МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2}, \\ 3x^2+3y^2-6x-4y = 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 27$, $3 \leqslant y \leqslant 27$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geqslant ax+b \geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1; 3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR = 2$, $QS = 1$, $PS = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin(4\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin(4\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = \sin 2\alpha\cos 4\beta + \sin 4\beta\cos 2\alpha + \sin\alpha = -\frac{8}{17} =$

$= \sin 2\alpha(2\cos^2 2\beta - 1 + 1) + 2\cos 2\beta\sin 2\beta\cos 2\alpha =$

$= 2\cos 2\beta(\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha) = 2\cos 2\beta\sin(2\alpha+2\beta) =$

$= 2\cos 2\beta \cdot -\frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{8}{17} \Rightarrow \quad 2\cos 2\beta = \frac{8}{\sqrt{17}}$

$\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$ т.к. $\sin^2 2\beta + \cos^2 2\beta = 1 \Rightarrow$

$\left[\begin{array}{l}\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}\end{array}\right.$ $\quad \sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\left[\begin{array}{l}\frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha + \frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha - \frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}\end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1 \\ 4\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1\end{array}\right.$

по основ тригонометрич. подстановке

$\frac{8\,tg\,\alpha}{1+tg^2\alpha} \pm \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} = -1$ Пусть $a = tg\,\alpha$

$\left[\begin{array}{l}\frac{8a}{1+a^2} + \frac{1-a^2}{1+a^2} = -1 \\ \frac{8a}{1+a^2} - \frac{1-a^2}{1+a^2} = -1\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}8a+1-\cancel{a^2} = -1-\cancel{a^2} \\ 8a-\cancel{1}+a^2 = \cancel{-1}-a^2\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}a = -\frac{1}{4} \\ 2a^2+8a = 0\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}a = -\frac{1}{4} \\ a = 0 \\ a = -4\end{array}\right.$ обр. зам $\left[\begin{array}{l}tg\,\alpha = -\frac{1}{4} \\ tg\,\alpha = 0 \\ tg\,\alpha = -4\end{array}\right.$

Ответ: $-4; -\frac{1}{4}; 0$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№5

Дано:

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(p)=[p/4]$, p-простое

простое число - это число которое делится на себя и на 1

~~будем считать в этой~~

~~задаче мн-о $-\alpha$ где $a\in N$~~ и $\frac{1}{a}$ - ~~простые~~ числа и $-\frac{1}{a}$

т.к. функция определена на положительных рациональных числах а a и b - из этого множества

$f(ab)=f(a)+f(b) \Rightarrow a>0$ и $b>0$

$f(p)=[p/4] \Rightarrow$ т.к. f определена на положительных

$p>0$ а т.к. $p>0 \Rightarrow \min[p/4]=0$

$\Rightarrow \min(f(p))=0$ а т.к. любое число можно разложить на простые множители

$\min(f(ab))=\min(f(a))+\min(f(b))=0$

поэтому все ~~[illegible]~~ значение данной функции $f\geq 0$ всегда когда она определена на множестве полож и рационал числах. а т.к. $3\leq x\leq 27$ и $3\leq y\leq 27$

$x>0$ и $y>0$

$f(x/y)$ т.к. $x>0$ и $y>0$

x/y - положительное, а т.к. она определена на этом данном множестве

$f(x/y)\geq 0$ то есть $f(x/y)<0$ быть не может

Ответ: 0 пар.

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 2

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

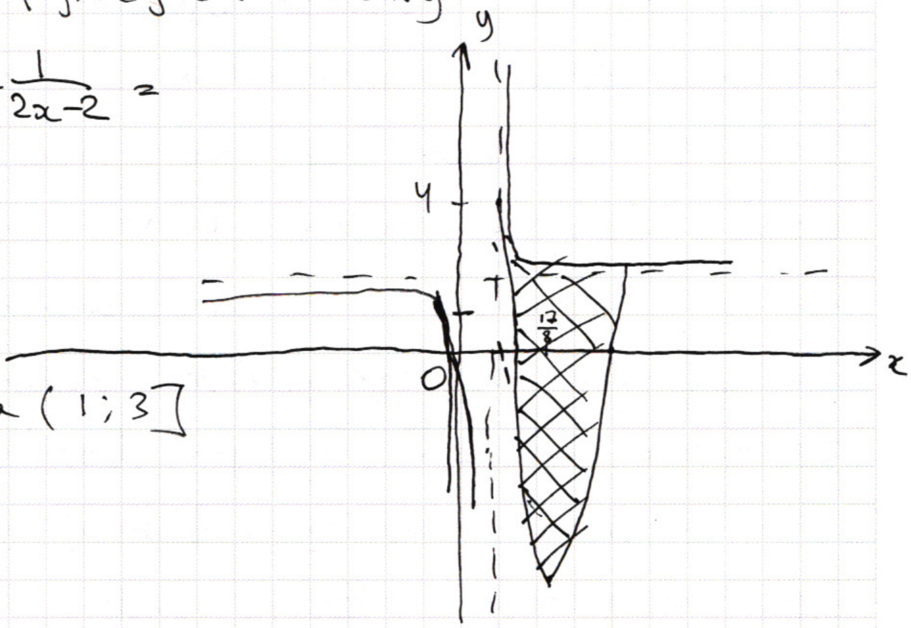
№6

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+80$$

Нарисуем функции на Oxy

$$\frac{4x-3}{2x-2} = \frac{4x-4}{2x-2} + \frac{1}{2x-2} =$$

$$= 2 + \frac{1}{2x-2}$$



Мы рассматриваем только полуинтервал $(1;3]$

$8x^2-34x+30$

Находим вершину

$-\frac{b}{2a} = \frac{34}{16} = \frac{17}{8}$ по x

$\frac{17^2}{8} - \frac{34 \cdot 17}{8} + 30 =$

$= \frac{240-289}{8} = -\frac{49}{8}$

Находим точки пересечения параболы с осью x

$8x^2-34x+30 \quad D/4 = 289-240 = 7^2$

Так же находим меньшее у координат параболы или $x=1$

$x_1 = \frac{17+7}{8} = 3$

$x_2 = \frac{17-7}{8} = \frac{5}{4}$

$8-34+30=4$.

Нам подходит заштрихованная область и т.к. неравенства нестрогие и у нас полуинтервал

сразу видно 2 точки $(3;0)$ и $(1;4)$

$\begin{cases}0=3k+b\\4=k+b\end{cases} \Rightarrow k=-2\quad b=6$ $\quad y=-2x+6$ посмотрим сколько она имеет точек пересечения с гиперболой и сделаем вывод

$\frac{1}{2x-2}+2=-2x+6$

$\frac{1}{4}=(x-1)(2-x)=2x-x^2-2+x \Rightarrow x^2-3x+\frac{9}{4}=0$

$(x-\frac{3}{2})^2=0$ у нас одна точка пересечения значит это касательная и т.к. неравенство не строгое то есть $\leq$ то это прямая подходит если прямая будет выше этой то не подходит т.к. на промежутке найдутся x, где ~~прямая будут~~ значение прямой будут больше чем значение гиперболы в этой точке не подходит. Если ниже то найдутся точки где значение параболы будут больше чем значение прямой $\Rightarrow$ это единственная прямая $a=-2\quad b=+6$

Ответ $(-2;6)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$

ОДЗ

$x^2+6x>0$

x^2+6x

Пусть $a=x^2+6x$

$|x^2+6x|=6x+x^2$ т.к. по ОДЗ

$3^{\log_4 a}+a \geq a^{\log_4 5}$

$4^{\log_4 3\cdot\log_4 a}+a \geq a^{\log_4 5}$ по опред лог.

$a^{\log_4 3}+a \geq a^{\log_4 5}$ $\Big|\div a$ т.к. $a>0$ по ОДЗ мы можем это сделать

$a^{\log_4 3-1}+1 \geq a^{\log_4 5-1}$

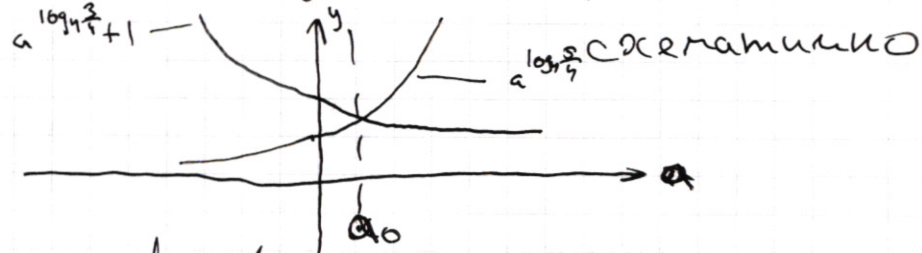
$a^{\log_4\frac{3}{4}}+1 \geq a^{\log_4\frac{5}{4}}$ по св-ву лог. $1=\log_4 4$

т.к. $\frac{3}{4}<1 \Rightarrow \log_4\frac{3}{4}<0$

т.к. $\frac{5}{4}>1 \Rightarrow \log_4\frac{5}{4}>0$ значит

$y=a^{\log_4\frac{3}{4}}$ как функция убывает ↓

$y=a^{\log_4\frac{5}{4}}$ как функция возрастает ↑



Поэтому по неравенству нам подойдёт всё что слева или $\leq a_0$

т.к. нам $a^{\log_4\frac{3}{4}}+1 \geq a^{\log_4\frac{5}{4}}$ находим корень подбором $a_0 = 16$

$a \le 16$

Одр. зам

$x^2+6x \le 16$

$x^2+6x-16 \le 0$

по т. Виета

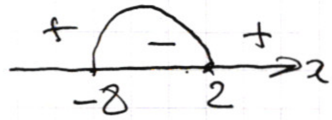
$16^{\log_4 \frac{3}{4}} + 1 \ge 16^{\log_4 \frac{5}{4}}$

$\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1 = \left(\frac{5}{4}\right)^2$

$\frac{9}{16} + 1 = \frac{25}{16}$

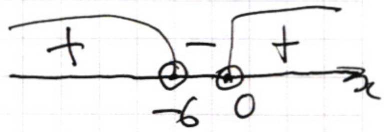
$\frac{25}{16} = \frac{25}{16}$ ч. т. д.

$(x+8)(x-2) \le 0$



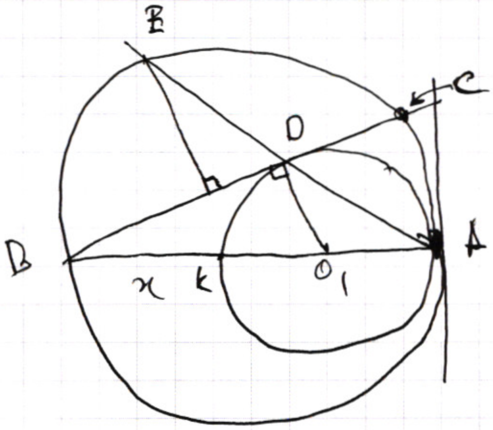
ОДЗ

$x^2+6x > 0$



Ответ: $x \in [-8; -6) \cup (0; 2]$

№4



r - радиус ω

R - радиус Ω

Т. к. A - это точка внутреннего касания

Дано:

$CD = \frac{5}{2}$

$BD = \frac{13}{2}$

BC - диаметр

D точка касания окр-ти ω

A - т. кас ω и Ω

---

r - ? R - ?

а AB - диаметр то AB ⊥ касательной проведённой через т. A но ей же будет и перпендикулярен r т. к. A точка внутреннего касания обоих окружностей значит центр O_1 - центр ω лежит на AB и на AB входит диаметр ω то есть AK - диаметр внутренней окр-ти. ∠BCA - прямой т. к. ~~оно~~ опирается на диаметр $O_1D \perp BC$ т. к. BC - касательная

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №6 (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\triangle BDO_1 \sim \triangle BCA$ (по двум углам 90° и $\angle CBA$ - общий)

Пусть $BK - x$

$2R = 2r + x = BA$

$$\frac{BD}{BC} = \frac{BO_1}{BA} = \frac{13}{18} = \frac{x+r}{x+2r}$$

$BC = BD + DC = \frac{18}{2} = 9$

$18x + 18r = 13x + 26r$

$8r = 5x \qquad x = \frac{8}{5}r$

Т.к. BD - кас

а BA - секущая

$$BD^2 = BK \cdot BA = x(x+2r) = \frac{169}{4}$$

$$\frac{8}{5}r\left(\frac{18}{5}r\right) = \frac{13\cdot13}{2\cdot2} \qquad r^2 = \frac{13\cdot13\cdot5\cdot5}{2\cdot2\cdot2\cdot4\cdot2\cdot9}$$

$$r = \frac{13\cdot5}{4\cdot2\cdot3} = \frac{65}{24} \qquad x = \frac{8}{5}r = \frac{8}{5}\cdot\frac{65}{24} = \frac{13}{3}$$

$2R = 2r + x = ~~\ldots~~$

~~$R = \frac{117}{24}$~~ ~~Ответ: $\frac{65}{24}$; $\frac{117}{24}$~~

$$2R = 2r + \frac{8}{5}r = \frac{18}{5}r = \frac{18}{5}\cdot\frac{65}{24} = \frac{117}{12}$$

$R = \frac{117}{24}$ Ответ: $\frac{65}{24}$; $\frac{117}{24}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$3^{\log_4 a} + a \geq a^{\log_4 5}$

$a^{\log_a 3 \log_4 a} + a - a^{\log_4 5} \geq 0$

$a^{\log_4 3} + a - a^{\log_4 5} \geq 0$

$a^{\log_4 3 - 1} + 1 - a^{\log_4 5 - 1} \geq 0$

$3^{\log_4 a} \geq a^{\log_4 5}$

$f(x/y) < 0$

$f(4) = f(2) + f(2) = \left[\frac{2}{4}\right] + \left[\frac{2}{4}\right]$

$f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$

$[x/4] + \left[\frac{1}{4y}\right] < 0$

3 4 5 5

17 7 7 2 2 0 0 0

прост 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23,

$x = 4 \Rightarrow 25$

1, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27

8, 12, 16, 18, 20, 24, 27

$x = 6 \Rightarrow 25$

8-прост

$x = 8$

$17 \cdot 25 + \cancel{8} + 17 + 7 + 7 + 2 + 2 = \boxed{460}$

$\times\ 17$, 26: 102, 34, 442; $+\ 18$: 460

$\frac{4x-3}{2x-2} = \frac{4x-4}{2x-2} + \frac{1}{2x-2} = \frac{1}{2x-2} + 2$

$ax + b \geq 8x^2 - 34x + 30$

$D/4 = 289 - 240 = 49$

240

$\frac{-b}{2a} = \frac{34}{16} = \frac{17}{8}$

$\frac{17+7}{8} = 3$

$\times\ 17$, 17: 119, 17: 289

$\frac{17^2}{8} - \frac{34 \cdot 17}{8} + 30$

$\frac{17-7}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$

$30 - \frac{17^2}{8} = -\frac{49}{8}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$3^{\log_4 a} + a \geq a^{\log_4 5}$

$4^{\log_4 3 \cdot \log_4 a}$ $\quad a^{\log_4 3} + a \geq a^{\log_4 5}$

$a\left(a^{\log_4 3 - 1} + 1 - a^{\log_4 5 - 1}\right) \geq 0$

$a^{\log_4 \frac{3}{4}} + 1 \geq a^{\log_4 \frac{5}{4}}$ $\quad a^{\log_4 3 - 1} - a^{\log_4 5 - 1}$.

$a^{\log_4 5 - 1} - a^{\log_4 3 - 1} \leq 1$

a^{-x} $\quad \log_4 5 - \log_4 3 = \log_4 \frac{5}{3}$

3^{-x}

$a^{\log_4 3^{-1}}\left(a^{\log_4 \frac{5}{3}} - 1\right) \leq 1$

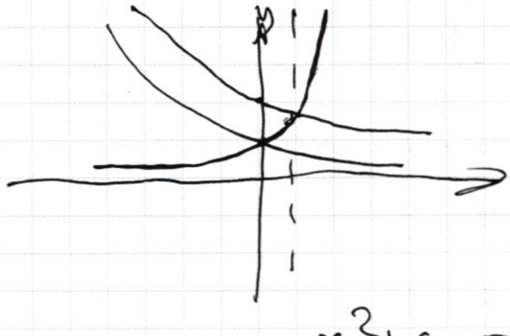
$\frac{3}{4} + 1 \geq \frac{5}{4}$ $\quad a^{\log_4 3} + a = a^{\log_4 5}$

$a^{\log_4 3 - 1} + 1 = a^{\log_4 \frac{5}{4}}$

$\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1 = \frac{25}{16}$

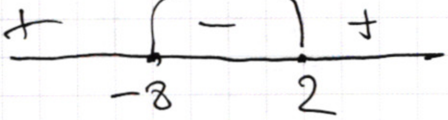
$a^{\log_4 \frac{3}{4}} + 1 = a^{\log_4 \frac{5}{4}}$

~~[illegible]~~ $a \leq 16$

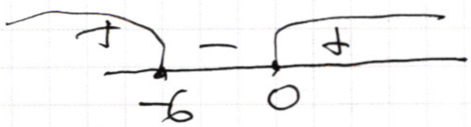


$x^2 + 6x - 16 \leq 0$

$(x+8)(x-2) \leq 0$



$x^2 + 6x \geq 0$



$3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2}$

$3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4$ $\quad x^2 + 6x \neq 1$

$x^2 + 6x - 1 \neq 0$

$9y^2 - 12xy + 4x^2 = 3xy - 2x - 3y + 2$

$D = 36 + 4 = 40$

$3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4$ $\quad \frac{-6 + 2\sqrt{10}}{2} =$

$18y^2 - 30xy + 8x^2 + 4x + 6y = 4$ $\quad -3 + \sqrt{10}$

$3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4$ $\quad 15y^2 - 30xy + 5x^2 + 10x + 10y = 0$

$3y^2 - \cancel{10}^{6}xy + x^2 + 2x + 2y = 0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cos 4\beta + \sin 4\beta\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\text{tg}\, 2\alpha\cos 2\beta$

$\begin{cases} \sin 2\alpha\, 2\cos^2 2\beta + 2\cos 2\beta\sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{8}{17} \\ \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}} \end{cases}$

~~$\sin 2\alpha\cos 2\beta$~~ $+ \sin 2$

$2\cos 2\beta(\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha) = -\frac{8}{17}$ $\boxed{\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}}$

$2\cos 2\beta = \frac{8}{17}\cdot\sqrt{17} = \frac{8}{\sqrt{17}}$ $\boxed{\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}} \Rightarrow \boxed{\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}}$

$2\cos 2\beta \cdot -\frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{8}{17}$

$\frac{32}{17}\sin 2\alpha + \frac{8}{17}\cos 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} + \frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

Пусть $a = \text{tg}\,\alpha$

$4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$\frac{8\,\text{tg}\,\alpha}{1+\text{tg}^2\alpha} + \frac{1-\text{tg}^2\alpha}{1+\text{tg}^2\alpha} = -1$ $\frac{8a}{1+a^2} + \frac{1-a^2}{1+a^2} = -1$

$4\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$

$8a + 1 - \cancel{a^2} = -1 - \cancel{a^2}$ $8a = -2$

$\frac{8a}{1+a^2} - \frac{1+a^2}{1+a^2} = -1$

$\boxed{a = -\frac{1}{4}}$

$8a - \cancel{1} + a^2 = -\cancel{1} - a^2$

Ответ: $-4; 0; -\frac{1}{4}$

$2a^2 + 8a = 0$

$a = 0$

$a = -4$

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$3xy-2x-3y+2\geq 0$

$3y-2x>0$

$3x(x-2)$

$9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2$

$9y^2-15xy+3y+4x^2+2x=2$

$18y^2-30xy+6y+8x^2+4x=4=3x^2+3y^2-6x-4y$

$15y^2-30xy+10y+5x^2+10x=0$

$(1-3y)^2=9y^2-6y+1$

$3y^2-6xy+2y+x^2+2x=0$

$x^2+x(2-6y)+3y^2+2y=0$

$D/4=9y^2-6y+1-3y^2-2y=6y^2-8y+1$

$3y^2-4y+3x^2-6x-4=0$

$D/4=4-9x^2+18x+12=$

ОДЗ: $x^2+6x>0$

№3

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$ Пусть $a=x^2+6x$

$3^{\log_4 a}+a\geq |a|^{\log_4 5}$

$3^{\log_4 a}+a\geq a^{\log_4 5}$

$3^{\log_4 a}\geq a(a^{\log_4 5-1}-1)$

$3^{\log_4 a}\geq a(a^{\log_4 \frac{5}{4}}-1)$

$\log_4 a\log_4 3\geq \log_4 a+\log_4(a^{\log_4\frac{5}{4}}-1)$

$\log_4 a(\log_4 3-1)\geq \log_4(a^{\log_4\frac{5}{4}}-1)$

$\cancel{(4-1)}(\log_4 3-\cancel{1}-a^{\log_4 5-1}+\cancel{1})\geq 0$

$a^{0,1}$

$\sqrt[10]{a}$

$a^{\log_4 5-1}\leq \log_4 3$ $a\leq \sqrt[\log_4 5-1]{\log_4 3}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

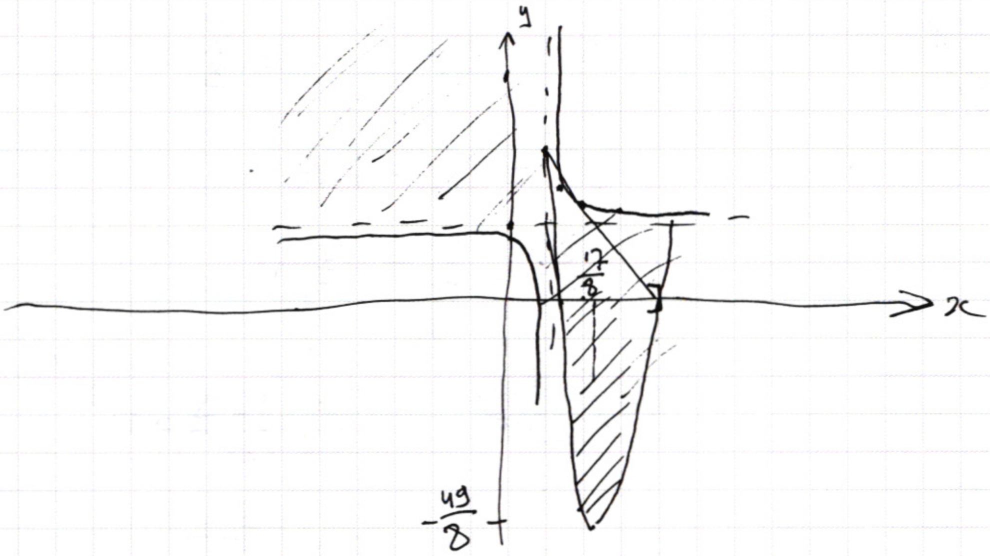
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\frac{\frac{1}{2}}{x-1}+2 = \frac{-\frac{1}{2}}{(x-1)^2} = -\frac{1}{2(x-1)^2}$

$y=-\frac{1}{2(x_0-1)^2}(x-x_0)+\frac{1}{2x_0-2}+2$

$(3;0)\ (1;4)$ $\quad y=kx+b$

$0=3k+b$
$4=k+b$

$k=-2$
$b=6$

$b=-3$

$\begin{cases}\frac{1}{2x-2}+2=-2x+6\end{cases}$

$\frac{1}{2x-2}=-2x+4$

$\frac{1}{4}=(x-1)(2-x)=2x-x^2-2+x$

$x^2-3x+\frac{9}{4}=$

$(x-\frac{3}{2})^2=0$

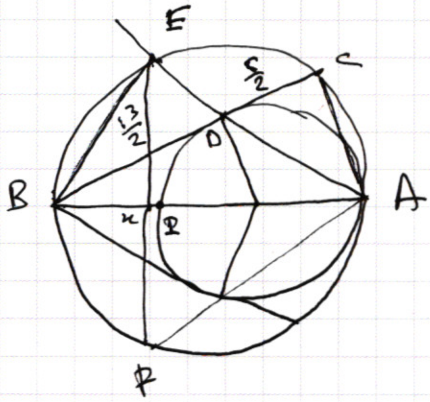
Ответ: $(-2;6)$ т.н.g.

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$$\cos\varphi = \frac{2r+x}{13} = \frac{2r+x}{18}$$

$$\frac{5}{8}+2=\frac{21}{8}$$

$$18r+18x=26r+13x$$

$$5x=8r \qquad x=\frac{5}{8}r$$

$$BD^2=BI\cdot BA$$

$$\frac{169}{4}=\frac{5}{8}r\cdot\frac{21}{8}r$$

$$\frac{16\cdot169}{5\cdot21}=r^2$$

$$r=\frac{52}{\sqrt{105}}$$

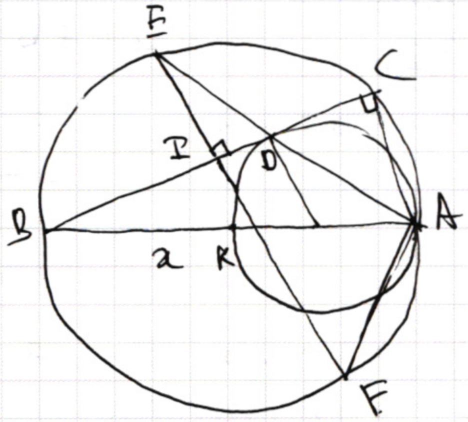
$$2R=\frac{21}{8}r$$

$$\frac{16R}{21}=r=\frac{52}{\sqrt{105}}$$

$$R=\frac{21\cdot13}{4\cdot\sqrt{105}}=\frac{273}{4\cdot\sqrt{105}}$$

$$\frac{8}{5}+2 \qquad \frac{18}{5} \qquad \frac{26}{5}r$$

$$\times\begin{array}{r}21\\13\\\hline 63\\21\\\hline 273\end{array}$$



$$\frac{13}{8}r=\frac{52}{\sqrt{105}}\cdot\frac{13}{8}$$

$$\cos\frac{\frac{13}{2}}{}=\frac{2\sqrt{105}}{13}$$

$$\frac{26}{5}\cdot\frac{65}{24}$$

$$\times\begin{array}{r}18\\8\\\hline144\end{array} \qquad \times\begin{array}{r}12\\2\end{array} \qquad \times\begin{array}{r}13\\4\\\hline 52\end{array}$$

$$\frac{26}{5}r=2R \qquad \frac{65}{12} \qquad \times\begin{array}{r}13\\8\\\hline\end{array}$$

$$\frac{13}{5}r=R$$

$$+\begin{array}{r}65\\52\\\hline117\end{array}$$

$$\times\begin{array}{r}13\\9\\\hline117\end{array} \qquad +\begin{array}{r}13\\8\\\hline 26\end{array}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)