МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x \geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{51}{36} = \frac{17}{12}$ $\frac{18\cdot 17\cdot 17}{12\cdot 12} - \frac{51\cdot 17}{12} + 28 =$

$= \frac{18\cdot 3}{2}\cdot\frac{17^2}{12} - 3\frac{17^2}{12} + 28 =$

$-\frac{3}{2}\cdot\frac{17^2}{12} = -\frac{17^2}{8} + 28$

$\frac{224-289}{8} =$

$= -\frac{65}{8}$

$\frac{8-6x}{3x-2}$ $\forall x\in\left[\frac{2}{3};2\right]$

$\frac{4+4-3x}{3x-2} = \frac{4}{3x-2} \leftarrow 2$

$ax+b \geq \frac{18\cdot 4}{2} - 51\cdot 2 + 28 = -2$

72 102 28

$2a+b \geq -2$

$(a+b+c)(a+b+c$

a^2+

$(a-b+c)(a-b+c)-$

$= a^2 - b^2 + c^2$

$-abac + ac$

$-cb - bc$

$D<0;\ D>0;$ корни вне $\frac{2}{3};2$.

$ax+b$ $8-6x = 3ax^2 + 3bx - 2ax - 2b$

$3ax^2 + x(3b-2a+6) - 2b - 8 = 0$

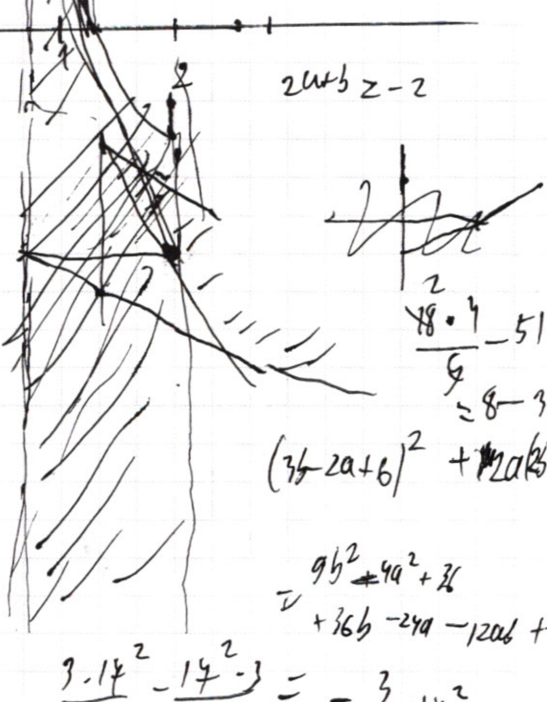
$\frac{2}{3}a+b \geq \frac{4}{9}\cdot 18 - \frac{51\cdot 2}{3} + 28$

$\frac{2}{3}a+b \geq 8 - 34 + 28 = 2.$

$\frac{2}{3}a+b \geq 2$ $a \geq 3 - 1{,}5b$

$a \geq \frac{3}{2} - 1$

$2a+b \geq -2$



$\frac{18\cdot 4}{9} - 51\cdot\frac{2}{3} + 28 =$

$= 8 - 34 + 28$

$(3b-2a+6)^2 + 12a(2b+8) =$

$= 9b^2 + 4a^2 + 36$

$+ 36b - 24a - 12ab + 24ab + 84.$

$\frac{3\cdot 17^2}{12\cdot 4} - \frac{17^2\cdot 3}{12} = -\frac{3}{48}\cdot 17^2$

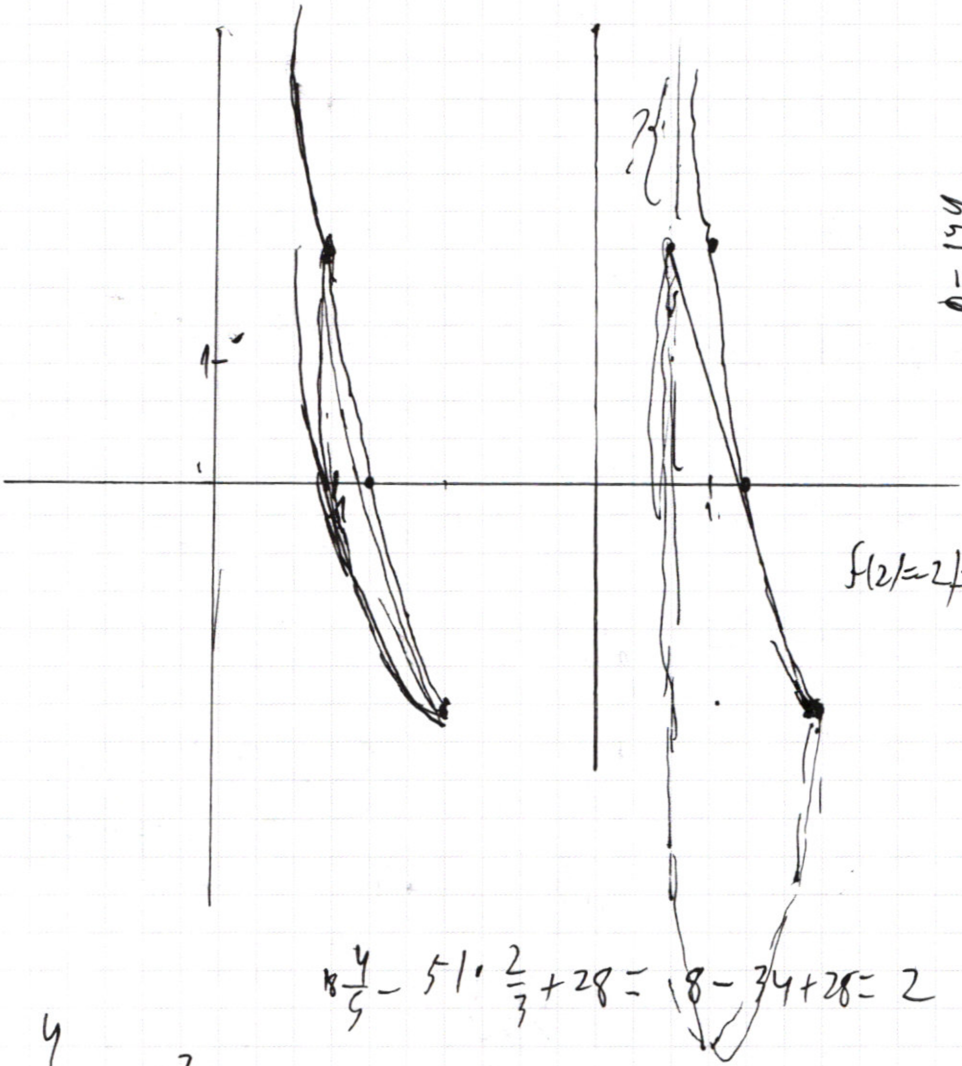
$\frac{51x}{36} = \frac{17}{12}$ $\frac{8{,}5}{6}$ $f\left(\frac{17}{12}\right) = \frac{18\cdot 17\cdot 17}{12\cdot 12} - \frac{17\cdot 3\cdot 17\cdot 17}{12\cdot 12} + 28$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$f(2)=-2;\ 2a+b=-2$

$D = 144$

$-5x^2+18x-8 = 8-6x$

$-9x^2+24x-16=0$

$8;\quad -3x+4 = k \quad \frac{8-6x}{3x-2} \quad D=$

$-5x^2+12x+6x-8 = 8-6x$

$18\cdot\frac{4}{9} - 51\cdot\frac{2}{3} + 28 = 18 - 34 + 28 = 2$

$\frac{4}{3x-2} - 2$

$18\cdot\frac{4}{72} - 102 + 24 = -2$

$18 - 51 + 28 = 46 - 51 = -5\ ?$

$\frac{51}{36} = \frac{17}{12} < 1{,}5$

$\frac{4{,}25}{3}$

$\cancel{3x-2}$

$(\frac{2}{3}; +2)$ и $(2; -2)$

$2 = \frac{2}{3}k + b$

$-2 = \frac{8}{3}k + b$

$\cancel{y = \frac{8}{3}k;\ k = \frac{12}{8} = \frac{3}{4}}$

$\cancel{b = 1{,}5}$

$y = -\frac{4}{3}x$

$k=-3;\ \cancel{y=-2x+}\ 2 = -2+b;\ b=4$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(xy^{-1}) = f(x) + f(y^{-1}) < 0$

$f(x): x > 0;\ x \in \mathbb{R}$

$f(2b) = f(2) + f(b)$

$f(2b) = f(b);$ $\quad f(4) = 0$

$f(2) = f(3)$ $\quad 2;\ 3;\ 5;\ 7;\ 11;\ 13.$

$f(5) = 1$ $\quad f(4);\ f(6); f(9); f(14);\ f(22); f(26)$

$f(7) = 1$ $\quad f(8);$

4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0	4	0	4	1	1	2	5	0	2	3	0

$f(28) = f(14) + f(2) = f(4) f(7)$

$f(\frac{1}{5})$ $\quad f(10) = f(50) + f(\frac{1}{5})$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{17};$ $\quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha + \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha = 2\sin\alpha\cos\beta$

$2\sin(2\alpha+2\beta) + \cos 2\beta = -\frac{2}{17}$

$-\frac{1}{17}\cos 2\beta = -\frac{1}{17};$ $\quad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin\alpha = -\frac{1}{17}$

$\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{17^2}} = \sqrt{\frac{18 \cdot 16}{17}} = \pm\frac{12}{17}\sqrt{2}$

$2\sin(2\alpha + 2\beta)\ \cos 2\beta = -\frac{2}{17}$

$\cos 2\beta = 1;\ \ 2\beta = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$\beta = \pi n, n \in \mathbb{Z}$

$\frac{|3x+1| + |5x-5|}{2}$ $\quad \frac{8x-4}{2} = 4x - 2$ $\quad \frac{8x+6}{2} = 4x+3$

$|3x-1| + |5x-5|$ $\quad 5x-3$ $\quad 4x+2$

$5x^2 - 18x + 9$ $\quad (3x-3)^2 + (4x-8)^2 =$ $\quad 9x^2 - 18x + 9 + 16x^2 - 64x + 64$

$\cos\beta = \sqrt{\frac{1}{17}}$; $\cancel{\sin 2\beta = \pm\frac{12}{17}\sqrt{2}}$

$\sqrt{1-\frac{1}{17}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$

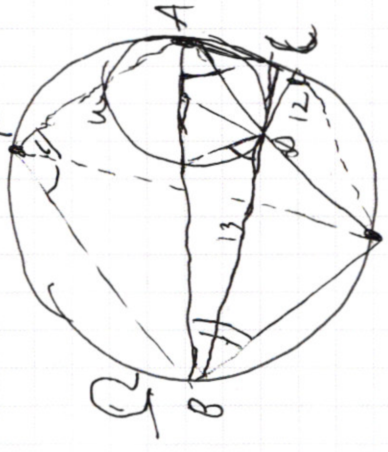
$\cancel{\sin 2\beta = \frac{12}{17}\sqrt{2}}$

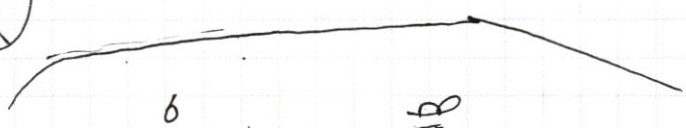
$\sin 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$

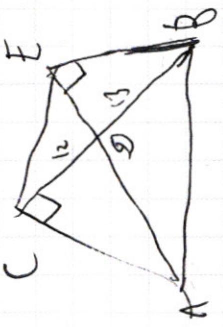
$\sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} + \cos 2\alpha \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} = \frac{-1}{\sqrt{17}} \quad | \cdot \sqrt{17}$

$\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = -1$

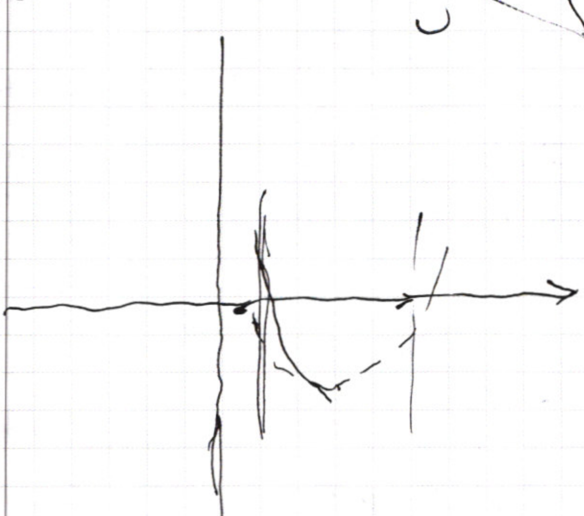
$y = 14x$
$y = 4x+1$

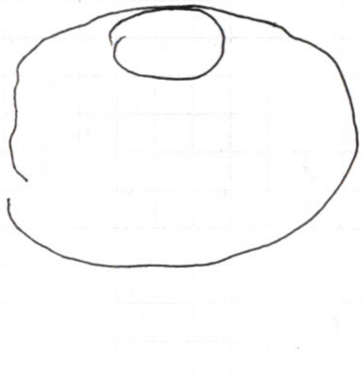






$\frac{14+\sqrt{65}}{12}$ $\frac{14+9}{12} = \frac{23}{12}$





$f(xy^{-1}) = f(x) - f(y) \leq 0.$

$f(1) = ?$

$f(2) = f(1) + f(2) \Rightarrow f(1) = 0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

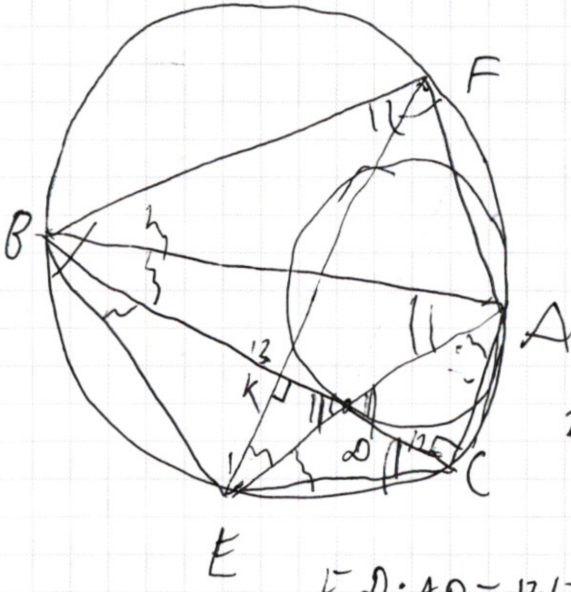
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2t;3.$



$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

$26x-x^2=t$, $x\in[0;26]$, $t\in[0;2]$

$\cancel{|t|^{\log_5 12}+t \geq 13^{\log_5 t}}$

$26\cdot 13-13\cdot 13=2.$

$26x-x^2>0$, $t<0$

$(<t)$

$t^{\log_5 13}-t^{\log_5 12}\leq t$

$EF \parallel AC$!

$ED\cdot AD=13\cdot 12$

$BC\perp AC$!

$EF\perp BC$!

$\frac{BE}{AC}=\frac{13}{12}$

$t^{\log_5 12}+t\geq 13^{\log_5 t}$ $t\in f:$

$t^{\log_5 12}+t\geq 13^{\frac{\log_{13} t}{\log_{13} 5}}$; $\frac{1}{13}-\frac{1}{12}=$

$EC=AC \neq AF$

$\angle K\sim \triangle ABC$

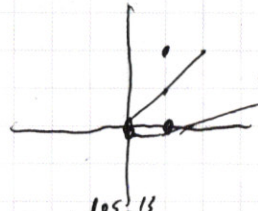
$t^{\log_5 12}+t\geq t^{\log_5 13}$

$t^{\log_5 13}-\cancel{\log_5} t^{\log_5 12}\leq t$

x^2-26x;

$2x-26=0$; $x=13$

$\frac{KC}{AE}=\frac{EC}{AB}=\frac{AC}{AB}=\cancel{\frac{12}{28}}$



$t^{\log_5 12}(t^{\log_5\frac{13}{12}}-1)\leq t$

$t=1!$

$t^{\log_5 12}+t\geq 13^{\log_5 t}$

$13^{\log_5 t}=13^{\frac{\log_{13} t}{\log_{13} 5}}=t^{\log_5 13}$

$t(t^{\log_5 12-\log_5 5}+1)\vee t^{\log_5 13}$

$t(t^{\log_5 2.4}+1)\vee t^{\log_5 13}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$t^{\log_5 13} \le t + t^{\log_5 12}$

$\log_5 13 \cdot \log_5 t \le \log_5(t + t^{\log_5 12})$

$\log_5 13 \log_5 t \le \log_5 t \cdot \log_5(1 + t^{\log_5 2{,}4})$

$1 + 2^{\log_5 2{,}4} \vee \log_5 13$

$2^{\log_5 2{,}4} \vee \log_5 2{,}6 < 1$

$\vee$

1

$2^{\log_5 2{,}4} < 2^{0{,}5}$

$\log_5 t\,(\log_5(1 + t^{\log_5 2{,}4}) - \log_5 13) \ge 0$

$\log_5 13$

$1; 2; 5.$

$\log_5 t\,(1 + t^{\log_5 2{,}4} - \log_5 13) \le$

$(13 - \sqrt{13 - \log_5 2{,}6}^{\,\log_{2{,}4} 5}; 2].$

$= 10 + 10$

$9 + 8 = 17$

$14 + 2 = 16$

$14 + 2 = 21$

23

$9 \quad 8$

$1 \quad 2$

$1 \quad 2$

$(t-1)(t^{\log_5 2{,}4} - \log_5 2{,}6)$

$(0; 1)$

$(t-1)(t - \sqrt[\log_5 2{,}4]{\log_5 2{,}6}) \ge 0$

$x^2 - 26x \le c$

$D = 169 - c$

$13 \pm \sqrt{169 - c}$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = \cos(\pi - 2\beta) = \cancel{\cos(2\beta - \pi)} =$

$= \sin(-\frac{\pi}{2} + 2\beta)$

$\cancel{2\alpha = -\pi}$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$2\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n;$

$\alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$

$tg = -1$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}};$

$\frac{17^2 - \dots}{17^2} =$

$\cos 4\beta = \frac{2}{17} - 1 = \frac{-15}{17}; \quad \sin 4\beta = \sqrt{\frac{64}{17^2}} = \pm\frac{8}{17}$

$= \frac{2 \cdot 32}{17^2} = \frac{64}{17^2}$

$2\alpha + 2\beta = \pi + \frac{\pi}{2} - 2\beta$

$2\alpha = \frac{3\pi}{2} - 4\beta;$

$\alpha = \frac{3\pi}{4} - 2\beta.$

~~$\sin 2\alpha =$~~

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\beta \sin 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\beta \cos 2\alpha$

$\sin 2\alpha(\cos 4\beta + 1) + \cos 2\alpha \sin 4\beta = -\frac{2}{17}$

$\frac{2}{17} \sin\alpha + \cos 2\alpha \cdot \frac{8}{17} = -\frac{2}{17}$

$tg\alpha = tg(\frac{3\pi}{4} - 2\beta) =$

$= \frac{\sin(\frac{3\pi}{4} - 2\beta)}{\cos(\frac{3\pi}{4} - 2\beta)}$

$\frac{\pi}{2}$

$\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$; (1) $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$;

подставим

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{17}$

$-\frac{2}{\sqrt{17}}\cos 2\beta = -\frac{2}{17}$; $\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$; $|\sin 2\beta| = \sqrt{1-\frac{1}{17}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$. (*)

$-\frac{1}{\sqrt{17}} = -\cos 2\beta = \cos(\pi - 2\beta) = \sin\left(2\beta - \frac{\pi}{2}\right)$ (2)

Заметим, что (1) = (2); тогда

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin\left(2\beta-\frac{\pi}{2}\right)$; тогда $\left[\begin{array}{l} 2\alpha+2\beta = 2\beta - \frac{\pi}{2}+2\pi k;\ k\in\mathbb{Z} \\ 2\alpha+2\beta = \pi - 2\beta+\frac{\pi}{2}+2\pi t;\ t\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$ $\Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l} \alpha = -\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \Rightarrow tg\alpha = -1. \\ \alpha = \frac{3\pi}{4} - 2\beta + \pi t;\ t\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$, т.к. $tg(x+\pi) = tg(x)$, возьмём $t=0$.;

$tg(\alpha) = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{4}-2\beta\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{4}-2\beta\right)} = \frac{\sin\frac{3\pi}{4}\cos 2\beta - \sin 2\beta\cos\frac{3\pi}{4}}{\cos\frac{3\pi}{4}\cos 2\beta + \sin\frac{3\pi}{4}\sin\beta} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos 2\beta + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\beta}{-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2\beta + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\beta} =$

$= \frac{\sin 2\beta + \cos 2\beta}{\sin 2\beta - \cos 2\beta}$ по * у нас есть 2 варианта: $\left[\begin{array}{l}\sin 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}; \\ \sin 2\beta = \frac{-4}{\sqrt{17}};\end{array}\right.$

подставим: $\left[\begin{array}{l} tg\alpha = \dfrac{\frac{4}{\sqrt{17}}+\frac{1}{\sqrt{17}}}{\frac{4}{\sqrt{17}}-\frac{1}{\sqrt{17}}} \\ tg\alpha = \dfrac{-\frac{4}{\sqrt{17}}+\frac{1}{\sqrt{17}}}{\frac{-4}{\sqrt{17}}-\frac{1}{\sqrt{17}}}\end{array}\right.$ $\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l} tg\alpha = \frac{4+1}{4-1} \\ tg\alpha = \frac{-4+1}{-4-1}\end{array}\right.$ $\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l} tg\alpha = \frac{5}{3} \\ tg\alpha = \frac{3}{5}.\end{array}\right.$

Ответ: $tg\alpha \in \left\{-1;\ \frac{3}{5};\ \frac{5}{3}\right\}$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№5

Заметим, что:

$f(a) = f(1\cdot a) = f(1) + f(a) \Rightarrow f(1) = 0.$

Тогда

$f(1) = f(a\cdot a^{-1}) = f(a) + f(a^{-1}) = 0$ (т.к. $f(1)=0$),

тогда $f(a^{-1}) = f(\frac{1}{a}) = -f(a)$;

Но тогда $f(\frac{x}{y}) = f(xy^{-1}) = f(x) + f(y^{-1}) = f(x) - f(y) < 0$; $\Rightarrow$

$f(y) > f(x)$. Переберём все $f(a)$, где $a \in \mathbb{N}$; $4 \le a \le 28$.

$f(4) = f(2) + f(2) = \cancel{[\frac{4}{4}]+[\frac{4}{4}]=2} \; [\frac{2}{4}] + [\frac{2}{4}] = 0$

$f(5) = [\frac{5}{4}] = 1$

$f(6) = f(2) + f(3) = \cancel{[\frac{2}{4}]+} [\frac{2}{4}] + [\frac{3}{4}] = 0$

$f(7) = [\frac{7}{4}] = 1$

$f(8) = f(4) + f(2) = 0 + [\frac{2}{4}] = 0.$

$f(9) = f(3) + f(3) = [\frac{3}{4}] + [\frac{3}{4}] = 0$

$f(10) = f(2) + f(5) = [\frac{2}{4}] + 1 = 1$

$f(11) = [\frac{11}{4}] = 2$

$f(12) = f(4) + f(3) = 0 + [\frac{3}{4}] = 0$

$f(13) = [\frac{13}{4}] = 3$

$f(14) = f(2) + f(7) = [\frac{2}{4}] + 1 = 1$

$f(15) = f(5) + f(3) = 1 + [\frac{3}{4}] = 1$

$f(16) = f(4) + f(4) = 0$

$f(17) = [\frac{17}{4}] = 4$

$f(18) = f(6) + f(3) = 0 + [\frac{3}{4}] = 0.$

$f(19) = [\frac{19}{4}] = 4$

$f(20) = f(4) + f(5) = 0 + 1 = 1$

$f(21) = f(3) + f(7) = 1 + [\frac{3}{4}] = 1$

$f(22) = f(11) + f(2) = 2 + [\frac{2}{4}] = 2$

$f(23) = [\frac{23}{4}] = 5$

$f(24) = f(6) + f(4) = 0$

$f(25) = f(5) + f(5) = 2$

$f(26) = f(2) + f(13) = [\frac{2}{4}] + 3 = 3$

$f(27) = f(3) + f(9) = [\frac{3}{4}] + 0 = 0$

$f(28) = f(4) + f(7) = 1.$

чисел, где $f(a)=0$: 9

$f(a)=1$: 8

$f(a)=2$: 3

$f(a)=3$: 2

$f(a)=4$: 2

$f(a)=5$: 1.

если $f(x)=0$, то у нас есть 16 вариантов y; 5 вариантов x

если $f(x)=1$, то есть 8 вариантов y, 8 вариантов x

если $f(x)=2$, то 3 вариантах, 5 вариантов y

если $f(x)=3$, 2 вариантах, 3 y

если $f(x)=4$, то 2 варианта x и 1 вариант y

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

То есть, всего пар

$9\cdot 16+\underset{64}{8\cdot 8}+3\cdot 5+2\cdot 3+2\cdot 1=144+64+15+6+2=150+64+17=150+81=231$

Ответ: 231.

№ 2

$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} & (1)\\ 9x^2+y^2-18x+12y=45 & (3)\end{cases}$

(1): $y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \Leftrightarrow \begin{cases} y\ge 6x \\ y^2-12xy+\overset{36x^2}{\cancel{x^2}}=xy-6x-y+6 & (2)\end{cases}$

(2): $y^2-12xy+36x^2=xy-6x-y+6 \Leftrightarrow y^2-13xy+y+36x^2+6x-6=0$;

решим кв. ур. отн. y: $D=(1-13x)^2-4(36x^2+6x-6)=169x^2-26x+1-144x^2-24x+24=$

$=25x^2-50x+25=5(x-1)^2$

$y_{1,2}=\frac{13x-1\pm|5x-5|}{2}$; ~~Если~~ как бы мы не раскрыли модуль, ~~одно~~ один y будет $\frac{13x-1+5x-5}{2}$; второй $\frac{13x-1-5x+5}{2}$; т.е.

$\left[\begin{array}{l} y=4x+2 \\ y=9x-3\end{array}\right.$; Заметим, что $4x+2\ge 6x \Leftrightarrow x\le 1$;

$9x-3\ge 6x \Leftrightarrow x\ge 1$; подставим в (3), пред. преобразовав:

~~$9x^2+(4x+2)^2$~~

$9x^2+y^2-18x+12y=45 \Leftrightarrow (3x-3)^2+(y-3)^2=90$; подставим:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}(3x-3)^2+(4x+2-3)^2=90\\ x\le 1\end{cases}\\ \begin{cases}(3x-3)^2+(9x-3-3)^2=90\\ x\ge 1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}9x^2-18x+9+(4x-1)^2=90\\ x\le 1\end{cases}\\ \begin{cases}9x^2-18x+9+(9x-6)^2=90\\ x\ge 1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}9x^2-18x+9+16x^2-8x+1=90\\ x\le 1\end{cases}\\ \begin{cases}9x^2-18x+9+81x^2-108x+36=90\\ x\ge 1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}25x^2-26x+10-90=0\\ x\le 1\end{cases}\\ \begin{cases}90x^2-126x-45=0\\ x\ge 1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}25x^2-26x-80=0\\ x\le 1\end{cases}\\ \begin{cases}30x^2-42x-15=0\\ x\ge 1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}25x^2-26x-80=0 \ : \ D/4=13^2+80\cdot 25=169+2000=2169\\ x\le 1\end{cases}\\ \begin{cases}10x^2-14x-5=0 \quad D/4=49+50=99\\ x\ge 1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\frac{13-\sqrt{2169}}{25}<\frac{13-\sqrt{169}}{25}=0\le 1 \text{ — подходит.}\\ x=\frac{13+\sqrt{2169}}{25}>\frac{13+\sqrt{169}}{25}=\frac{26}{25}>1 \text{ — не подходит}\end{array}\right.\\ x\le 1\end{cases}\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\frac{7+3\sqrt{11}}{10}>\frac{7+3\sqrt{9}}{10}=\frac{7+9}{10}=1{,}6\ge 1 \text{ — подходит}\\ x=\frac{7-3\sqrt{11}}{10}<\frac{7-3\sqrt{9}}{10}=\frac{7-9}{10}=\frac{-2}{10}<1 \text{ — не подходит.}\end{array}\right.\\ x\ge 1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\frac{13-\sqrt{2169}}{25}\\ y=4x+2\end{cases}\\ \begin{cases}x=\frac{7-3\sqrt{11}}{10}\\ y=9x-3\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\frac{13-\sqrt{2169}}{25}\\ y=\frac{102-4\sqrt{2169}}{25}\end{cases}\\ \begin{cases}x=\frac{7-3\sqrt{11}}{10}\\ y=\frac{33-27\sqrt{11}}{10}\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $\left(\frac{7-3\sqrt{11}}{10};\ \frac{33-27\sqrt{11}}{10}\right)$; $\left(\frac{13-\sqrt{2169}}{25};\ \frac{102-4\sqrt{2169}}{25}\right)$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+3 \geq 18x^2-51x+28 \Leftrightarrow$

$\begin{cases} \frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+3 \\ 18x^2-51x+28 \leq ax+6 \end{cases}$; $\frac{8-6x}{3x-2} = \frac{4+4-6x}{3x-2} = -2+\frac{4}{3x-2}$

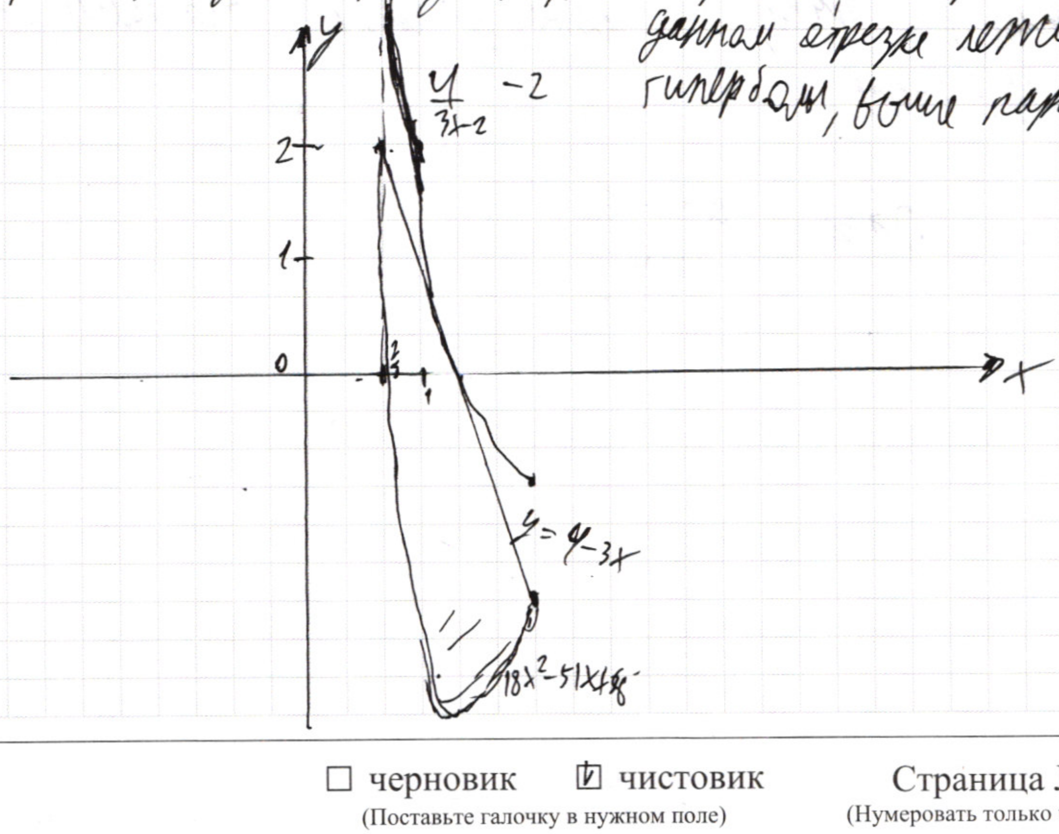
т.к. это парабола и $ax+3$ прямая, то схематично они расположены ветвями вверх

так: или так: тогда достаточно гарантировать,

что оно верно для $\frac{2}{3}$ и 2, [illegible]. Изобразим

~~$2x+5z^2$ x $7z-10z+8$~~

На графике параболы гиперболу на $[\frac{2}{3}; 2]$: заметим, что прямая на данном отрезке лежит ниже гиперболы, выше параболы.



☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

найдём „~~критическую~~ такую прямую, что в $\frac{2}{3}$ и 2

~~пере~~ она пересекает параболу;

она проходит через точки $\left(\frac{2}{3};2\right)$ и $(2;-2)$. Заметим,

что необходимая прямая — прямая $y=4-3x$.

~~посмотрим, есть ли~~ заметим, что эта прямая касается

гиперболы: $4-3x=\frac{8-6x}{3x-2}$; $-9x^2+6x+12x-8=8-6x$;

$-9x^2+24x-16=0$;

$9x^2-24x+16=0$

$(3x-4)^2=0$ — один корень $\Rightarrow$

1 общая точка, а, т.к. $\frac{2}{3}<\frac{4}{3}\leq 2$, то она лежит в исход-

ной области.

Если бы была ещё одна прямая, лежащая

ниже гиперболы и выше параболы, то она бы

хотя бы в одной из двух точек была с коорд. по x

$\frac{2}{3}$ или 2 была бы выше исходной, но тогда

она пересекала бы гиперболу, и значит

были бы точки, не удовл. условию, поэтому $-3;4$ —

ед. пара.

Ответ: $a=-3$
$b=4$.

☐ черновик ☑ чистовик Страница №6

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)