$\log_a(b) = \log_c(b) / \log_c(a)$ $\sin(x+\alpha)$ $\sin(\alpha)+\sin(\beta)+1 =$

$\sin(2x)+\sin(2\alpha)$

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

$15\cdot 15=225$ $17\cdot 17=170+70+49=289$

11 класс

$\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

ВАРИАНТ 4

ШИФР ________________

$\sin(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

Заполняется ответственным секретарём

$\sin(\alpha+2\beta)+\sin(\alpha) = -\frac{2}{17}$

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}.$$

$\sin(x) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$; $\sin(x)+\sin(y) = -\frac{2}{17}$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x = \sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12} + 26x \geqslant x^2 + 13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 12$, $BD = 13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a)+f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4 \leqslant x \leqslant 28$, $4 \leqslant y \leqslant 28$ и $f(x/y) < 0$.

$f(5)=1$ $f(6)=0$ $f(7)=1$ $f(8)=0$ $f(9)=0$

$f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=0$ $f(p\cdot q) = [\frac{p}{4}]+[\frac{q}{4}]$

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$f(\frac{1}{y})+f(y)=0$ $f(10)=1$

$$\frac{8-6x}{3x-2} \geqslant ax+b \geqslant 18x^2-51x+28$$

$f(x)+f(\frac{1}{y}) = f(x)+f(\frac{p}{y})-[\frac{p}{4}]$ $f(p\cdot x)-f(p)=f(x)$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

$f(11)=2$

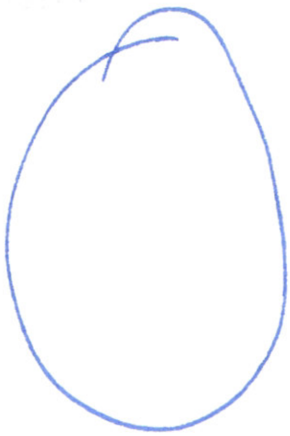
$f(x)-f(y)<0$ $f(p\cdot\frac{x}{y})-[\frac{p}{4}] = f(\frac{x}{y})$ $f(p\cdot x)-[\frac{p}{4}]=f(x)$

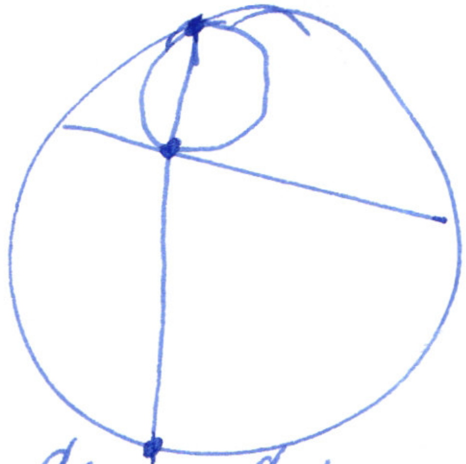
7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY = \sqrt{3}$, $TX = \sqrt{2}$, $TZ = 2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

$-\frac{1}{2} = \cos(\alpha)$ $\sin(\alpha) = \frac{1}{2}$ $f(12)=0$

$\ln(a)+\ln(b) = a\cdot b$

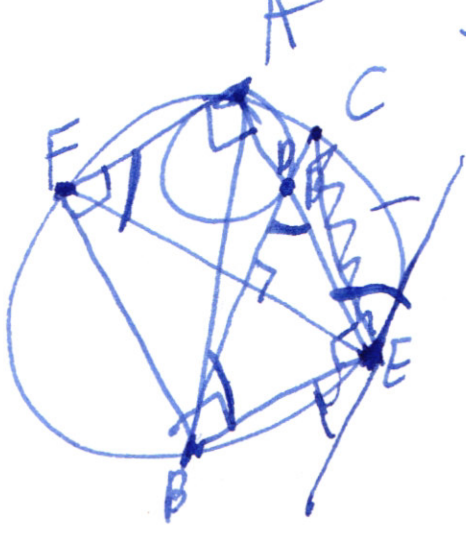
$\sqrt{\frac{25}{34}} = \sin(\alpha)$ $\cos(\alpha) = \sqrt{\frac{9}{34}}$ $f(13)=3$ $f(14)$





$f(p_1^{a_1} \cdots p_n^{a_n}) =$

$= f(p_n) \cdot p_n^{a_n-1} \cdots p_1^{a_1}$



$f(10)$

$DE^2 + AE^2 = R_{LR}^2$

$$\frac{AE}{AE-DE} = \frac{R_{LR}}{R_w} = \frac{\sqrt{DE^2+AE^2}}{R_w}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

$\sin(2\alpha+2\cdot\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha) =$

$= -\frac{2}{17}$

~~введу новые переменную:~~

~~$x = 2\alpha+2\beta$~~

введу переменную $x = \alpha+2\beta$

$\sin(x+\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2x)+\sin(2\alpha) = -\frac{2}{17}$

$-2\cdot\sin^2(x+\alpha) = -\frac{2}{17} = \sin(2x)+\sin(2\alpha)$

$\sin(2x) + 2\cdot\sin^2(x+\alpha) + \sin(2\alpha) = 0$

$\sin(2x)+\sin(2\alpha)+1-\cos(2(x+\alpha)) = 0$

$1+\sin(2x)+\sin(2\alpha) = \cos(2x+2\alpha) = \cos(2x)\cdot\cos(2\alpha) -$
$- \sin(2x)\cdot\sin(2\alpha)$

$1+\sin(2x)+\sin(2\alpha)+\sin(2x)\cdot\sin(2\alpha) = \cos(2x)\cdot\cos(2\alpha)$

$(\sin(2x)+1)(\sin(2\alpha)+1) = \cos(2x)\cos(2\alpha)$

$(\sin(2x)+1)^2(\sin(2\alpha)+1)^2 = (1-\sin^2(2x))(1-\sin^2 2\alpha))$

пусть ~~sin~~ $\sin(2x) \neq -1$ и $\sin(2\alpha) \neq -1$,
тогда

$(\sin(2x)+1)^2 \cdot (\sin(2\alpha)+1)^2 = (1-\sin(2x))(1+\sin(2x)) \cdot$

$\cdot (1-\sin(2\alpha))(1+\sin(2\alpha))$

$(1+\sin(2x)) \cdot (1+\sin(2\alpha)) = (1-\sin(2x)) \cdot$

$\cdot (1-\sin(2\alpha))$

$1+\sin(2x)+\sin(2\alpha)+\sin(2x)\cdot\sin(2\alpha) =$

$= 1-\sin(2x) - \sin(2\alpha) + \sin(2x)\cdot\sin(2\alpha)$

$2\cdot\sin(2x) + 2\cdot\sin(2\alpha) = 0$

но $\sin(2x)+\sin(2\alpha) = -\frac{2}{17}$

противоречие, а значит
$\sin(2x) = -1$ или $\sin(2\alpha) = -1$

1) $\sin(2x) = -1$

$2x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$

$x = -\frac{\pi}{4} + \pi \cdot n$, где $n \in \mathbb{Z}$

$\sin(2x)+\sin(2\alpha) = -\frac{2}{17}$

$\sin(2\alpha) = \frac{15}{17}$

~~$2\alpha = \pm\arcsin(\frac{15}{17}) + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$~~

черновик ✓ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~круг cos(α)~~

$\cos(\alpha)\cdot\sin(\alpha) = \frac{15}{34}$

$(1-\sin^2(\alpha))\sin^2(\alpha) = \frac{15^2}{34^2}$

~~$\sin^2(\alpha) = t$~~

$-(\sin^2(\alpha))^2 + \sin^2(\alpha) - \left(\frac{15}{34}\right)^2 = 0$

$\sin^2(\alpha) = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\cdot\frac{15^2}{34^2}}}{-2} = \frac{1}{2} \pm$

$\pm \frac{\sqrt{\frac{17^2-15^2}{17^2}}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{8}{17\cdot 2} = \frac{1}{2} \pm \frac{4}{17}$

$|\sin(\alpha)| = \sqrt{\frac{1}{2} \pm \frac{4}{17}}$

$\cos^2(\alpha) = \frac{1}{2} \mp \frac{4}{17} = 1 - \sin^2(\alpha) = 1 - \frac{1}{2} \mp \frac{4}{17}$

$|\cos(\alpha)| = \sqrt{\frac{1}{2} \mp \frac{4}{17}}$

$\sin(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ или $\sin(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

и $\cos(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ~~или~~ $\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

~~$\sin(\alpha) = \sqrt{\frac{1}{2} \pm \frac{4}{17}}$; $\cos(\alpha) = \pm$~~

1) $\sin(\alpha) = \sqrt{\frac{25}{34}}$; $\cos(\alpha) = \sqrt{\frac{9}{34}}$

2) $\sin(\alpha) = \sqrt{\frac{9}{34}}$; $\cos(\alpha) = \sqrt{\frac{25}{34}}$

3'') $\sin(\alpha) = -\sqrt{\frac{25}{34}}$; $\cos(\alpha) = \sqrt{\frac{9}{34}}$

4'') $\sin(\alpha) = -\sqrt{\frac{9}{34}}$; $\cos(\alpha) = \sqrt{\frac{25}{34}}$

5'') $\sin(\alpha) = \sqrt{\frac{25}{34}}$; $\cos(\alpha) = -\sqrt{\frac{9}{34}}$

6'') $\sin(\alpha) = \sqrt{\frac{9}{34}}$; $\cos(\alpha) = \sqrt{\frac{25}{34}}$

7'') $\sin(\alpha) = -\sqrt{\frac{25}{34}}$; $\cos(\alpha) = -\sqrt{\frac{9}{34}}$

8'') $\sin(\alpha) = -\sqrt{\frac{9}{34}}$; $\cos(\alpha) = -\sqrt{\frac{25}{34}}$

~~1) Если~~ ~~если~~ 1) если $\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, то

$\sin(x+\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (\sin(\alpha) - \cos(\alpha)) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

2) если $\sin(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, то:

$\sin(x+\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(\alpha) - \sin(\alpha)) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

1') $\sin(\alpha) - \cos(\alpha) = -\sqrt{\frac{2}{17}}$

2') $\sin(\alpha) - \cos(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{17}}$

тогда ~~ест~~ есть лишь одно условие:

$|\sin(\alpha) - \cos(\alpha)| = \sqrt{\frac{2}{17}}$, ведь

x и α независимы и можно для каждого α ~~подобрать~~

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

удовлетворяющего $|\sin(\alpha)-\cos(\alpha)| = \sqrt{\frac{2}{17}}$

подобрать x, чтобы если $\sin(\alpha)-\cos(\alpha)>0$, то x удовлетворял бы условиям 2"): ($\sin(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$) и наоборот, так что:

~~: для каждого~~

1") $|\sin(\alpha)-\cos(\alpha)| = \sqrt{\frac{2}{17}}$; $tg(\alpha)=\frac{5}{3}$

2") $|\sin(\alpha)-\cos(\alpha)| = \sqrt{\frac{2}{17}}$; $tg(\alpha)=\frac{3}{5}$

3") $|\sin(\alpha)-\cos(\alpha)| = 4\cdot\sqrt{\frac{2}{17}}$ – не решение

4") $|\sin(\alpha)-\cos(\alpha)| = 4\cdot\sqrt{\frac{2}{17}}$ – не решение

5") $|\sin(\alpha)-\cos(\alpha)| = 4\cdot\sqrt{\frac{2}{17}}$ – не решение

6") $|\sin(\alpha)-\cos(\alpha)| = 4\cdot\sqrt{\frac{2}{17}}$ – не решение

7") $|\sin(\alpha)-\cos(\alpha)| = \sqrt{\frac{2}{17}}$; $tg(\alpha)=\frac{5}{3}$

8") $|\sin(\alpha)-\cos(\alpha)| = \sqrt{\frac{2}{17}}$; $tg(\alpha)=\frac{3}{5}$

т.е. если $\sin(2x)=-1$
$tg(\alpha)=\frac{5}{3}$ или $tg(\alpha)=\frac{3}{5}$

2) если $\sin(2\alpha)=-1$

то всё симметрично, ведь при замене x на α, а α на x исходные уравнения не меняются, а значит, как уже было выяснено если $\sin(2\alpha)=-1$, то ~~$tg(\alpha)$~~ либо $\sin(\alpha)=\frac{7}{12}$ и $\cos(\alpha)=-\frac{7}{12}$

либо $\sin(\alpha)=-\frac{7}{12}$ и $\cos(\alpha)=\frac{7}{12}$
в обоих случаях
$tg(\alpha)=-1$

Ответ: $tg(\alpha)=\frac{5}{3}$ или $tg(\alpha)=\frac{3}{5}$
или $tg(\alpha)=-1$.

№2

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$$

~~$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \end{cases}$~~

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{(x-1)(y-6)} \\ 9\cdot(x-1)^2-9+(y-6)^2-36=45 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~$y-6x=$~~

$$\begin{cases} (y-6)-6\cdot(x-1)=\sqrt{(x-1)(y-6)} \\ 9\cdot(x-1)^2+(y-6)^2=90 \end{cases}$$

введу новые переменные:

$t=y-6$

$z=x-1$

$$\begin{cases} t-6\cdot z=\sqrt{t\cdot z} \\ 9\cdot z^2+t^2=90 \end{cases}$$, т.е. $t-6z\geq 0$

$(t-6\cdot z)^2=t\cdot z$ - неравносильный переход

$t^2+36\cdot z^2-12\cdot t\cdot z=t\cdot z$

$$\begin{cases} t^2-13tz+36z^2=0 \\ t^2-90+9z^2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t=\dfrac{13\cdot z\pm\sqrt{169\cdot z^2-144\cdot z^2}}{2} \\ t=\pm\sqrt{90-9z^2} \end{cases}$$

$\pm$ сверху и $\pm$ снизу не связаны

друг с другом

$$\begin{cases} t = 6{,}5\cdot z \pm 2{,}5\cdot z \\ t = \pm\sqrt{90-9z^2} = \pm 3\cdot\sqrt{10-z^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} t = 9\cdot z \\ t = 4\cdot z \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} t = 3\sqrt{10-z^2} \\ t = -3\sqrt{10-z^2} \end{array}\right. \end{cases}$$

1) $t > 0$, тогда

$t = 3\sqrt{10-z^2}$

1') $t = 3\sqrt{10-z^2} = 9\cdot z > 0$, $z > 0$

$10 - z^2 = 9z^2$

$1 = z^2$

$z = \pm 1$

$z > 0$, т.е. $z = 1$

$t = 9$ $\quad t - 6z = 3 = \sqrt{t\cdot z}$, значит $t=9, z=1$ решение

2') $t = 3\sqrt{10-z^2} = 4z > 0$

$90 - 9z^2 = 16z^2$

$\frac{18}{5} = z^2$, $z > 0$, а значит:

$z = 3\cdot\sqrt{\frac{2}{5}}$

$t = 12\cdot\sqrt{\frac{2}{5}}$ $\quad t - 6z < 0$ – не решение

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) $t<0$, тогда

$t=-3\sqrt{10-z^2}$

1') $t=-3\sqrt{10-z^2}=9\cdot z<0$, т.е. $z<0$

$10-z^2=9z^2$

$z^2=1$

$z=-1$, ведь $z<0$

$t=-9$

$t-6\cdot z<0$ – не решение

2') $t=-3\sqrt{10-z^2}=4z<0$ т.е. $z<0$

$90-9z^2=16z^2$

$\cancel{\frac{18}{12}}\ \frac{18}{5}=z^2$

$z=-3\sqrt{\frac{2}{5}}$, ведь $z<0$

$t=-12\sqrt{\frac{2}{5}}$, т.е. $t-6z=6\sqrt{\frac{2}{5}}=$

$=\sqrt{t\cdot z}=\sqrt{4\cdot 3^2\cdot\frac{3}{5}}=6\sqrt{\frac{2}{5}}$

т.е. $z=-3\sqrt{\frac{2}{5}}$, а $t=-12\sqrt{\frac{2}{5}}$ – решение

~~1 решени~~

$$\begin{cases} t=9 \\ z=1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} t=-12\sqrt{\frac{2}{5}} \\ z=-3\sqrt{\frac{2}{5}} \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} t=9 \\ z=1 \end{cases} \\ \begin{cases} t=-12\sqrt{\frac{2}{5}} \\ z=-3\sqrt{\frac{2}{5}} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=15 \\ x=2 \end{cases} \\ \begin{cases} y=-12\sqrt{\frac{2}{5}}+6 \\ x=-3\sqrt{\frac{2}{5}}+1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $y=15$, а $x=2$ или

$y=6-12\sqrt{\frac{2}{5}}$, а $x=1-3\sqrt{\frac{2}{5}}$

№3

~~$|x^2-26x|^{\log_5 12}=$~~

$$|x^2-26x|^{\log_5 |12|}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$$

$26x-x^2>0$, ведь иначе $\log_5(26x-x^2)$ – неопределён

~~$26x-x^2>0$ при~~

$26x-x^2=0$ при $x=0$ или $x=26$,

а значит:

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$26x-x^2>0$ при $x\in[0;26)$

тогда

$|x^2-26x|=26x-x^2\geq 0$

$(26x-x^2)^{\log_5(12)}+26x-x^2\geq 13^{\log_5(26x-x^2)}$

введу новую переменную

$t=26x-x^2$, ~~тогда~~ $t\geq 0$ и

$t^{\log_5(12)}+t\geq 13^{\log_5(t)}$

$\log_5(t)=\log_{13}(t)\cdot\log_5(13)$

$t^{\log_5(12)}+t\geq t^{\log_5(13)}$

~~$\log_5(13)>\log_5(12)<\log_5(t)$~~

$t^{\log_5(12)}-t^{\log_5(13)}+t\geq 0$

~~$f'(t)=\log_5(12)\cdot t^{\log_5(12)-1}-\log_5(13)\cdot t^{\log_5(13)-1}+1$~~

~~$f'(t)$ тем меньше, чем t больше,~~

~~ведь~~

$f''(t) = \log_5(12)\cdot(\log_5(12)-1)\cdot$
$\cdot t^{\log_5(12)-2} - \log_5(13)\cdot(\log_5(13)-1)\cdot$
$\cdot t^{\log_5(13)-2}$ $\vee$ 0 означает сравнить

$\log_5(12)\cdot(\log_5(12)-1)\cdot$
$\cdot t^{\log_5(12)-\log_5(13)} \vee \log_5(13)\cdot(\log_5(13)-1)$

$t^{\log_5\left(\frac{12}{13}\right)} \vee \frac{\log_5(13)}{\log_5(12)} \cdot \frac{\log_5(13)-\log_5(5)}{\log_5(12)-\log_5(5)}$

$t \vee \log_{\log_5\left(\frac{12}{13}\right)}\left(\frac{\log_5(13)}{\log_5(12)}\cdot\frac{\log_5\left(\frac{13}{5}\right)}{\log_5\left(\frac{12}{5}\right)}\right)$

$t^{\log_5(12)} + t^{\log_5(13)} + t = f(t)$

$f(25) = 12^2 + 5^2 - 13^2 = 0$

при $t > 25$:

$t = 25\cdot\varepsilon$, где $\varepsilon > 1$

надо доказать

$t^{\log_5(13)} = 25^{\log_5(13)}\cdot\varepsilon^{\log_5(13)} > 25^{\log_5(13)}\cdot\varepsilon^{\log_5 \dots}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$= \left(25^{\log_5(12)} + 25\right) \cdot \varepsilon^{\log_5(12)} =$

$= t^{\log_5(12)} + 25 \cdot \varepsilon^{\log_5(12)} > t^{\log_5(12)} + t$

~~вдедь~~ ведь $\varepsilon^{\log_5(12)-1} > 1$

поэтому

при $t > 25$

$f(t) < 0$

при $t < 25$:

$t = 25 \cdot \varepsilon$, $\varepsilon < 0$

$t^{\log_5(13)} = 25^{\log_5(13)} \cdot \varepsilon^{\log_5(13)} <$

$< 25^{\log_5(13)} \cdot \varepsilon^{\log_5(12)} = \left(25^{\log_5(12)} + 25\right) \cdot$

$\varepsilon^{\log_5(12)} = t^{\log_5(12)} + 25 \cdot \varepsilon \cdot$

$\cdot \varepsilon^{\log_5(12)-1} < t^{\log_5(12)} + t$

ведь $\varepsilon^{\log_5(12)-1} < 1$

поэтому при $t < 25$ $f(t) > 0$

Значит

$t^{\log_5(12)} + t - t^{\log_5(13)} \geq 0$

при $t \leq 25$

т.е. $0 \leq t \leq 25$

~~$0 \leq 26x - x$~~

$26x - x^2 \leq 25$

$0 \leq x^2 + 25 - 26 = (x+26)(x-1)$

~~$x \in [1; 26]$~~ ~~$[-26; 1]$~~ $x \in (-\infty; -26] \cup [1; +\infty)$

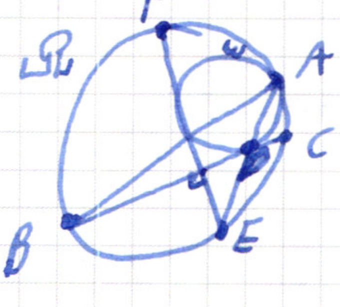
и также $x \in (0; 26)$, ведь

$26x - x^2 \geq 0$

Ответ: $x \in [1; 26)$.

№4

Дано:



Найти:

R_{Ω}

R_{ω}

$\angle AFE$

S_{AEF}

$CD = 12$

$BD = 13$

Нахождение:

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Если сделать преобразование гомотетии с центром в точке A и коэффициентом равным $\frac{R_\Omega}{R_\omega}$, то окружность ω перейдёт в окружность Ω, а так как точки ~~A~~ D, E и A на одной прямой, то D перейдёт в E, т.е.

~~$\frac{AD}{AE} = R$~~

$$\frac{AE}{AD} = \frac{R_\Omega}{R_\omega}$$

степень точки D равна

$$BD \cdot DC = 13 \cdot 12 = AD \cdot DE = 156$$

~~$\angle AFE = \angle ABE$~~

из гомотетии также следует, что E – середина дуги BC, F – середина большей части дуги BC.

$\angle FAE = 90°$; ведь FE диаметр.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 5

~~f(1/1)~~ Для любого ~~x~~ положительного рационального a:

$f(a)=f(1\cdot a)=f(1)+f(a)$

т.е. $f(1)=0$

$0=f(1)=f(\frac{1}{a}\cdot a)=f(\frac{1}{a})+f(a)$

т.е.

$f(\frac{1}{a})=-f(a)$, тогда

$f(\frac{x}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})=f(x)-f(y)$

для любой пары $(x;y)$, такой, что $f(x)\neq f(y)$

либо $f(x)>f(y)$ либо наоборот, т.е. если убрать пары $(x;y)$, для которых $f(x)=f(y)$, то все пары

делятся на два ~~группы~~
равномощных множества, так как если
$f(x)>f(y)$, то
$f(y)>f(x)$
и если $(x;y)$ в первом
множестве $f(\frac{x}{y})>9$
то $(y;x)$ во втором.
Осталось найти
количество пар
$(x;y)$ ~~для~~ для которых
$f(x)=f(y)$ и $4\le x\le 28$ и
$4\le y\le 28$

~~если $f(x)-f(y)=0$ то~~
~~$f(\frac{x}{y})=9$ т.е. надо~~
~~во-первых это пары с $x=y$~~
~~во-вторых:~~
~~$f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=9$ везде~~
~~$f(2)=[\frac{2}{9}]=0$~~
~~$f(3)=[\frac{3}{9}]=0$~~ ~~$f(4)=f(2)+f(2)=0$~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

p_i - простые

$f(p_1^{a_1} \dots p_n^{a_n}) = a_1 \cdot f(p_1) + \dots + a_n \cdot f(p_n)$

ведь

$f(p_1^{a_1} \dots p_n^{a_n}) = f(p_1) + f(p_1^{a_1-1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_n^{a_n}) =$

$= \dots = a_1 \cdot [\frac{p_1}{4}] + \dots + a_n \cdot [\frac{p_n}{4}]$

~~$f(1) = f(2) = f(3) = f$~~

$f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = f(6) = f(8) = f(9) =$

$= f(12) = f(16) = f(18) = f(24) = f(27) = 0$

$f(5) = f(10) = f(15) = f(7) = f(14) =$

$= f(21) = f(28) = f(20) = 1$

$f(11) = f(22) = 2 = f(25)$

$f(13) = f(26) = 3$

$f(17) = f(19) = 4$

~~$f(19) = 4$~~

$f(23) = 5$

~~$f($~~

т.е. есть ~~x~~ 9 чисел, для которых $f(x)=0$

8 чисел, для которых $f(x)=1$

3 числа с $f(x)=2$

2 числа $f(x)=3$

2 числа с $f(x)=4$

1 число с $f(x)=5$

из ~~..~~ натуральных чисел $4 \le x \le 28$

нужно найти количество упорядоченных пар $(x;y)$, что $f(x) \neq f(y)$:

т.е. $(x;y) \neq (y;x)$

xx ~~и тогда ...~~

~~$9\cdot8+9\cdot2+9\cdot2+9\cdot2+9\cdot1$~~

$9\cdot(25-9)+8\cdot(25-8)+3\cdot(25-3)+2\cdot$

$\cdot(25-2)+2\cdot(25-2)+1\cdot(25-1)=9\cdot16+8\cdot17+$

$+3\cdot22+2\cdot23+2\cdot23+24=144+136+66+$

$+92+24=210+160+92=370+92=$

$=462$

заметим, что ~~по~~ для половины этих пар $f(\frac{x}{y})>0$, а для другой половины $f(\frac{x}{y})<0$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Так что

$\cancel{\frac{462}{2} = 231}$

$\frac{462}{2} = 231$ – пар

$(x; y)$, что

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

Ответ: 231

№ 6

$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax + b \geq 18x^2 - 51x + 28$

верно для всех $x \in \left(\frac{2}{3}; 2\right]$

$18x^2 - (51+a)x + 28 - b \leq 0$

$18x^2 - (51+a)x + 28 - b = 0$ при

$$x = \frac{51 + a \pm \sqrt{(51+a)^2 - 4 \cdot 18 \cdot (28-b)}}{4 \cdot 18}$$

тогда $18x^2 - (51+a)x + 28 - b \leq 0$ при

$x \in \left[\frac{51+a}{4 \cdot 18} - \frac{\sqrt{(51+a)^2 - 4 \cdot 18 \cdot (28-b)}}{4 \cdot 18}; \frac{51+a}{4 \cdot 18} + \ldots\right.$

$$x \in \left[\frac{51+a}{4\cdot18} - \frac{\sqrt{(51+a)^2-4\cdot18\cdot(28-b)}}{4\cdot18};\ \frac{51+a}{4\cdot18} + \frac{\sqrt{(51+a)^2-4\cdot18\cdot(28-b)}}{4\cdot18}\right]$$

т.е. как минимум полуинтервал $\left(\frac{2}{3}; 2\right]$ вложен в этот отрезок

$$\begin{cases} \frac{2}{3} \geq \frac{51+a}{4\cdot18} - \frac{\sqrt{(51+a)^2-4\cdot18\cdot(28-b)}}{4\cdot18} \\ 2 \leq \frac{51+a}{4\cdot18} + \frac{\sqrt{(51+a)^2-4\cdot18(28-b)}}{4\cdot18} \end{cases}$$

$$\cancel{\frac{2}{3} + \frac{51+a}{4\cdot18}}$$

$$\begin{cases} \frac{51+a}{4\cdot18} - \frac{2}{3} \leq \frac{\sqrt{(51+a)^2-4\cdot18\cdot(28-b)}}{4\cdot18} \\ 2 - \frac{51+a}{4\cdot18} \leq \frac{\sqrt{(51+a)^2-4\cdot18(28-b)}}{4\cdot18} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 51+a-48 \leq \sqrt{(51+a)^2-4\cdot18\cdot(28-b)} \\ 144-51-a \leq \sqrt{(51+a)^2-4\cdot18\cdot(28-b)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3+a \leq \sqrt{(51+a)^2-4\cdot18\cdot(28-b)} \\ 93-a \leq \sqrt{(51+a)^2-4\cdot18\cdot(28-b)} \end{cases}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} (3+a)^2 \le \cancel{\sqrt{}}\,(51+a)^2 - 4\cdot 18\cdot(28-b) \\ 3+a<0 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} (93-a)^2 \le (51+a)^2 - 4\cdot 18\cdot(28-b) \\ 93-a<0 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 4\cdot 18\cdot(28-b) \le (51-3)\cdot(54+2a) \\ a<-3 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} 4\cdot 18\cdot(28-b) \le (51+93)\cdot(51-93+2a) \\ 93<a \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 4\cdot 18\cdot(28-b) \le 48\cdot(54+2a) \\ a<-3 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} 4\cdot 18\cdot(28-b) \le 144\cdot(2a-42) \\ 93<a \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 28-b \le \frac{2}{3}(54+2a) \\ a<-3 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} 28-b \le 2\cdot(2a-42) \\ 93<a \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 28-36-\frac{4}{3}a \le b \\ a<-3 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} 28+84-4a \le b \\ 93<a \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} -8-\frac{4}{3}a \le b \\ a<-3 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} 112-4a \le b \\ 93<a \end{array}\right. \end{cases}$$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b$$

$$\frac{8-6x-(ax+b)\cdot(3x-2)}{3x-2} \geq 0$$

$$\frac{-3\cdot a\cdot x^2-(b\cdot 3-2a)\,x+2b}{3x-2} \geq 0$$

при $x > \frac{2}{3}$: $3x-2>0$

$$-3ax^2+(2a-b\cdot 3)\,x+2b \geq 0$$

$-3ax^2+(2a-3\cdot b)\,x+2b=0$ при

$$x = \frac{3b-2a \pm \sqrt{(2a-3b)^2+24\cdot a\cdot b}}{-6\cdot a} = -\frac{b}{2\cdot a}+\frac{1}{3}\pm$$

$$\pm\frac{2a+3b}{-6a} = -\frac{b}{2\cdot a}+\frac{1}{3}\mp$$

$$\mp\frac{2a+3b}{6a} = \left(-\frac{b}{2a}+\frac{1}{3}\right)\mp\left(\frac{1}{3}+\frac{b}{2a}\right) = \left[\begin{array}{l} -\frac{b}{a} \\ \frac{2}{3} \end{array}\right.$$

чтобы все $x \in (\frac{2}{3};2]$ подходили нужно, чтобы $-\frac{b}{a} \geq 2$.

$\frac{b}{a} \leq 2$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \frac{b}{a} \le 2 \\ \left[\begin{array}{l} 8+\frac{4}{3}a \ge b \\ a \le -3 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} 112-4a \le b \\ 93 \le a \end{array}\right. \end{cases}$$

1) $\begin{cases} \frac{b}{a} \le 2 \\ 8+\frac{4}{3}a \ge b \\ 112-4a \le b \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{b}{a} \le 2 \\ 8+\frac{4}{3}a \ge b \\ 4a-112 \ge b \end{cases}$

1') $a > 0$

$b \le 2a$

$b \le 8+\frac{4}{3}a$

$b \le 4a-112$

$b \le \min(2a, 8+\frac{4}{3}a, 4a-112)$

$2a = 8+\frac{4}{3}a$ при $a = 12$, a

$8+\frac{4}{3}a = 4a-112$ при $a = 45$

~~при $0 \le a \le 12$ $b \le 2a$~~

~~при $a \in (12; 68]$ $b \le 8 + \frac{3}{4}a$~~

~~при $a > 68$ $b \le 4a - 112$~~

$2a = 4a - 112$ при $a = 56$

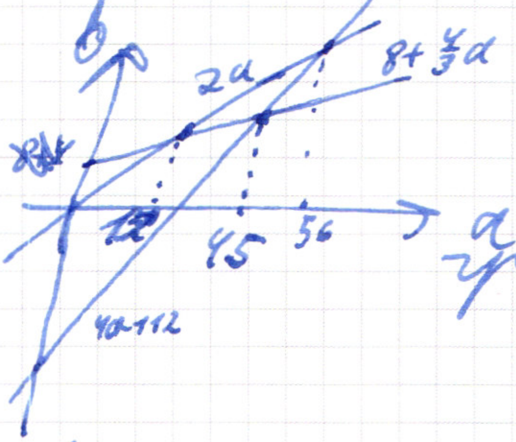


график 1

$b \le 4a - 112$ при $a \in [0; 45]$

$b \le 8 + \frac{4}{3}a$ при $a \in [45; +\infty)$

~~при $a <$~~ 2') $a < 0$

$$\begin{cases} b \ge 2a \\ b \le 8 + \frac{4}{3}a \\ b \le 4a - 112 \end{cases}$$

таких b нет, ведь по графику 1 видно, что

$b \ge 2a > \min(8 + \frac{4}{3}a, 4a - 112) \ge b$

противоречие, таких нет.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) $\begin{cases} \frac{b}{a} \le 2 \\ 8+\frac{4}{3}a \ge b \\ 93 < a \end{cases}$

тогда $a>0$ и $b \le 2\cdot a$

$\begin{cases} b \le 2\cdot a \\ 93 < a \\ 8+\frac{4}{3}a \ge b \end{cases}$

$\min(8+\frac{4}{3}a,\ 2a) = 8+\frac{4}{3}a$ при $a>93$

так что $a>93$

$b \le 8+\frac{4}{3}a$

3) $\begin{cases} \frac{b}{a} \le 2 \\ 112-4a \le b \\ a < -3 \end{cases}$

а.т.е.

$b \ge 2a$

$4a-112 \ge b \ge 2a$

~~в условиях~~

при $a < -3$

$4a - 112 < 2a$, т.е.

b - несуществует.

4) $\begin{cases} \frac{b}{a} \le 2 \\ a \le -3 \\ 93 \le a \end{cases}$

противоречие $93 < a < -3$.

Ответ: ~~при $a \in [45; +\infty)$~~

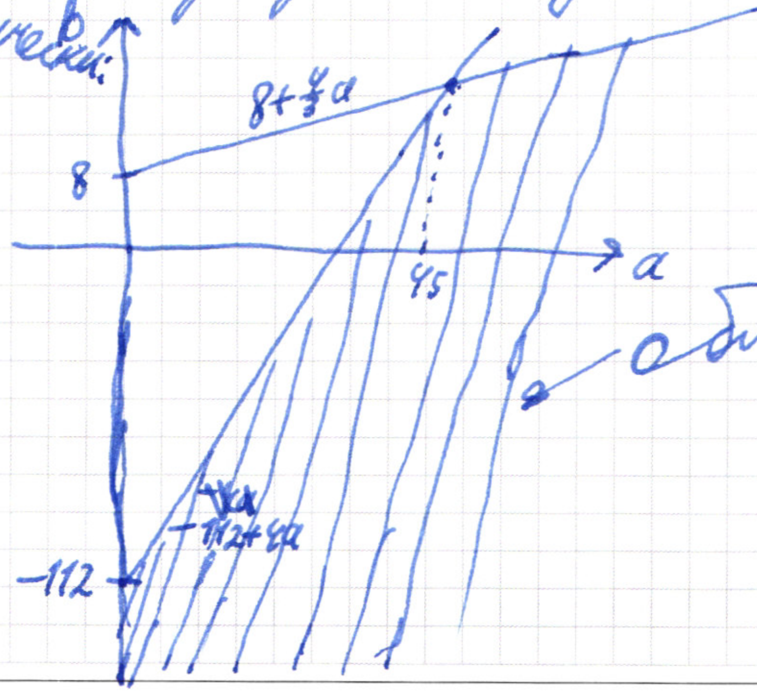
при $a \in [0; 45)$ $b \in (-\infty; 4a-112]$

~~при $a \in (45; +\infty)$ $b \in$~~

при $a \in [45; +\infty)$ $b \in (-\infty; 8 + \frac{4}{5}a]$

при $a (-\infty; 0)$ - ~~ответа~~ b - несуществует.

Графически:



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

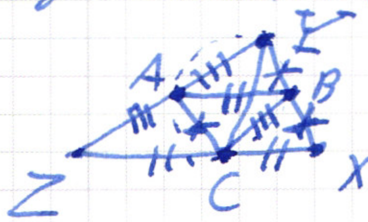
№ 7

Дано:

Найти:
~~X~~ XZ – ?
r_{min} – ?

$YX = \sqrt{3}$ $ZY = b$
$TX = \sqrt{2}$ $XZ = a$
$TZ = 2$

Нахождение:



так как Y, A, B, C вписанный, то $\angle AYC = \angle ABC = \angle AZC$, ведь $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$ (подобен) ~~око~~ с коэффициентом ~~1~~ 1:2.

т.е. $\angle AYC = \angle AZC$, значит $YC = ZC = CX$, т.е. $\angle ZYX = 90°$.

если $\angle ZYX = 90°$, то $YABC$ вписанный, ведь $\angle ACB = 90°$.

тогда $b^2 + (\sqrt{3})^2 = a^2$ по Теореме

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Пефагора