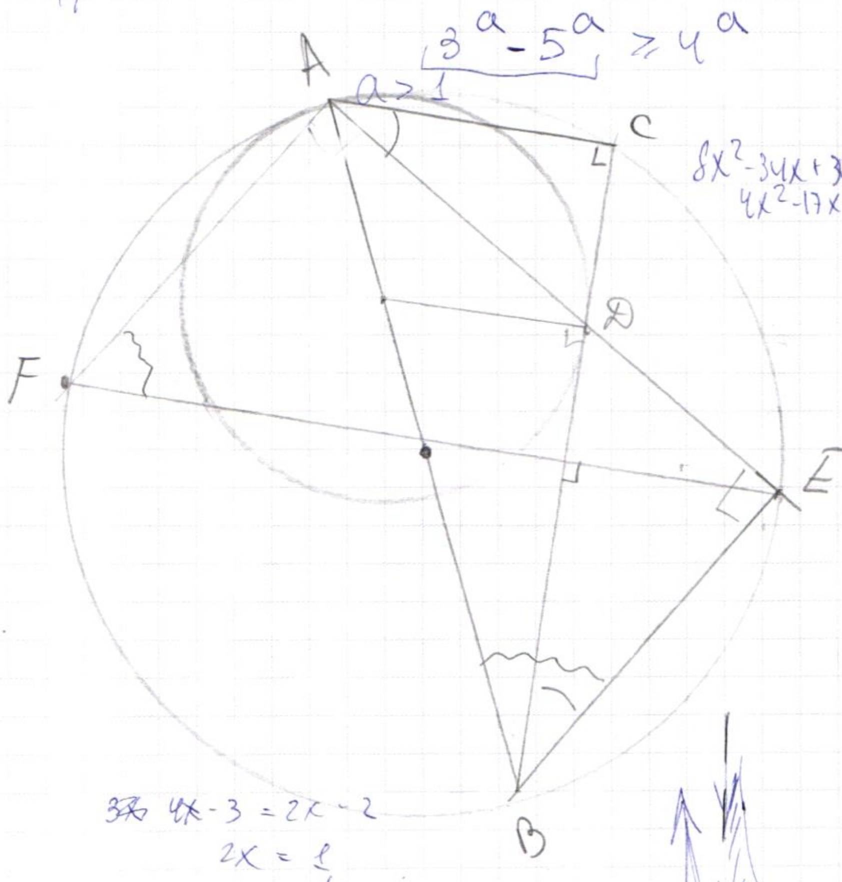
$\times\frac{17}{17}$ $\frac{11}{17}\ 9$

$\cancel{\ln a\ 3^a + \ln a}$ $3^a + 4^a$ 5^a.

$a' \ln a \cdot 3^a +$ $\underline{a=2}$. $27+64 \vee 5$

$\underbrace{3^a - 5^a}_{a>1} \geq 4^a$

$\begin{cases} ax+b \geq 8x^2-34x+30 \\ ax^2+b \leq \dfrac{4x-3}{2x-2} \end{cases}$



$8x^2-34x+30=0$
$4x^2-17x+15=0$

$\frac{4x-3}{2x-2} = \frac{4x-4+1}{2x-2} =$

$= 2 + \frac{1}{2x-2} =$

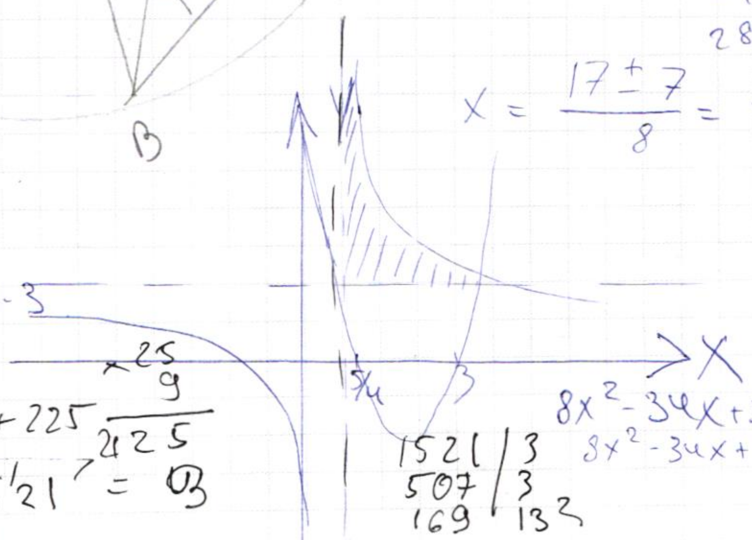
$= 2 + \frac{1}{2(x-1)}$

$8x^2-34x+30 =$
$=0$ $D/4 = 17^2 - 30\cdot 8 =$
$= 17^2 -$
$289-240=49$

$x = \frac{17\pm7}{8} = \frac{5}{4};\ 3$.

$\cancel{3x}\ 4x-3 = 2x-2$
$2x = 1$
$x = \frac{1}{2}$.

$2x-2 \leq ax+b \leq 4x-3$



36^2 $\times\frac{25}{9}$
$1296+225$ $\overline{225}$
$\sqrt{1521} = 39$
-9
6

$1521 | 3$
$507 | 3$
$169 | 13^2$

$8x^2-34x+30=2$
$8x^2-34x+28=0$.

$\times\frac{122}{69}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \cancel{\cos 4\beta \sin 2\alpha} + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin 4\beta \cos 2\alpha$

$a = \sin 2\alpha,\ \beta = \cos 2\beta$

(2) $\sin 2\alpha(1-2\sin^2 2\alpha) + 2\sin 2\alpha \cos^2 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin 2\alpha(1-2\sin^2 2\alpha + 2\cos^2 2\alpha + 1) = -\frac{8}{17}$

$\sin 2\alpha(\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha + 1) = -\frac{8}{17}\ \frac{4}{17}$

$\sin 2\alpha \cos 4\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{4}{17}$

$\cos(2\alpha+2\beta) = \pm\sqrt{1-\sin^2(2\alpha+2\beta)} = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin(\underbrace{2\alpha+2\beta}_{\varphi}) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin((2\alpha+2\beta)+2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin\varphi\cos 2\beta + \cos\varphi \sin 2\beta + \sin 2\alpha$

(5) $3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2}$

$3x^2-6x+3+3y^2$

$3(x-1)^2+3y^2-4y+$

$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$x^2+2x-6xy+3y^2+2y=0$

$3y-2x \geq 0$

$9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2$

$4x^2+2x-15xy+9y^2+3y=2$

$3x^2-6x+3+2y^2-4y+2 = 4+3+2-y^2$

$3(x-1)^2+2(y-1)^2 = 9-y^2$

$\begin{cases} 4x^2+2x-15xy+9y^2+3y=2 \quad |\times 2 \\ 3x^2-6x+3y^2-4y=4 \end{cases}$

$\cancel{4x^2+2x-15}$

$8x^2+4x-30xy+18y^2+6y = 3x^2-6x+3y^2-4y$

$5x^2+10x-30xy+15y^2+10y=0$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$x^2+2x-6xy+3y^2+2y=0$

$3y-6y+2\geq 0 \Leftrightarrow y\leq$

$x^2+2x(1-3y)+3y^2+2y=0$

$D/4=(1-3y)^2-3y^2-2y=1-6y+9y^2-3y^2-2y=6y^2-8y+1$

$9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2 \Leftrightarrow 4x^2 \cancel{-15xy}+9y^2+$

$4x^2+2x-15xy+9y^2+3y=2$

$8x^2+4x-30xy+18y^2+6y=4$

$8x^2+4x-30xy+18y^2+6y=3x^2+3y^2-6x-4y$

$5x^2+10x-30xy+15y^2+10y=0$

$x^2+2x-6xy+3y^2+2y=0$

$\cancel{x^2+2x(1-3y)+(3y^2+2y)=0}$

$\cancel{1-6y+9y^2-3y^2-2y=6y^2-8y+1=0}$

$y=4\pm\sqrt{16-6}$

$D/4=4^2-6=10$

$\frac{6y+4}{8}=\frac{3y+2}{4}$: $x^2+2x-6xy+3y^2+2y=0$

$3x^2-6x+(3y^2-4y-4)=0$

$D/4 = \cancel{9-3y^2+}\ 9-3(3y^2-4y-4)=$

$=9-9y^2+12y+12=-9y^2+12y+21=-3(3y^2+6y+7)$

$9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2$

$4x^2+2x-15xy+9y^2+3y-2=0$

$\boxed{4x^2+x(2-15y)+9y^2+3y-2=0}$

$D=(2-15y)^2-16(9y^2+3y-2)=$

$=4-60y+225y^2-144y^2-48y+32=$

$=81y^2-108y+36=(9y-6)^2$

$16\cdot 9=144$; $225-144=81$

$x=\frac{(15y-2)\pm(9y-6)}{8}$

$\boxed{x=\frac{15y-2+9y-6}{8}=\frac{24y-8}{8}=3y-1}$

$\boxed{x=\frac{15y-2-9y+6}{8}=\frac{6y+4}{8}=\frac{3y+2}{4}}$

$-18y-18y-4=-40$

1) $x=3y-1$:

$3(3y-1)^2+3y^2-6(3y-1)-4y=4$

$3(9y^2-6y+1)+3y^2-18y+6-4y=4$

$30y^2-30y+5=0$

$6y^2-6y+1=0$

$y=\frac{3\pm\sqrt{9-6}}{6}=\frac{3\pm\sqrt{3}}{6}$

$3y-2x\geq 0$

$3y-6y+2\geq 0$

$-3y\geq -2$

$y\leq\frac{2}{3}$

$\frac{3+\sqrt{3}}{6}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}$

$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6} \vee \frac{2}{3}$

$\frac{\sqrt{3}}{6} \vee \frac{1}{6}$, $>$

$\frac{3-\sqrt{3}}{2}-1=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

$\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2};\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)$.

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)