МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам
$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$
Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство
$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство
$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$
выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$;

Воспользуемся для II-го выражения формулой
$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$;

По условию $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$;
Получаем;

$$-\frac{2}{\sqrt{5}}\cos 2\beta = -\frac{4}{5};$$

$$\cos 2\beta = \frac{4\sqrt{5}}{2\cdot 5} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Запишем для первого выражения формулу синуса суммы;

$$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta - \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}};$$

Мы можем найти из основного тригонометрического тождества модуль $\sin 2\beta$ (это $\frac{\sqrt{5}}{5}$). Рассмотрим 2 возможных случая;

1) $\sin 2\beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$.
Получаем;

$$\frac{2\sqrt{5}}{5}\sin 2\alpha - \frac{\sqrt{5}}{5}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Умножим обе части на $\sqrt{5}$;

$2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1.$

Возведём обе части в квадрат:

$4\sin^2 2\alpha - 4\sin 2\alpha\cos 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1;$

$3\sin^2 2\alpha - 4\sin 2\alpha\cos 2\alpha = 0;$ (Делим на $\cos^2 2\alpha$ (оно не 0)).

$3\operatorname{tg}^2 2\alpha - 4\operatorname{tg} 2\alpha = 0;$

$\operatorname{tg} 2\alpha(3\operatorname{tg} 2\alpha - 4) = 0;$

$\operatorname{tg} 2\alpha = 0$

$\operatorname{tg}\alpha$ не сущ.

$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{4}{3}$

$\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}\alpha = -2;\\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2};\end{array}\right.$

2) $\sin 2\beta = -\frac{\sqrt{5}}{5};$

$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1;$

$4\sin^2 2\alpha + 4\sin 2\alpha\cos 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1;$

$3\sin^2 2\alpha + 4\sin 2\alpha\cos 2\alpha = 0;$

$3\operatorname{tg}^2 2\alpha + 4\operatorname{tg} 2\alpha = 0;$

$\operatorname{tg} 2\alpha(3\operatorname{tg} 2\alpha + 4) = 0;$

$\operatorname{tg} 2\alpha = 0;$

$\operatorname{tg}\alpha$ – не сущ.

$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{4}{3};$

$\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2};\\ \operatorname{tg}\alpha = 2;\end{array}\right.$

Ответ: $\pm 2; \pm\frac{1}{2}.$

2. $\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2} \\ x^2 + 8y^2 - 4x - 8y = 12; \end{cases}$ ОДЗ: $x - 2y \geq 0;$ $xy - x - 2y + 2 \geq 0;$ $x \geq 2y;$

Произведём следующие преобразования: розложим и множим выражение под корнем, свернём слага-

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 2
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

сМве 2-го выражения по формуле полного квадрата с прилож 2-у как $(x-2)-2(y-1)$;

$$\begin{cases}(x-2)-2(y-1)=\sqrt{(x-2)(y-1)};\\(x-2)^2+8(y-1)^2=25;\end{cases}$$

Заменим $x-2$ за m, $y-1$ за p. Получим:

$$\begin{cases}m-2p=\sqrt{mp}\ (1);\quad mp\geq 0;\\m\cdot m+8p\cdot p=25;\ (2)\end{cases}$$

(1): $m-2p=\sqrt{mp}$;

$m\cdot m-4mp+4p^2=mp$;

$m^2-5mp+4p^2=0$;

Сумма коэф $=0$;

$$\left[\begin{array}{l}m=4p;\\m=p;\end{array}\right.$$

(2): $m=4p$; $8pp+m\cdot m=25$;

$8p^2+16p^2=25$;

$p^2\cdot 25=25$;

$p^2=25:25=1$;

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m=4;\\p=1;\end{cases}\\\begin{cases}m=-4;\\p=-1;\end{cases}\end{array}\right.$$

$m=p$; $8p^2+m^2=25$;

$10p^2=25$;

$p^2=\frac{5}{2}$;

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}p=\sqrt{\frac{5}{2}};\\m=\sqrt{\frac{5}{2}};\end{cases}\\\begin{cases}p=-\sqrt{\frac{5}{2}};\\m=-\sqrt{\frac{5}{2}};\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x-2=4;\\y-1=1;\end{array}\right.$$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$\begin{cases} x-2=-4; \\ y-1=-1; \end{cases}$

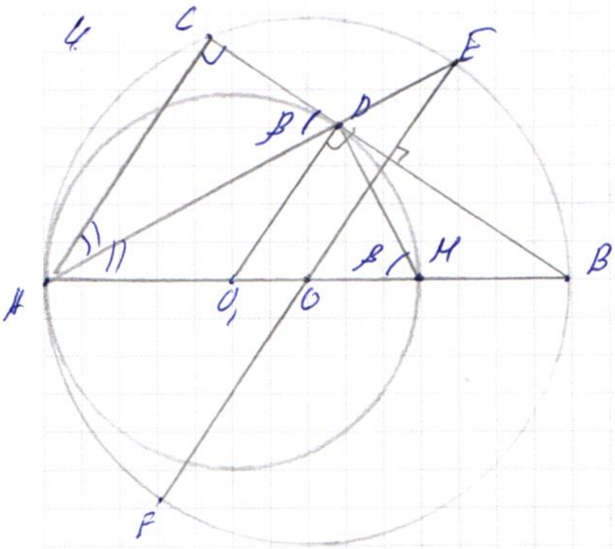
$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=6; \\ y=2; \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2; \\ y=0; \end{cases} \text{ — не вх. в ОДЗ.} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x = 2+\sqrt{\frac{5}{2}}; \\ y = 1+\sqrt{\frac{5}{2}}; \end{array}\right.$ — не вх. в ОДЗ

$\left[\begin{array}{l} x = 2-\sqrt{\frac{5}{2}}; \\ y = 1+\sqrt{\frac{5}{2}}; \end{array}\right.$

Ответ: $(6; 2)$; $\left(2-\sqrt{\frac{5}{2}}; 1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$.

4.



$CD = 8$; $BD = 17$.

Пусть O — центр большой окружн., O_1 — центр малой окружности. Пусть BA повторно пересекает малую окружность в точке H.

$\triangle HAD$:

$\angle HDA = 90°$ (опирается на диаметр).

$\angle AHD = \angle CDA$ (по по св-ву угла между касательной и секущей).

$\angle HAD = 90° - \beta$ (по теореме о сумме углов треугольника).

$\triangle CAD$.

$\angle ACD = 90°$ (опирается на диаметр BA).

$\angle CAD = 90° - \beta$ (по теореме о сумме углов треугольника).

$\angle CAD = \angle BAD$.

AD — биссектриса $\angle CAB$.

По св-ву биссектрисы:

$\frac{BA}{CA} = \frac{BD}{CD} = \frac{17}{8}$.

Пусть $BA = 17x$, $CA = 8x$;

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\triangle BCK$

(по теореме Пифагора)

$BC^2 + CK^2 = BK^2$;

$64m \cdot n + 25^2 = 289 m \cdot n$;

$25^2 = 225 m \cdot n$;

$25 = 15n$;

$n = \frac{5}{3}$.

$BA = 2R = 17m = \frac{17 \cdot 5}{3} = \frac{85}{3}$; Пусть R - радиус бол., r - малой окр.

$R = \frac{85}{6}$.

$\triangle$ $O_1D \perp CK$ (составленная равные для CBC)

$\triangle BO_1D \sim \triangle BAC$.

Заметим, что $OO_1 = R - r$ (т.к. окружности касаются).

$\frac{BO_1}{BA} = \frac{BD}{BC}$;

$\frac{R + R - r}{2R} = \frac{17}{25}$;

$50R - 25r = 34R$;

$16R = 25r$;

$r = \frac{16}{25} R = \frac{16}{25} \cdot \frac{85}{6} = \frac{8 \cdot 17}{5 \cdot 3} = \frac{136}{15}$.

$\triangle EOK$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$EO = OA = R$;

$\Rightarrow \Delta EOA$ – равнобедренный;

$\angle OAE = OEA$;

ΔFAE.

FE – диаметр большой окружности (прямая EO гомотетична прямой O_1D при гомотетии с центром в A).

$\angle FAE = 90^\circ$;

$\angle AFE = 90^\circ - \angle OEA$ (по теореме о сумме углов треугольника).

ΔCAD.

$$\operatorname{tg} CAD = \frac{CD}{CA} = \frac{8}{8\pi} = \frac{3}{5};$$

$$\angle CAD = \operatorname{arctg} \frac{3}{5};$$

$$\angle AFE = 90^\circ - \operatorname{arctg} \frac{3}{5} = \operatorname{arcctg} \frac{3}{5}.$$

$$\operatorname{tg} AEF = \frac{FA}{EA} = \frac{3}{5};$$

Пусть $FA = 3p$; $EA = 5p$;

По теореме Пифагора;

$$FA^2 + EA^2 = FE^2;$$

$$9p \cdot p + 25p \cdot p = 4R^2;$$

$$36p \cdot p = 4R^2;$$

$$p = \sqrt{\frac{4}{36} R^2} = \frac{R}{3} = \frac{85}{18};$$

$$S_{AFE} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot FA = \frac{1}{2} \cdot 3p \cdot 5p = \frac{15}{2} \cdot p = \frac{15}{2} \cdot \frac{85}{18} =$$

$$= \frac{425}{38}.$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Отв: $R=\frac{85}{6}$; $r=\frac{136}{15}$; $\angle ABC = \arccos\frac{3}{5}$; $S=\frac{425}{8}$.

5. Заметим, что можно получить значение $f(x)$ для x всех $1 \le x \le 24$. Можно получить значение $f(1)$, учитывая что $x=x\cdot 1$:

$f(x\cdot 1) = f(x) = f(x) + f(1)$;

$f(1)=0$.

Кроме того можно получить $f(x)$ для всех простых x ($f(x)=\left[\frac{x}{4}\right]$; $f(2)=0$; $f(3)=0$; $f(5)=1$...), и любое составное число можно представить как произведение простых чисел $f(xyz)=f(x)+f(y)+f(z)$.

Заметим, что $f(1)=0=f(x\cdot\frac{1}{x})=f(x)+f(\frac{1}{x})$;

$f(\frac{1}{x})=-f(x)$.

Значит функция $f(\frac{x}{y}) = f(x)-f(y)$. Если проделаем указанную выше операцию получим:

$f(1)=0$; $f(2)=0$; $f(3)=0$; $f(4)=0$; $f(5)=1$; $f(6)=0$; $f(7)=1$; $f(8)=0$; $f(9)=0$; $f(10)=0$; $f(11)=2$; $f(12)=0$; $f(13)=3$; $f(14)=1$; $f(15)=1$; $f(16)=0$; $f(17)=4$; $f(18)=0$; $f(19)=4$; $f(20)=1$; $f(21)=1$; $f(22)=2$; $f(23)=5$; $f(24)=0$.

Будем выбирать $f(y)>0$ и $f(x)<f(y)$, ведь нас интересует $f(\frac{x}{y})<0$.

$f(y)=1$: 6 чисел; $f(x)=0$: 12 чисел; $6\cdot 12=72$ способа

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$s(y)=2$ $\quad s(z) = k \ldots 0..1$ $\quad 2\cdot 18 = 36$ способов.

2 ч-ла $\quad 2+16=18$ ч.

$s(y)=3$ $\quad s(z) = 0..2$ $\quad$ 20 способов

1 ч. $\quad 18+2=20$ ч.

$s(y)=4$ $\quad s(z) = 0..3$ $\quad$ 42 способа

2 ч-ла $\quad$ 21 ч.

$s(y)=5$ $\quad s(z) = 0..4$ $\quad$ 23 способа.

1 ч. $\quad$ 23 ч.

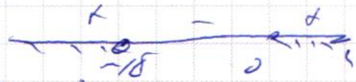
$23+42+20+36+72 = 193$ способа.

Отв: 193 способа.

3. $5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13} - 18x$;

ОДЗ: $x^2+18x > 0$;

$x(x+18) > 0$;



$x \in (-\infty; -18) \cup (0; +\infty)$.

Тогда с учётом ОДЗ можно раскрыть модули.

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2+18x \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}$;

$(x^2+18x)^{\log_{12}5} + x^2+18x \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}$;

$(x^2+18x)^{\log_{12}5} + x^2+18x \geq (x^2+18x)^{\log_{12}12 + \log_{12}\frac{13}{12}}$

$(x^2+18x)^{\log_{12}5} + x^2+18x \geq (x^2+18x)\,(x^2+18x)^{\log_{12}\frac{13}{12}}$;

С учётом ОДЗ можно поделить обе части на (x^2+18x);

$(x^2+18x)^{\log_{12}\frac{5}{12}} + 1 \geq (x^2+18x)^{\log_{12}\frac{13}{12}}$;

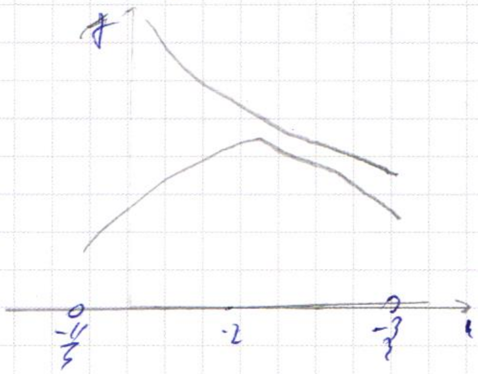
$(x^2+18x)^{\log_{12}\frac{5}{12}} + 1 \geq (x^2+18x)^{\log_{12}\frac{5}{12} + \log_{12}\frac{13}{5}}$

$(x^2+18x)^{\log_{12}\frac{5}{12}} + 1 \geq (x^2+18x)^{\log_{12}\frac{5}{12}} \cdot (x^2+18x)^{\log_{12}\frac{13}{5}}$;

$1 \geq (x^2+18x)^{\log_{12}\frac{5}{12}}\left((x^2+18x)^{\log_{12}\frac{13}{5}} - 1\right)$;

6. $\frac{3x^2+12x+11}{x+3}$, $\frac{12x+8+11}{8x+3}$, $3+\frac{2}{x+3}$ – графи обратной пропорциональности, убывает на указанном интервале.

$f(x) = -8x^2+32x-17$ ~~граф~~ квадратичная функция ветви направлены вниз, на указанном интервале ~~возрастает~~ $x_в = -\frac{15}{8}$, расположена около середины интервала.



$y = ax+b$ – прямая.

$a < 0$;

$y_в$ при $= -\frac{8}{4}$; $= \frac{-88}{-32}$; $\frac{88}{32}$;

$\frac{88}{32}$

Если прямая – касательная парабол

$a = f'(x)$

$f'(x) = -16x - 32$;

$x = -\frac{15}{8}$;

$\frac{16 \cdot 15}{8} - 32 = 0$;

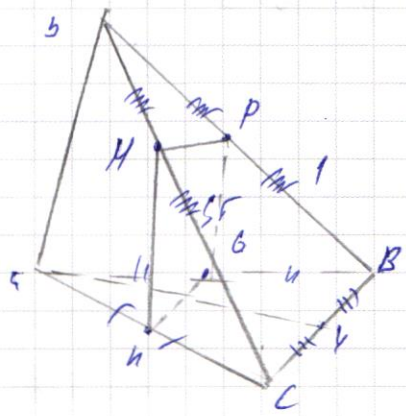
Если нет

$(a=0)$ $b = \frac{88}{32}$.

(4) $(0; \frac{88}{32})$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7



НР64 – параллелограмм! Смотря-

лит в ~~Н на плоскость~~.

попарно равны!;

Заметим, что

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

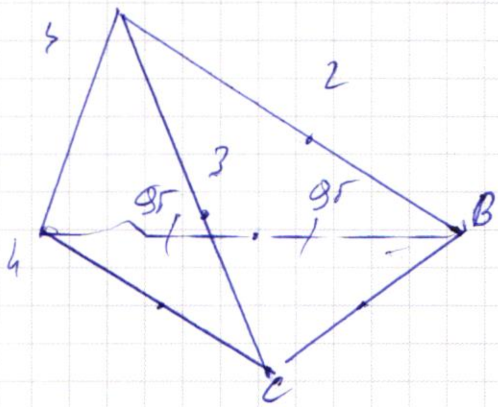
ШИФР

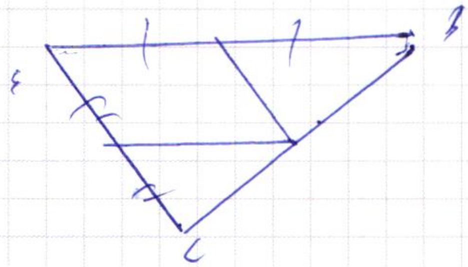
(заполняется секретарём)

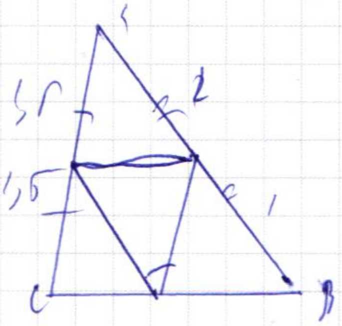
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

12 $n^{\log_n \frac{13}{4}} - n^{\log_n \frac{5}{2}}$, $n^{\log_n \frac{8}{2}} / (n^{\log_2 \frac{2}{3}} - 1)$

$\log_n \frac{13}{2}$, $\log_n \frac{8}{2} + \log_n \frac{13}{\cancel{60}5}$.







ι_0 ? $-\frac{6}{4}, \frac{22}{-16}, -\frac{11}{8}$.

$-\frac{6}{4}, \frac{22}{32}$,

$\frac{28}{32}$.

$3+\frac{2}{3-8}, \quad 3+\frac{2}{-5}, \quad \frac{13}{5}$.

$3+\frac{2}{3-x}, \quad -2=1$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$;

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$;

$x^2-4x+4-4+9(y^2-2y+1)-9=(x-2)^2+9(y-1)^2-13$;

$\cancel{\sin\alpha+\sin\beta} = \sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)$;

$= \sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha+\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha = 2\sin\alpha\cos\beta$

$\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta) = \frac{?}{2}$

$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))$;

$\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$;

$\sin\alpha+\sin\beta = 2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta-\alpha}{2}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta) = -\frac{4}{5}$

$\cos 2\beta = \frac{-4}{5\cdot 2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)} = \frac{2}{5\cdot 1}\cdot\sqrt{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

2. $\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2} = \sqrt{x(y-1)-2(y-1)} = \sqrt{(x-2)(y-1)} \\ x^2-4x+4+9(y^2-2y+1)-1=0 \end{cases}$

$(x-2)^2+9(y-1)^2=1$

$x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)}$

$x^2-4x+4+9(y^2-2y+1)$,

$= x^2-4x+4+9y^2-18y+9$

$=13$

3. $5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}-18x$

$m=x^2+18x$; $m>0$

$5^{\log_{12}m}+m \geq m^{\log_{12}13}$

$5=12^{\log_{12}5}$;

$m^{\log_{12}5}+m \geq m^{\log_{12}13}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

8. $f(ab)=f(a)+f(b)$;

$f(p)=\left[\frac{p}{4}\right]$.

$1\le x\le 24$;

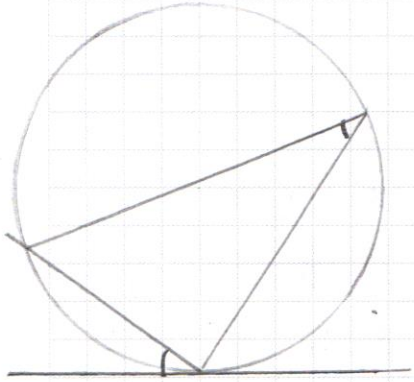
$1\le y\le 24$;

$f(x/y)<0$;

$f(0)=f(0)+f(b)$;

$f(b)=0$;

$f(b)$



$f(2)=0$;

$f(2b)=0+f(b)$;

$f(3)=0$;

$f(b)=f(2b)$;

$f(4)=0$ $\quad$ ~~$f(5)=1$;~~

$f(5)=1$

$f(3b)=f(3)+f(b)$;

$f(6)=0$

$f(7)=1$

$f(b)=f(3b)$;

$f(8)=0$ $\quad$ $f(9)=0$; $\quad$ $f(10)=0$;

$f(11)=2$;

$f(12)=0$

$f(13)=3$;

$f(14)=1$ $\quad$ $f(15)=1$; $\quad$ $f(16)=0$;

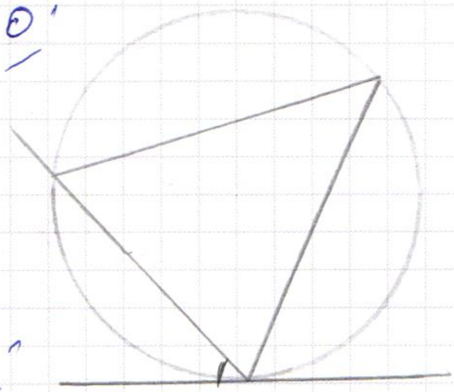
$f(17)=4$

$f(18)=0$

$f(19)=4$;

$f(20)$

$f(23)=5$;



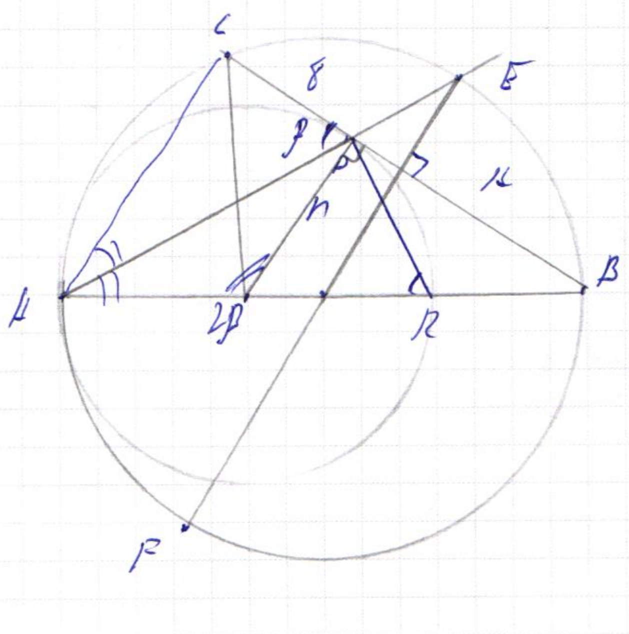
6. $\frac{12x+11}{4x+3}\le ax+b\le -8x^2-30x-17$;

$-8x^2-30x-17=-(8x^2+30x+17)=0$;

$225-4\cdot 8\cdot 17$

$x_0=-\frac{b}{2a}=\frac{-30}{16}=-\frac{15}{8}$

$k^2+p^2=17^2$;



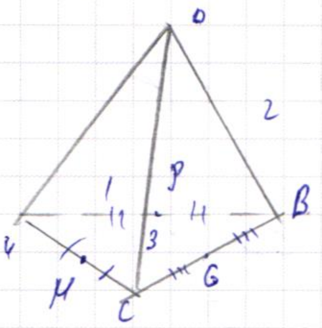
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

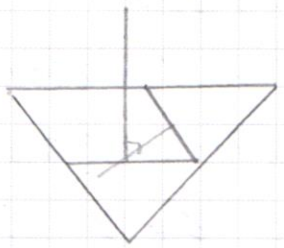
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$f(ab) = f(a) + f(b)$;

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$;

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f\left(\frac{1}{y}\right) = f(1)$

$\frac{12+11}{4+3}$, $\frac{12+8+2}{4+3}$, $3 + \frac{2}{4+3}$ При $\sin 2\beta$ $\sqrt{1-\frac{20}{25}}$

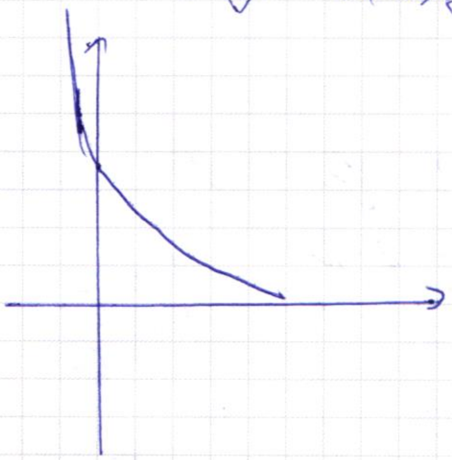
$\cos 2\beta = \frac{2\sqrt5}{5}$, $= \frac{\sqrt5}{5}$.

$\cos 4\beta = \cos^2 2\beta - \sin^2 2\beta$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = \sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\beta \sin 2\alpha$

$(x-2)^2 + 8(y-1)^2 = 1$;

$x - y = \sqrt{(x-2)(y-1)}$



$f(a) + f(b) = f(ab)$;

$y = 1$;

$f(b) = 0 + f(b) < 0$;

При $b \in N$ $f(b) \geq 0$;

$f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) + f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(2) + f\left(\frac{3}{2}\right)$

$2\sin(2\alpha + 2\beta)\cos 2\beta = -\frac{3}{5}$;

$\cos 2\beta = -\frac{3}{5 \cdot 12 \cdot 1 / \beta}$

$\sin(2\alpha + 2\beta)$

$= \sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$; $\frac{1 \cdot 2}{5\sqrt5} \cdot \frac{\sqrt5}{1}$ $\frac{2\sqrt5}{5}$.

$\sin 2\alpha \cdot \frac{2\sqrt5}{5} + \cancel{\sin 2\beta} \cdot \frac{\sqrt5}{5}$ $\frac{\sqrt5}{5} \cos 2\alpha$ $\frac{7}{\sqrt5}$.

$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$;

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\cos 2x \quad 1 - 2\sin 2x)$

$|\cos 2x| = \sqrt{1-\sin^2 2x}$;

$\sin 2x \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} + \cos 2x \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

$2\sin 2x + \cos 2x = -1$;

$\cos 2x + 1 = -2\sin 2x = -2\sqrt{1-\cos^2 x}$;

$\frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}$,

$\cancel{\cos^2 2x + 2\cos 2x}$

$1 + \cancel{2\cos}$

$4\sin^2 2x + 4\cos 2x \sin 2x + \cos^2 2x = 1$;

$3\sin^2 2x + 2\sin 2x - 2 = 0$;

$4 + 4 \cdot 2 \cdot 3, \quad 4 + 24 = 28$;

$\cancel{x^2+18x}$ ОДЗ: $x^2+18x > 0$;

$x^2+18x + (x^2+18x)^{\log_{12} 5} \geq (x^2+18x)^{\log_{12} 13}$;

$1 + (x^2+18x)^{\log_{12} 5 - 1} \geq (x^2+18x)^{\log_{12} 13 - 1}$;

Пусть $f(b) < 0$;

$f(ab) = f(a) + f(b)$;

$\frac{\cos 3x - 1}{\sin 2x + 4 - \cos x}$ При $f(a) < |f(b)|$;

$\frac{2\cos x}{2\sin}$

4. При $(x-2) = m \quad y+1 = p$;

$x - 2y = m - 2 \cdot p$;

$\begin{cases} m - 2\cdot p = \sqrt{mp}; \\ m \cdot m + 9 p \cdot p = 1; \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} m = p; \\ m = 4p; \end{array}\right.$

$p \cdot p + 9p \cdot p = 1$;

$m \cdot m + 18 p \cdot p$ $16 p \cdot p + 9 p \cdot p = 1$;

$p \cdot p = \frac{1}{10}$; $m \cdot m - 4mp + 4p \cdot p = mp$; $20 p \cdot p = 1$;

$p = \frac{1}{\sqrt{10}}$ $m \cdot m - 5mp + 4p \cdot p = 0$; $p \cdot p = \frac{1}{20}$ $p = \frac{\sqrt{5}}{10}$;

делим на $\ldots$; $(m-4p)(m-p) = 0$;

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\begin{cases} y-1=p \\ x-2=m \end{cases}$ $\begin{cases} y-1=\frac{1}{8} \\ x-2=\frac{1}{8} \end{cases}$ $y-1=\frac{6}{8}$, $x-2=\frac{6}{8}\cdot tg\,t$

$\frac{2+2\sqrt{1+m\cdot m}}{1-(1+2+m\cdot m+2\sqrt{1+m\cdot m})}=\frac{2(1+\sqrt{1+m\cdot m})}{1+m\cdot m+2\sqrt{1+m\cdot m}}$ $\begin{cases} y=\frac{14}{8} \\ x=\frac{21}{8} \end{cases}$ $\begin{cases} y=\frac{6}{8} \\ x=\frac{14}{8} \end{cases}$

$tg\,2t=\frac{\sin 2t\cos}{\cos 2t}=\frac{2\sin t\cos t}{\cos^2 t-\sin^2 t}$

$\sin 2t\cdot\frac{2\sqrt{8}}{8}+\cos 2t\cdot\frac{\sqrt{8}}{8}=-\frac{1}{8}$

$2\sin 2t+\cos 2t=-1$

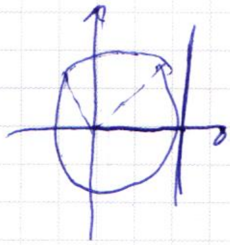
$4\sin^2 2t+4\sin 2t\cos 2t+\cos^2 t=1$

$3\sin^2 2t+2\sin 2t\cos 2t=0$

$3tg^2 2t+2tg\,2t=0$

$tg\,2t(3tg\,2t-2)=0$

$\frac{2-2\sqrt{1+m\cdot m}}{1-(1-2\sqrt{1+m\cdot m}+1+m\cdot m)}=\frac{2-2\sqrt{1+m\cdot m}}{-1-2\sqrt{1+m\cdot m}}$



$tg\,2t=0$

$3tg\,2t=2$

$tg\,2t=\frac{2tg\,t}{1-tg^2 t}$ $\quad tg\,t=$

$tg\,2t=\frac{2tg\,t}{1-tg^2 t}$

$m-m\,tg^2 t=2tg\,t$

$tg\,2t-tg\,2t\cdot tg^2 t=$

$m-m\,tg^2 t=2tg\,t$

$m\,tg^2 t+2tg\,t-m=0$

$m\,tg^2 t+2tg\,t-m=0$

$\sqrt{4+4\cdot m\cdot m}=2\sqrt{m\cdot m+1}$

$4=\sqrt{1+m\cdot m}$

$tg\,t=1-\sqrt{m\cdot m+1}$

$\frac{2-2\sqrt{m\cdot m+1}}{1-(m\cdot m+1)}$

$\begin{cases} tg\,t=1-\sqrt{1+m\cdot m} \\ tg\,t=1+\sqrt{1+m\cdot m} \end{cases}$

$tg\,t=1+\sqrt{m\cdot m+1}$

$-(2\sqrt{m\cdot m+1}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$tg\,2\alpha = \cancel{\ldots}\ \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$;

$\frac{4}{3} - \frac{4}{3}tg^2\alpha = 2tg\alpha$;

$4 - 4tg^2\alpha = 6tg\alpha$;

$4tg^2\alpha + 6tg\alpha - 4 = 0$;

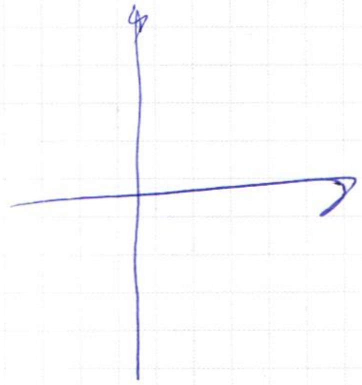
$9 + 16 = 25$;

$\left[\begin{array}{l} tg\alpha = \frac{-3-5}{4} = -2; \\ tg\alpha = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}; \end{array}\right.$

$\sin 2\alpha = tg\,2\alpha \cdot \cos 2\alpha$;

$\sin^2\alpha = tg^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$;

$1 = (tg^2\alpha + 1)\cos^2\alpha$;



$-\frac{4}{3} = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$;

$-4 + 4tg^2\alpha = 6tg\alpha$;

$4tg^2\alpha - 6tg\alpha - 4 = 0$;

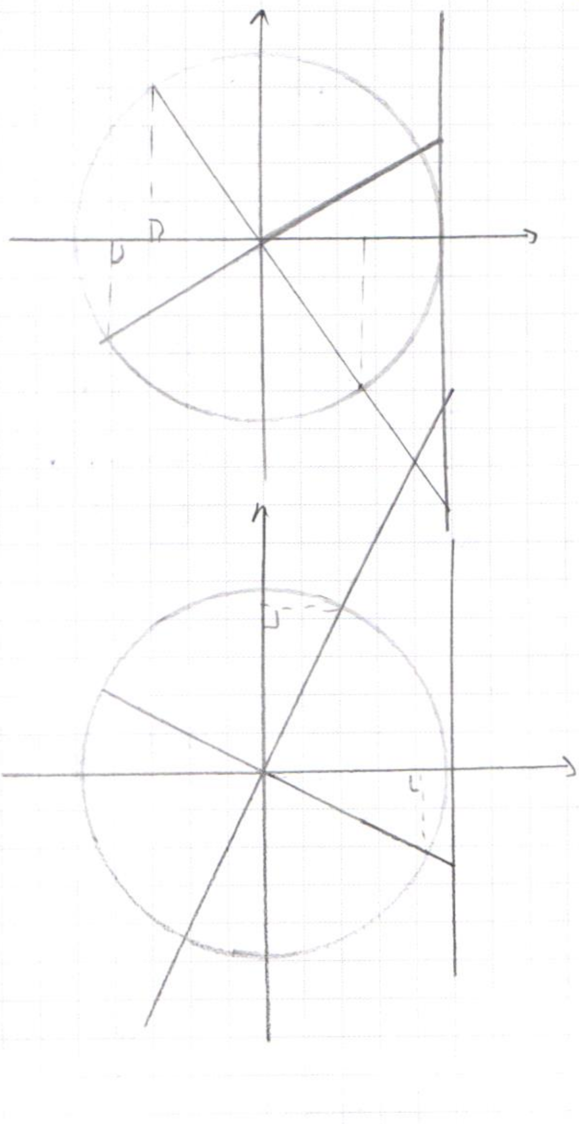
$36 + 16\cdot 4 = 100$;

$tg\alpha = \frac{6-10}{8} = -\frac{1}{2}$;

$tg\alpha = \frac{6+10}{8} = 2$;

$\frac{-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{16}}$; $\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{15}{16}}$; $-\frac{16}{2\cdot 15}$ $-\frac{8}{15}$;

$\frac{-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}$, $\frac{-1}{2-\frac{1}{2}}$, $-\frac{4}{3}$.



☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$5 = 12^{\log_{12} 5}$

$12^{\log_{12} 5} + 12 \geq 12^{\log_{12} 13}$

$12(1 + 12^{\log_{12} 5 - 1}) \geq 12^{\log_{12} 13}$

$1 + 12^{\log_{12} 5 - 1} \geq 12^{\log_{12} 13 - 1}$

$1 \geq 12^{\log_{12} 5 - 1}(12^{\log_{12} 13 - \log_{12} 5} - 1)$

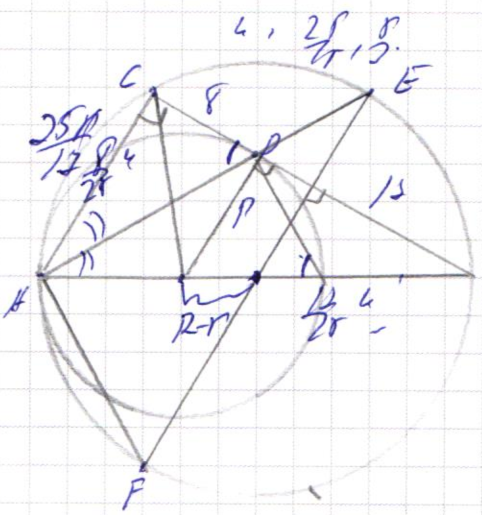
$(2R-r)^2 + r^2, \quad 4R^2 - 4Rr + r^2 + r^2 = 17^2$

$4R(R-r) = 17^2$

$4R^2 = (8 \cdot 17)^2 + \frac{25 \cdot 25}{13^2}$

$225k^2 = (25)^2$

$k = 25$



$64k^2 + (8 \cdot 17)^2 = 289k^2$

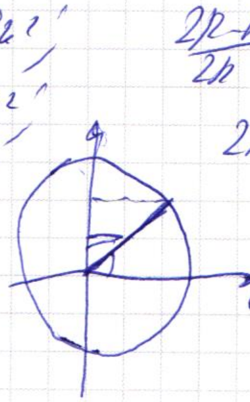
$(8 \cdot 17)^2 = 225k^2$

$15k = 8 \cdot 17$

$k = \frac{8 \cdot 17}{15}$

$\frac{2R-r}{2R} = \frac{17}{25}$

$2R = \frac{25}{17}(2R - r)$



$\frac{289}{625} \cdot 4R^2 = r^2$

$8 \cdot 17 \quad \frac{5}{3} \cdot 17 \cdot \frac{8}{3} - 8$

$8 \cdot 17(1 - \frac{25}{3})$

$\frac{16}{5} = 8 \cdot 13$

$\frac{5}{3}\sqrt{8 \cdot 17}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

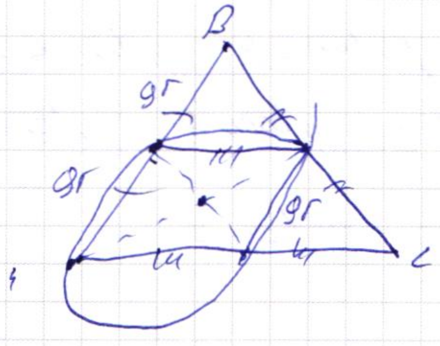
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

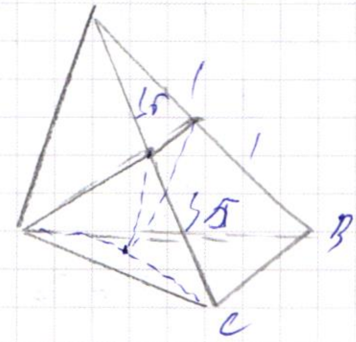
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

8

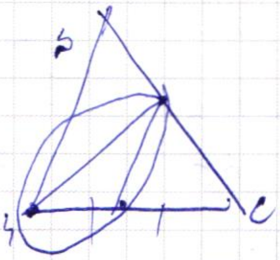




$8 \cdot 32 + 1710$

$225 - 4 \cdot 8$ 17

32
17
221



$\frac{3(4t+13)+2}{4t+13}$, $3+\frac{2}{4t+13} \le a t + b$

$t = -\frac{11}{3}$ $at + \frac{2}{4t+13} \ge 3-b$

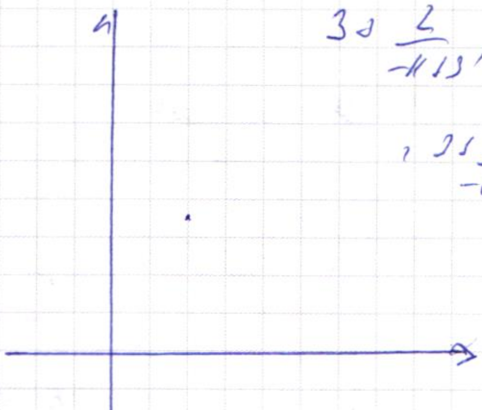
$4at^2 + 3at + 2 \ge (3-b)(4t+13)$

$4at^2 + 3at + 2 \ge 12t - 4bt + 39 - 13b$

$f\left(\frac{1}{2}\right) + f(2) = f(1)$

$f\left(\frac{1}{4}\right) = f(1) - f(4)$

$f\left(\frac{1}{7}\right) = -1$



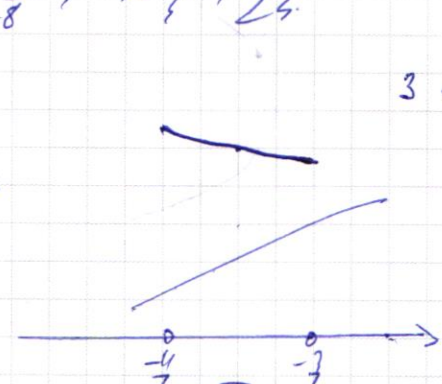
$3 + \frac{2}{-11+13}$

72
42
114
36
156

$= 3 + \frac{2}{-8}$, $3 - \frac{1}{4}$, $2\frac{3}{4}$

32
78
23

$3 + \frac{2}{-7+3}$, $3 - \frac{1}{2}$



☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$5^{\log_n n} + n \geq n^{\log_n 13}$;

$(n^{\log_n 5})^{\log_n n} + n \geq n^{\log_n 13}$;

$n^{\log_n 5} + n \geq n^{\log_n 13}$;

$n(n^{\log_n 5} + 1) \geq n^{\log_n n}$ $n \geq n^{\log_n 5}(n^{\log_n \frac{13}{5}} - 1)$;

$8x - 8x - 17$, $1 \geq n^{\log_n \frac{5}{n}}(n^{\log_n \frac{13}{5}} - 1)$;

$8x - 8x \cdot 1$; $n^0 \geq n^{\log_n \frac{5}{n}} \cdot (n^{\log_n \frac{13}{5}} - 1)$;

$\frac{-12+11}{-4\cdot 3}$, 1; $n \geq n^{\log_n 13}$ +

$-8 + 30 - 13$ $-8x^2 + 30x - 17$

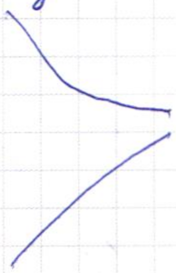
$8x - 25 \cdot 5$ $8x^2 + 30x + 16$) 225 $\begin{array}{r}17\\ \times 8\\ \hline 136\end{array}$

$225 - 8 \cdot 17$ $101 - 8 \cdot 13$ $225 - 136$

$\frac{12 - \sqrt{89}}{8}$; $\frac{12 + \sqrt{89}}{8}$ $900 - 4 \cdot 17 \cdot 8$ 89; $\begin{array}{r}17\\ \times 8\\ \hline 136\end{array}$

$-30 - \sqrt{89}$

$\frac{-12}{4}$, $\frac{-\sqrt{89}}{-32}$, $\frac{89}{32}$ $\begin{array}{r}17\\ \times 17\\ \hline 289\end{array}$



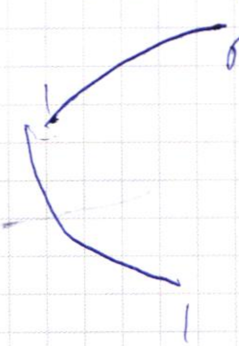
$\begin{array}{r}15\\ 225\\ -136\\ \hline 89\end{array}$

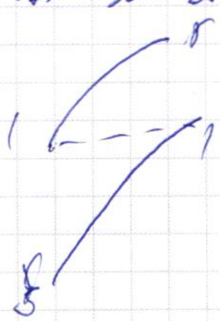
$\frac{-36+4}{-12 \cdot 3}$, $\frac{-32}{-9}$, $\frac{32}{9}$, $3\frac{5}{9}$.

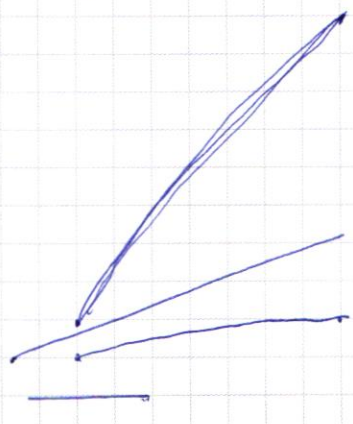
$\sqrt{89}$

$-8 \cdot 9 + 30 - 17$

$8x - 8x - 17$, $8x - 8x \cdot 1$







$an + 5 \geq -8x^2 + 30x + 17$

$an + 5 \leq -8x^2$