МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4x - \sqrt[3]{y^2 - 16x^2} = 44, \\ y - \sqrt[3]{y^2 - 16x^2} = -20. \end{cases}$$

2. [4 балла] Решите неравенство

$$\sqrt{\log_{3x} x^4} \leqslant \log_{9x} \frac{1}{x^2}.$$

3. [5 баллов] Найдите количество семизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые три последовательные степени числа десять равна 12345.

4. [5 баллов] Даны равнобокая трапеция $ABCD$ (AD и BC – основания, $AD > BC$) и окружность ω с центром C, касающаяся стороны AD. Касательные к ω, проведённые из точки B, пересекают прямую AD в точках P и Q (точка P лежит между Q и D). На продолжении стороны CB за точку B выбрана точка N так, что $\angle CPN$ – прямой. Найдите углы ADC, NQC и площадь четырёхугольника $NCDQ$, если известно, что $\angle NCP = \operatorname{arctg} \frac{12}{5}$, $AP = \frac{13}{2}$, $NC = 13$.

5. [5 баллов] Дана система уравнений

$$\begin{cases} \sin(x+y) = 9\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right), \\ \cos(x+2y) - \sqrt{3}\sin(x+2y) = -16\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right). \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y$, если известно, что оно определено и что этих значений не меньше двух.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\sqrt{\frac{275}{4} + 25x - x^2} \leqslant ax + b \leqslant -\frac{x^2}{3} + \frac{5x}{3} + \frac{45}{4}$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right]$.

7. [6 баллов] Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, грани $ABCD$ и CDD_1C_1 которого являются прямоугольниками. Сфера S касается прямых B_1C_1 и C_1D_1, плоскости CDD_1, а также плоскости ABC в точке A. Эта сфера повторно пересекает отрезок AC_1 в точке M. Найдите $\angle BB_1C_1$ и объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если известно, что $AM = 5$, $C_1M = 3$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 3) Пусть это семизначное число: $\overline{x_7x_6x_5x_4x_3x_2x_1}$, где $x_7 \in \{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$; $x_6, x_5, x_4, x_3, x_2, x_1 \in \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$

Свойство: сумма остатков от деления числа на некоторые три последовательные степени числа 10 равна 12345.

Пусть эти степени 10^n, 10^{n+1} и 10^{n+2}, поскольку сумма остатков это пятизначное число, то $n+2 \leq 6 \Rightarrow n \leq 4$, но при $n=2$ следует, что

т.к. x_6 может быть нулем, а x_7 нет.

$\overline{x_2x_1} + \overline{x_3x_2x_1} + \overline{x_4x_3x_2x_1} = 12345$

$10x_2 + x_1 + 100x_3 + 10x_2 + x_1 + 1000x_4 + 100x_3 + 10x_2 + x_1 = 12345$

$1000x_4 + 200x_3 + 30x_2 + 3x_1 = 12345$ и $\max(1000x_4) = 9000$; $\max(200(x_3)) = 1800$; $\max(30x_2) = 270$ и $\max(3x_1) = 27 \Rightarrow$ max их сумма: 11097

$\Rightarrow n > 2 \Rightarrow n \in (2;4] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n=3 \\ n=4 \end{array}\right.$

1) Если $n=3$: $\overline{x_3x_2x_1} + \overline{x_4x_3x_2x_1} + \overline{x_5x_4x_3x_2x_1} = 12345$

$\Rightarrow 100x_3 + 10x_2 + x_1 + 1000x_4 + 100x_3 + 10x_2 + x_1 + 10000x_5 + 1000x_4 + 100x_3 + 10x_2 + x_1 = 12345$

$10000x_5 + 2000x_4 + 300x_3 + 30x_2 + 3x_1 = 12345 \,|:5$

$2000x_5 + 400x_4 + 60x_3 + 6x_2 + \frac{3x_1}{5} = 2469 \Rightarrow x_1 \vdots 5 \Rightarrow x_1 \in \{0;5\}$

$x_1 = 5$ $\qquad$ $x_1 = 0$

а) Если $x_1 = 0$, то $2000x_5 + 400x_4 + 60x_3 + 6x_2 = 2469$, сумма четных чисел четна, но 2469 - нечетное число $\Rightarrow x_1 \neq 0$

б) Если $x_1 = 5$, то $2000x_5 + 400x_4 + 60x_3 + 6x_2 = 2469 - 3$

$2000x_5 + 400x_4 + 60x_3 + 6x_2 = 2466 \,|:2 \Rightarrow 1000x_5 + 200x_4 + 30x_3 + 3x_2 = 1233$

$\Rightarrow x_5 = 1$ или $x_5 = 0$, больше не может, т.к. 1233

• если $x_5 = 1$, то $200x_4 + 30x_3 + 3x_2 = 233$, тогда $x_4 \in \{0;1\}$, больше нельзя из-за 233

V1) если $x_4=0$, то $30x_3+3x_2=233 \Rightarrow 3(10x_3+x_2)=233$

$\Rightarrow 10x_3+x_2=\frac{233}{3}$, но $(10x_3+x_2)\in N \Rightarrow$ не подходит

V2) если $x_4=1$, то $30x_3+3x_2=33 \Rightarrow 10x_3+x_2=11$, значит $\begin{cases} x_3=1 \\ x_2=1 \end{cases}$

• если $x_5=0$, то $200x_4+30x_3+x_2=411\cancel{3} \,|:3 \Rightarrow \frac{200}{3}x_4+10x_3+x_2=411$

$\Rightarrow x_4 \vdots 3 \Rightarrow x_4\in\{0;3;6;9\}$

o $x_4=0$, то $30x_3+3x_2=1233$, но $\max(30x_3)=270 \Rightarrow$ нет

o $x_4=3$, то $200+10x_3+x_2=411$, то $10x_3+x_2=211$, но $\max(10x_3)=90$ и $\max(x_2)=9 \Rightarrow$ не подходит

o $x_4=6$, то $10x_3+x_2=11 \Rightarrow \begin{cases} x_3=1 \\ x_2=1 \end{cases}$

o $x_4=9$, то $1800+30x_3+3x_2=1233 \Rightarrow 30x_3+3x_2<0$ не подходит

$\Rightarrow$ если $n=3$, то числа $\overline{x_7x_6 11115} \rightarrow 9\cdot10\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1=90$ вар

$\overline{x_7x_6 06115} \rightarrow 9\cdot10\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1=90$ вар

2) Если $n=4$, то $\overline{x_4x_3x_2x_1}+\overline{x_5x_4x_3x_2x_1}+\overline{x_6x_5x_4x_3x_2x_1}=12345$

$\Rightarrow 10^6x_6+20000x_5+3000x_4+300x_3+30x_2+3x_1=12345$

$\Rightarrow x_6$ и x_5 являются нулями $\Rightarrow 3000x_4+300x_3+30x_2+3x_1=12345 \,|:5$

$600x_4+60x_3+6x_2+\frac{3x_1}{5}=2469 \Rightarrow x_1 \vdots 5 \Rightarrow x_1\in\{0;5\}$

• если $x_1=0$, то сумма четных чисел равна нечетному, что недопустимо

$\Rightarrow x_1\neq0$

• если $x_1=5$, то $600x_4+60x_3+6x_2=2466 \,|:6 \Rightarrow 100x_4+10x_3+x_2=411$

$\Rightarrow x_4\in\{4;3;2;1;0\} \Rightarrow$ • если $x_4=4$, то $10x_3+x_2=11$, и $\begin{cases} x_3=1 \\ x_2=1 \end{cases}$

• если $x_4=3$, то $10x_3+x_2=111$, но $\max(10x_3)=90$ и $\max(x_2)=9 \Rightarrow$ не подходит и меньшее значение x_4 не будет также подходит

$\Rightarrow$ если $n=4$, то число $\overline{x_7 004115} \rightarrow 9\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1 \Rightarrow 9$ вар

$\Rightarrow$ Всего 189 чисел

Ответ: 189 чисел

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание 1)

$$\begin{cases} 4x - \sqrt[3]{y^2-(4x)^2} = 44 \\ y - \sqrt[3]{y^2-(4x)^2} = -20 \end{cases}$$

1) Вычтем из ~~первого~~ второго выражения первое:

$$y - 4x - \sqrt[3]{(y-4x)(y+4x)} + \sqrt[3]{(y-4x)(y+4x)} = -20-44$$

$$y-4x=-64 \Rightarrow y=-64+4x$$

$$\Rightarrow 4x - \sqrt[3]{-64(y+4x)} = 44 \Rightarrow 4x-(-4)\sqrt[3]{y+4x}=44$$

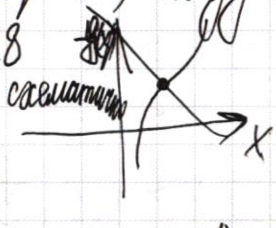
$$4x+4\sqrt[3]{y+4x}=44$$

$\Rightarrow x+\sqrt[3]{y+4x}=11$, заменим y на $(-64+4x)$

$$x+\sqrt[3]{-64+4x+4x}=11 \Rightarrow x+\sqrt[3]{-64+8x}=11 \Rightarrow x+\sqrt[3]{8x-64}=11$$

$$x+\sqrt[3]{2^3(x-8)}=11 \Rightarrow x+2\sqrt[3]{x-8}=11 \Rightarrow 2\sqrt[3]{x-8}=11-x$$

Тогда $f_1(x)=2\sqrt[3]{x-8}$ — возрастающая функция, в свою очередь $f_2(x)=11-x$ — убывающая функция $\Rightarrow$ по св-ву монотонности функции уравнение имеет не более одного корня, найду его подбором: $x=9 \Rightarrow 2\sqrt[3]{9-8}=2 \Rightarrow y=-64+\overset{36}{4\cdot 9}=-28$



$\Rightarrow$ Ответ: $(9; -28)$

Задание 2)

$\sqrt{\log_{3x} x^4} \le \log_{9x}\frac{1}{x^2}$ Ограничения на x: $\begin{cases} 3x\neq1 \\ 3x>0 \\ x^4>0 \\ 9x>0 \\ 9x\neq1 \\ \frac{1}{x^2}>0 \end{cases} \Rightarrow x\in\left(0;\frac19\right)\cup\left(\frac19;\frac13\right)$ и $\left(\frac13;+\infty\right)$

$$\sqrt{\log_{3x}x^4} \le \log_{9x}x^{-2}$$

$$2\sqrt{\log_{3x}x} \le -2\log_{9x}x \;\Big|:2$$

$$\sqrt{\log_{3x}x} \le -\log_{9x}x \Rightarrow \sqrt{\frac{\log_3 x}{\log_3 3x}} + \frac{\log_3 x}{\log_3 9x} \le 0$$

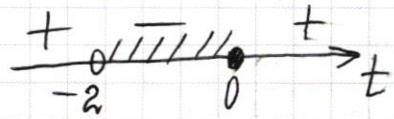
$$\sqrt{\frac{\log_3 x}{\log_3 x+\log_3 3}} + \frac{\log_3 x}{\log_3 9+\log_3 x} \le 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{\log_3 x}{\log_3 x+1}} + \frac{\log_3 x}{2+\log_3 x}\le 0$$

Пусть $\log_3 x = t$, то $\sqrt{\frac{t}{t+1}}+\frac{t}{t+2}\le 0$

Следовательно, это неравенство равносильно следующей системе:

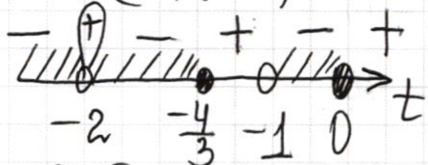
$$\begin{cases} \frac{t}{t+1} \leq \frac{t^2}{(t+2)^2} \\ \frac{-t}{t+2} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{t(t^2+4t+4)-t^2(t+1)}{(t+1)(t+2)^2} \leq 0 \ (2) \\ \frac{t}{t+2} \leq 0 \ (1) \end{cases}$$

1) $\frac{t}{t+2} \leq 0 \Rightarrow$ нули числителя: $t=0$
нули знаменателя: $t=-2$

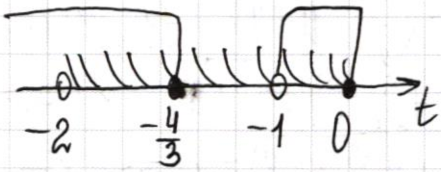


2) $\frac{t(t^2+4t+4-t^2-t)}{(t+1)(t+2)^2} \leq 0 \Rightarrow \frac{t(3t+4)}{(t+1)(t+2)^2} \leq 0$ нули числителя $\left[\begin{array}{l} t=0 \\ 3t=-4 \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=\frac{-4}{3} \end{array}\right.$

нули знаменателя: $\left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=-2 \ (\text{кр.} 2) \end{array}\right.$



3) Выбирая общее при решении системы:



$\Rightarrow t \in \left(-2; -\frac{4}{3}\right] \cup (-1; 0]$

Выполним обратную замену: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_3 x > -2 \\ \log_3 x \leq -\frac{4}{3} \end{cases} (1) \\ \begin{cases} \log_3 x > -1 \\ \log_3 x \leq 0 \end{cases} (2) \end{array}\right.$

1) $\begin{cases} \log_3 x > \log_3 \frac{1}{9} \\ \log_3 x \leq \log_3 \left(\frac{1}{3\sqrt[3]{3}}\right) \end{cases}$

$3>1 \Rightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{9} \\ x \leq \frac{1}{3\sqrt[3]{3}} \end{cases}$

2) $\begin{cases} \log_3 x > \log_3 \frac{1}{3} \\ \log_3 x \leq \log_3 1 \end{cases}$, т.к. $3>1 \Rightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{3} \\ x \leq 1 \end{cases}$

Объединяя решения: $x \in \left(\frac{1}{9}; \frac{1}{3\sqrt[3]{3}}\right] \cup \left(\frac{1}{3}; 1\right]$, что выполняется при всех ограничениях на x

Ответ: $x \in \left(\frac{1}{9}; \frac{1}{3\sqrt[3]{3}}\right] \cup \left(\frac{1}{3}; 1\right]$

Задача 5)

Дано: равнобокая трапеция; $\angle NCP = \operatorname{arctg} \frac{12}{5}$; $AP = \frac{13}{2}$; $NC = 13$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание 6) $\sqrt{\frac{275}{4}+25x-x^2} \le ax+b \le -\frac{x^2}{3}+\frac{5x}{3}+\frac{45}{4} \Rightarrow$ $\left[-\frac{5}{2};\frac{7}{2}\right] \Rightarrow [-2{,}5;3{,}5]$

1) Равносильный переход к системе $\begin{cases} \sqrt{-x^2+25x+\frac{275}{4}} \le ax+b \ (1) \\ -\frac{x^2}{3}+\frac{5x}{3}+\frac{45}{4} \ge ax+b \end{cases}$

1) $f(x)=\sqrt{-x^2+25x+\frac{275}{4}}$

парабола, ветви "вниз" при $f(x)\ge 0$

$x_b=\frac{-b}{2a}=\frac{-25}{-2}=\frac{25}{2}=12{,}5$

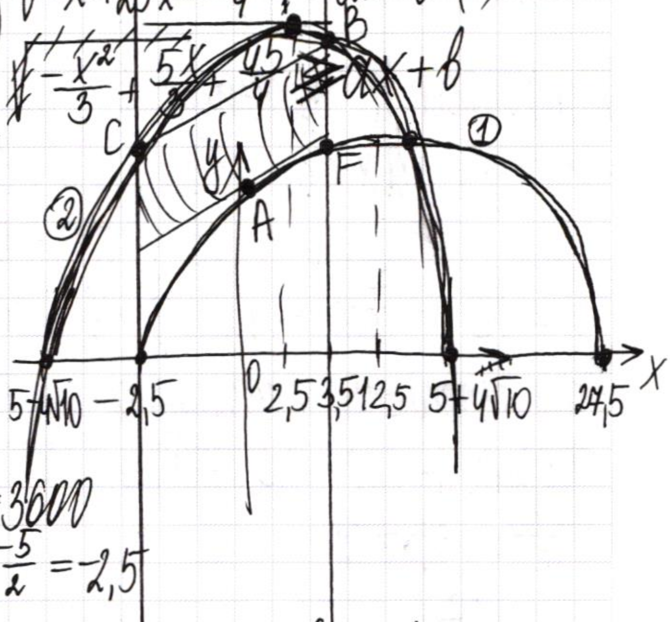
$f(x_b)=\sqrt{-\frac{625}{4}+\frac{625}{4}+\frac{275}{4}}=\sqrt{\frac{275}{4}}=\frac{5\sqrt{11}}{2}$

нули: $-x^2+25x+\frac{275}{4}=0 \ |\cdot 4$

$-4x^2+100x+275=0 \ |\cdot(-1)$

$4x^2-100x-275=0 \quad D/4=2500+4\cdot 275=3600$

$x_1=\frac{50+60}{4}=\frac{110}{4}=\frac{55}{2}=27{,}5 \quad x_2=\frac{-10}{4}=\frac{-5}{2}=-2{,}5$



2) $f(x)=-\frac{x^2}{3}+\frac{5x}{3}+\frac{45}{4}$, парабола, ветви "вниз", $x_b=\frac{-b}{2a}=\frac{-5\cdot 3}{3\cdot 2(-1)}=2{,}5$

$f(x_b)=-\frac{25}{12}+\frac{5\cdot 5}{6}+\frac{45}{4}=-\frac{25}{12}+\frac{50}{12}+\frac{120+15}{12}=\frac{25+15+120}{12}=\frac{160}{12}=\frac{80}{6}=\frac{40}{3}$

нули: $-\frac{x^2}{3}+\frac{5x}{3}+\frac{45}{4}=0 \ |\cdot 12 \Rightarrow -4x^2+20x+45\cdot 3=0 \Rightarrow 4x^2-20x-45\cdot 3=0$

$D/4=100+4\cdot 3\cdot 45=4(25+120+15)=4\cdot 160=40\cdot 16=8\cdot 8\cdot 10$

$x_1=\frac{10+8\sqrt{10}}{2}=5+4\sqrt{10};\ x_2=5-4\sqrt{10}$

3) $f(x)=ax+b$ должна касаться 1 параболы в точке A и быть секущей для второй параболы (в точках B и C)

точка B: $x=3{,}5$; $f(x)=-\frac{(3{,}5)^2}{3}+\frac{5\cdot 3{,}5}{3}+\frac{45}{4}=-\frac{49}{12}+\frac{5\cdot 7}{6}+\frac{45}{4}=$

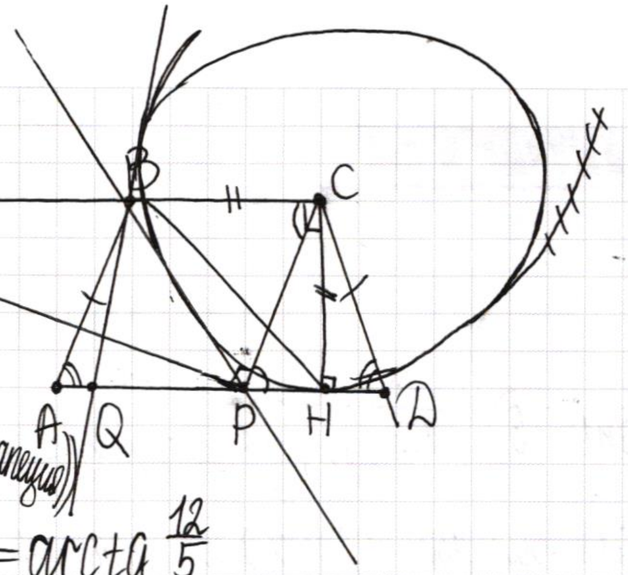
$=\frac{-49+70+120+15}{12}=\frac{21+135}{12}=\frac{156}{12}=\frac{78}{6}=\frac{39}{3}=13 \Rightarrow B(3{,}5;13)$

точка C: $x=-2{,}5$; $f(x)=-\frac{25}{12}-\frac{5\cdot 5}{6}+\frac{45}{4}=\frac{-25-50+135}{12}=\frac{-75+135}{12}=\frac{60}{12}=5$

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Найти: $\angle AQC$; $\angle NQC$; S_{NCQA}

Решение:



1) $\triangle NCP$; $\angle PNC = 90^\circ - \angle NCP =$
$= 90^\circ - \operatorname{arctg} \frac{12}{5}$

2) $\angle NCH = 90^\circ$ ($CH \perp AD$ (касается) и $BC \parallel AD$ (трапеция))

$\Rightarrow \angle PCH = 90^\circ - \operatorname{arctg}\frac{12}{5} \Rightarrow \angle CPH = \operatorname{arctg}\frac{12}{5}$

Продолжение задания 6: точка $C(-2{,}5;5)$ и точка $B(3{,}5;13)$

$\Rightarrow f(x) = ax + b \Rightarrow \begin{cases} 13 = \frac{7}{2}a + b \\ 5 = \frac{-5}{2}a + b \end{cases}$ $\quad \left(\frac{7}{2} + \frac{5}{2}\right)a = 8$

$\frac{12}{2}a = 8 \Rightarrow a = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

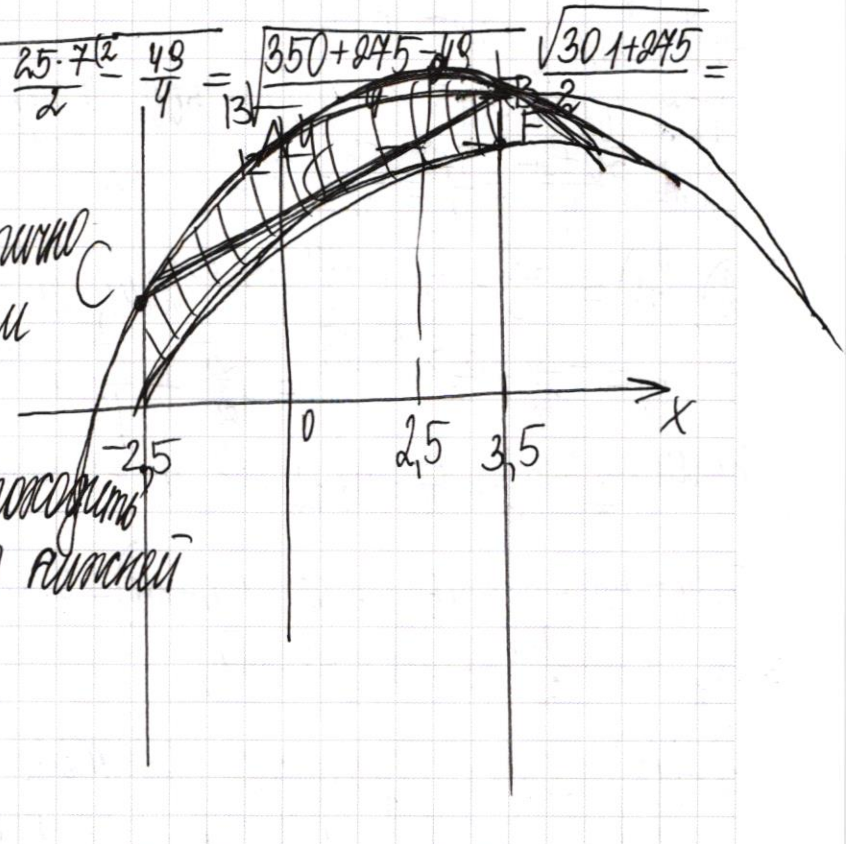
$b = 13 - \frac{7}{2}a = 13 - \frac{7}{2}\cdot\frac{4}{3} = 13 - \frac{28}{6} = \frac{13\cdot 6 - 28}{6} = \frac{13\cdot 3 - 14}{3} = \frac{39-14}{3} = \frac{25}{3}$

Это предельное значения a и b

точка F: $x = 3{,}5$; $f(x) = \sqrt{\frac{275}{4} + \frac{25\cdot 7}{2} - \frac{49}{4}} = \frac{\sqrt{350+275-49}}{2} = \frac{\sqrt{301+275}}{2} =$
$= \frac{\sqrt{576}}{2} = \frac{24}{2} = 12$

$\Rightarrow f(3{,}5)_F > f(3{,}5)_C \Rightarrow$ схематично

графики выглядят следующим образом:



$\Rightarrow$ прямые $y = ax + b$ должны проходить в коридорчике от B и C до нижней параболы

$$\begin{cases} \sin(x+y) = 9\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right) \\ \cos(x+2y) - \sqrt{3}(\sin(x+2y) = -16\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) \mid :2\ (2) \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}\cos(x+2y) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x+2y) = -8\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(x+2y) - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin(x+2y) = -8\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} - (x+2y)\right) = -8\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6} + (x+2y)\right) = -8\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$-8\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$8\sin\left(-x-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\cancel{3}-\frac{\pi}{6}+x\right)$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{6}+x\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$$

$$\begin{cases} \sin(x+y) = 9\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right) \\ \cos(x+2y) - \sqrt{3}\sin(x+2y) = -16\cos\left(\frac{\pi}{2}-x-\frac{\pi}{6}\right) \end{cases}$$

$$\cos(x+2y) - \sqrt{3}\sin(x+2y) = -16\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right) = \frac{\sin(x+y)}{9}$$

$$\cos(x+2y) - \sqrt{3}\sin(x+2y) = -16\cos\left(\frac{\pi}{2}-x-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{16}{9}\sin(x+y)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}-(x+2y)\right) = -\frac{16}{9}\sin(x+y)\ \cancel{\pm 0}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}-x-2y\right) + \frac{16}{9}\sin(x+y) = 0 \mid \cdot 9$$

$$9\sin\left(\frac{\pi}{6}-x-2y\right) + 16\sin(x+y) = 0 \mid :25$$

$$\frac{9}{25}\sin\left(\frac{\pi}{6}-x-2y\right) + \frac{16}{25}\sin(x+y) = 0$$

Задание 5)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$10000X_5+2000X_4+300X_3+30X_2+3X_1=12345 \mid :5$

$2000X_5+400X_4+60X_3+6X_2+\frac{3X_1}{5}=2469$

$233 \mid 3$, 21, 23, 21

$X_1 ⋮ 5$

$X_1=5$

$2000X_5+400X_4+60X_3+6X_2=2469-3$

$2000X_5+400X_4+60X_3+6X_2=2466 \mid :2$

$1000X_5+200X_4+30X_3+3X_2=1233$

$X_1=0 \longrightarrow \Rightarrow 2000X_5+400X_4+60X_3+6X_2=2469$

сумма четных равна нечетному $\Rightarrow$ нет

$X_5=1$

$1000+200X_4+30X_3+3X_2=1233$

$200X_4+30X_3+3X_2=233$

$X_4=0$

$30X_3+3X_2=233$

$3(10X_3+X_2)=233$

$10X_3+X_2=\frac{233}{3}$

но $10X_3+X_2 \in N$

$\Rightarrow$ не подходит

$X_4=1$

$30X_3+3X_2=33 \mid :3$

$10X_3+X_2=11$

$X_3=1$

$X_2=1$

$X_5=0$

$200X_4+30X_3+3X_2=1233 \mid :3$

$\frac{200}{3}X_4+10X_3+X_2=411$

$X_4 ⋮ 3 \longrightarrow X_4=0;3;6;9$

$X_4=0$

$30X_3+3X_2=1233$

$X_{3max}=9$

$\Rightarrow 30X_{3max}$ $max(30X_3)=270$

$\Rightarrow$ не подходит

$X_4=3$

$X_4=3$

$200+10X_3+X_2=411$

$10X_3+X_2=211$

$max(10X_3)=90$

$max(X_2)=9 \Rightarrow$ не подходит

$X_4=6$

$400+10X_3+X_2=411$

$10X_3+X_2=11$

$X_3=1$

$X_2=1$

$X_4=9$

$1800+30X_3+3X_2=1233$

$\Rightarrow X_3$ и $X_2<0$ не подходит

$\Rightarrow X_4=6$

$\Rightarrow X_7X_6 1 1 1 1 5$ $9\cdot10\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1=90$

$X_7X_6 0 6 1 1 5$ $9\cdot10\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1=90$

на $X_7 \to 1;2;3;4;5;6;7;8;9$ 9.

на $X_6 \to 0;1;2;3;4;5;6;7;8;9;$

$\Rightarrow 180$ чисел V

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$6+6+6$ $\quad 6\cdot 3=18$ $\quad 6\cdot 1=6$ $\quad 6\cdot 5=30$ $\quad 2469 | 3$ $\quad -24$ $\quad 6+4+4=14$

$X_1=0$

$6X_2+40X_3+200X_4=2469$

четное число $\Rightarrow$ сумма четных чисел четна 2469 - нечетное число $\Rightarrow X_1\neq 0$

$\Rightarrow X_1=5$

$3+6X_2+40X_3+200X_4=2469$

$6X_2+40X_3+200X_4=2466 \,|:2 \Rightarrow 3X_2+20X_3+100X_4=1233=3\cdot3\cdot137 \,|:3$

$X_2+\frac{20(X_3+5X_4)}{3}=3\cdot137 \,|:3$ $\quad X_3+5X_4 \vdots 3$

$\frac{X_2}{3}+\frac{20(X_3+5X_4)}{9}=137$

$X_4=8 \to 800$ (433) $\quad X_3=180$ $\quad X_2=8 \to 27$

$X_4=9$

180

$3X_2+20X_3+900=1233$

$3X_2+20X_3=333$

$3X_2+20X_3=111\cdot3 \,|:3$

$X_3=8 \to 160$ (27)

$X_3=9$

не получится

$X_2+\frac{20X_3}{3}=111$

$9000+1800=10800$; $10800+270=11070$; $11070+27=11097$

$n=3 \Rightarrow \overline{X_3X_2X_1}+\overline{X_4X_3X_2X_1}+\overline{X_5X_4X_3X_2X_1}=12345$

$\cancel{100X_3+10X_2}+10$ $\quad 100X_3+10X_2+X_1+1000X_4+100X_3+10X_2+X_1+10000X_5+1000X_4+100X_3+10X_2+X_1$

☒ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$n+2 \leq 6$

$n \leq 4$ → $n=4$

$x_6=0$ и $x_5=0$

$\overline{x_4x_3x_2x_1} + \overline{x_5x_4x_3x_2x_1} + \overline{x_6x_5x_4x_3x_2x_1} = 12345$

$1000x_4 + 100x_3 + 10x_2 + x_1 + 10000x_5 + 1000x_4 + 100x_3 + 10x_2 + x_1 + 10^6x_6 + 10000x_5 + 1000x_4 + 100x_3 + 10x_2 + x_1 = 12345$

~~200000x~~

$3000x_4 + 300x_3 + 30x_2 + 3x_1 = 12345 \,|\, :5$

~~300~~

$600x_4 + 60x_3 + 6x_2 + \frac{3 \cdot x_1}{5} = 2469$

$x_1 = 5$

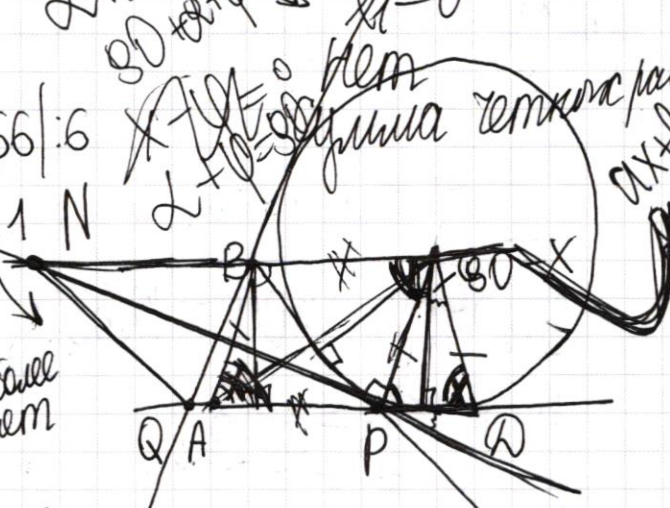
$600x_4 + 60x_3 + 6x_2 = 2466 \,|\, :6$

$100x_4 + 10x_3 + x_2 = 411$

$x_4 = 4$ $\quad x_4 = 3$ $\quad x_4 = 2$ тем более нет

$x_3 = 1$ $\quad 10x_3 + x_2 = 111$

$x_2 = 1$ $\quad \max(x_3) = 9$, $\max(x_2) = 9$ нет



$\alpha + x = 180$

$80 + \alpha + \varphi = 180$

$x_1 = 0$ нет

сумма четных равна нечет.

$90 + 90 - x + x = 180$

$x + \alpha +$

$25 \cdot 11$

$\Rightarrow 80$ $\quad x_7 004115 \quad 9 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$

$\Rightarrow 188$ чисел!

$-x^2+3$ $\quad \sqrt{-x^2+3}$ $\quad x = 1$

$81 + 256 + 81$ $\quad \sqrt{x^2-3}$

$ax + b = 0$ $\quad ax = -b$ $\quad a = -b/x$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Черновик

$$\begin{cases} 4x-\sqrt[3]{y^2-(4x)^2}=44 \\ y-\sqrt[3]{y^2-(4x)^2}=-20 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x-\sqrt[3]{(y-4x)(y+4x)}=44 \\ y-\sqrt[3]{(y-4x)(y+4x)}=-20 \end{cases}$$

$$y-4x-\sqrt[3]{(y-4x)(y+4x)}+\sqrt[3]{(y-4x)(y+4x)}=-20-44$$

$$y-4x=-64$$

$$4x-\sqrt[3]{-64(y+4x)}=44$$

$$4x-\sqrt[3]{(-4)^3(y+4x)}=44$$

$$\begin{cases} 4x+4\sqrt[3]{y+4x}=44 \\ y+4\sqrt{y+4x}=-20 \end{cases}$$

$$4x+4\sqrt[3]{y+4x}=44$$

$$y+4\sqrt[3]{y+4x}=-20$$

$$y=-64+4x$$

$$4x+4\sqrt[3]{-64+4x+4x}=44$$

$$4x+4\sqrt[3]{8x-64}=44$$

$$4x+4\sqrt[3]{8(x-8)}=44$$

$$4x+4\cdot 2\sqrt[3]{x-8}=44$$

$$x+2\sqrt[3]{x-8}=11$$

$$2\sqrt[3]{x-8}=11-x$$

$$\sqrt[3]{x-8}=\frac{11-x}{2}$$

по св-ву монотонности уравнение имеет более 3

$$x=9$$

$$2\sqrt[3]{9-8}=11-9$$

$$2\cdot 1=2$$

$$y=-64+4\cdot 9=-28$$

$(9;-28)$

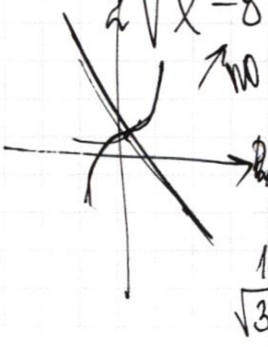
$$36-\sqrt[3]{28^2-16\cdot 9\cdot 9}=44$$

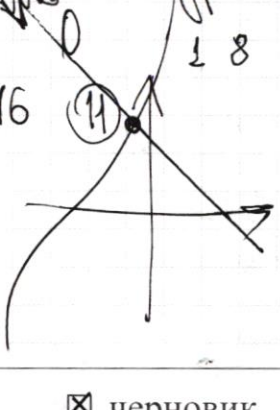
$64-36=8$

$81\times 16=486+81=1296$

$28\times 28=224+56=784$

$64-36=28$





0 1 8

16 11

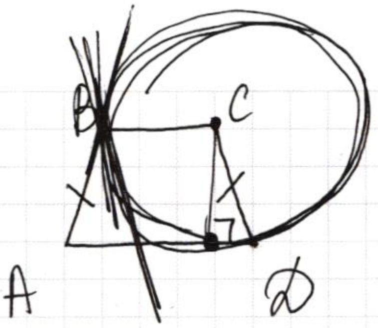
$\sqrt{3}$ 11

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$\sqrt{\log_{3x} x^4} \le \log_{3x} \frac{1}{x^2}$

$\sqrt{\log_{3x}(x^4)} \le \log$

$\sqrt{4\log_{3x}|x|} \le \log_{3\cdot 3x} x^{-2}$

$2\sqrt{\log_{3x} x} \le -2\log_{9x} x \;\Big|:2$

$\sqrt{\log_{3x} x} \le -\log_{9x} x$

$\sqrt{\log_{3x} x} + \log_{9x} x \le 0$

$\sqrt{\log_{3x} x} + \frac{\log_{3x} x}{\log_{3x} 9x} \le 0$ Пусть $\log_3 x = t$

$\sqrt{\frac{t}{t+1}} \le -\frac{t}{t+2}$

$\begin{cases} \frac{t^2}{t+1} \le \frac{t^2}{(t+2)^2} \\ \frac{-t}{t+2} \ge 0 \end{cases}$

Ограничения

$\begin{cases} 3x \ne 1 & x \ne \frac{1}{3} \\ 3x > 0 & x > 0 \\ x^4 > 0 & x \ne 0 \\ 9x > 0 & x > 0 \\ 9x \ne 1 & x \ne \frac{1}{9} \\ \frac{1}{x^2} > 0 & x \ne 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $0 \quad \frac{1}{9} \quad \frac{1}{3}$

$\sqrt{\log_{3x} x} + \cancel{\frac{1}{\log_x 9x}} + \frac{\log_3 x}{\log_3 9x} \le 0$

$\sqrt{\frac{\log_3 x}{\log_3 3x}} + \frac{\log_3 x}{\log_3 9 + \log_3 x} \le 0$

$\sqrt{\frac{\log_3 x}{\log_3 x + 1}} + \frac{\log_3 x}{2 + \log_3 x} \le 0$

$\sqrt{\frac{t}{t+1}} + \frac{t}{t+2} \le 0$

$\frac{t}{t+1} > 0 \qquad \frac{t}{t+2} <$

$\cancel{\sqrt{\frac{t}{t+1}}}$

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

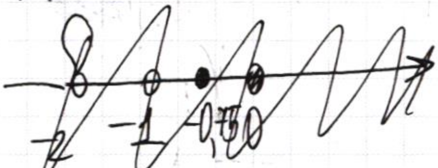
$$\begin{cases} \dfrac{t\cdot(t^2+4t+4)-t^2(t+1)}{(t+1)(t+2)^2} \le 0 \quad (1) \\ \dfrac{t}{t+2} \le 0 \quad (2) \end{cases}$$

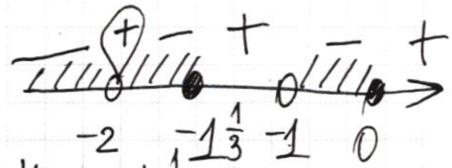
$\cancel{t(t^2+4t+4-t}$

$$\frac{t(t^2+4t+4)-t(t^2+t)}{(t+1)(t+2)^2} \le 0$$

$$\frac{t(t^2+4t+4-t^2-t)}{(t+1)(t+2)^2} \le 0$$

$$\frac{t(3t+4)}{(t+1)(t+2)^2} \le 0$$

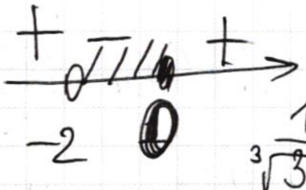




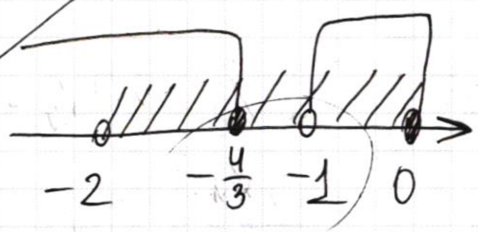
нули числителя: $t=0$ $\quad 3t=-4 \quad t=-\frac{4}{3}=-1\frac{1}{3}$

$\cancel{t\in}$

2) $\dfrac{t}{t+2} \le 0$



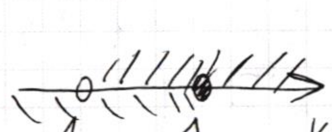
$\dfrac{1}{\sqrt[3]{3^4}}$



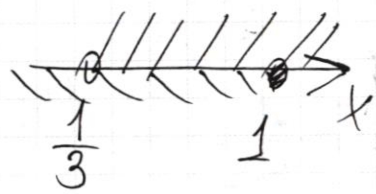
$t\in\left(-2; -\frac{4}{3}\right] \cup [-1; 0]$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_3 x > -2 \\ \log_3 x \le -\frac{4}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} \log_3 x > -1 \\ \log_3 x \le 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

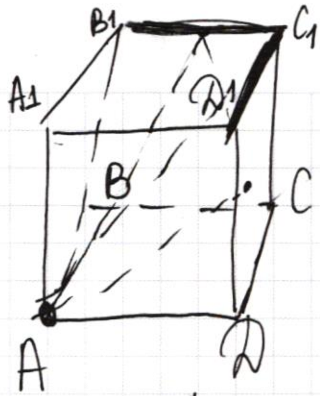
$$\begin{cases} \log_3 x > \log_3 \frac{1}{9} \\ \log_3 x \le \log_3 \frac{1}{\sqrt[3]{3^4}} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \log_3 x > \log_3 \frac{1}{3} \\ \log_3 x \le \log_3 1 \end{cases}$$



$x\in\left(\frac{1}{9}; \frac{1}{3\sqrt[3]{3}}\right] \cup \left(\frac{1}{3}; 1\right]$



$+\frac{999}{99}\over 8$ $\quad$ $+\frac{999}{108}\over 1107$

$\%$ $\quad 10^n \quad 10^{n+1} \quad 10$

$\overline{X_7 X_6 X_5 X_4 X_3 X_2 X_1}$

12345

$10 \quad 10^{n+1} \quad 10^{n+2}$

$n+2 \le 5 \Rightarrow n=2$

$n>1$

$X_7, X_6, X_5, X_4, X_3, X_2, X_1 \in \{0,1,2,3,4,5,\ldots,8,9\}$ $\quad n \le 3$

$n \le 4$

$n>1 \Rightarrow n \in \{2;3\}$ степени $\quad 2,3,4$

$\overline{X_2X_1} + \overline{X_3X_2X_1} + \overline{X_4X_3X_2X_1} = 12345$ $\quad n=3$

$X_1 + 10X_2 + 100X_3 + 10X_2 + X_1 + 1000X_4 + 100X_3 + 10X_2 + X_1 = 12345$

$3X_1 + 30X_2 + 200X_3 + 1000X_4 = 12345 \mid :5$

$\frac{3X_1}{5} + 6X_2 + 40X_3 + 200X_4 = 2469$

$\Rightarrow X_1 = 5$ $\quad X_1 = 0$

$3 + 6X_2 + 40X_3 + 200X_4 = 2468$

$6X_2 + 40X_3 + 200X_4 = 2466 \mid :2$

$3X_2 + 20X_3 + 100X_4 = 1233 \mid :3$

$X_2 + \frac{20X_3}{3} + \frac{100X_4}{3} = 411 \Rightarrow X_2 + 20\left(\frac{X_3+5X_4}{3}\right) = 411$

$\frac{X_2}{3} + \frac{20}{9}(X_3+5X_4) = 137$

$2000 \mid 5 = 400$; $1000 \mid 5 = 200$; $12345 \mid 5 = 2469$; $2466 \mid 2 = 1233$; $1233 \mid 3 = 411$; $411 \mid 3 = 137$; $8000+4800=10800$; $\frac{4}{3}X \cdot \frac{25}{3}$

☒ черновик ☐ чистовик $\quad$ Страница №___

(Поставьте галочку в нужном поле) $\quad$ (Нумеровать только чистовики)