МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N2

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)-2(y-1)=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \quad (1) \\ a^2+9b^2=25 \quad (2) \\ a=x-2 \\ b=y-1 \end{cases} \qquad (1) \Leftrightarrow a-2b=\sqrt{ab} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-4ab+b^2=ab \\ a-2b\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-5ab+b^2=0 \\ a-2b\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=4b \\ a=b \end{array}\right. \\ a-2b\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=4b \\ b\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a=b \\ b\leq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

~~Возвращаемся к изнач. системе~~ подставим а в ур-е (2)

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=4b \\ 16b^2+9b^2=25 \\ b\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a=b \\ b^2+9b^2=25 \\ b\leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=4b \\ b=1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=b \\ b=-\sqrt{\frac{25}{10}} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-2=4 \\ y-1=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x-2=-\sqrt{\frac{5}{2}} \\ y-1=-\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases} \; \begin{cases} x=2-\sqrt{\frac{5}{2}} \\ y=1-\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases}$$

Ответ: $(6;2)$ и ~~$\left(2-\sqrt{\frac{5}{2}};\ 1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$~~ $\left(2-\sqrt{\frac{5}{2}};\ 1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$

N5

$f(ab)=f(a)+f(b)$, Тогда $f(2\cdot b)=f(2)+f(b)$, $f(2)=\left[\frac{2}{4}\right]=0$

$f(2b)=f(b)$, $f(3\cdot b)=f(3)+f(b)$, $f(3)=\left[\frac{3}{4}\right]=0$

$f(1\cdot b)=f(1)+f(b) \Rightarrow f(1)=0$ $\qquad f(3b)=f(b)$

Пользуясь полученными результатами найдем значение $f(c)$, $c\in\mathbb{N}$, $c\leq 24$

$f(1)=0$, $f(2)=0$, $f(3)=0$, $f(4)=f(2\cdot 2)=0$, $f(5)=\left[\frac{5}{4}\right]=1$, $f(6)=f(3\cdot 2)=0$,
$f(7)=\left[\frac{7}{4}\right]=1$, $f(8)=0$, $f(9)=0$, $f(10)=1$, $f(11)=\left[\frac{11}{4}\right]=2$, $f(12)=0$, $f(13)=3$, $f(14)=1$
$f(15)=1$, $f(16)=0$, $f(17)=4$, $f(18)=0$, $f(19)=4$, $f(20)=1$, $f(21)=1$, $f(22)=2$, $f(23)=5$, $f(24)=0$

Заметим, что $f\left(\frac{1}{k}\right)=-f(k)$, т.к. $f\left(k\cdot\frac{1}{k}\right)=f(k)+f\left(\frac{1}{k}\right) \Leftrightarrow f(1)=f(k)+f\left(\frac{1}{k}\right) \Leftrightarrow 0=f(k)+f\left(\frac{1}{k}\right)$

$$f(x/y) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y)$$

$$f(x/y) < 0 \iff f(x) < f(y)$$

т.к $y, x \in N$, переберём все значения $f(x)$ и $f(y)$

т.к. $0 \leq f(n) \leq 5$, где $n \in N$ и $n \leq 24$, то

~~по~~ всего будет ровно 5 случаев:

(1) $f(x) = 0$, $f(y) \geq 1$

(2) $f(x) = 1$, $f(y) \geq 2$

(3) $f(x) = 2$, $f(y) \geq 3$

(4) $f(x) = 3$, $f(y) \geq 4$

(5) $f(x) = 4$, $f(y) = 5$

(1) $f(x) = 0 \iff x = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24$
$f(y) \geq 1 \iff y = 5, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 22, 23$

кол-во пар $(x; y) = 11 \cdot 13 = 143$

(2) $f(x) = 1 \iff x = 5, 7, 10, 14, 15, 20, 21$

$f(y) \geq 2 \iff y = 11, 13, 17, 19, 22, 23$

кол-во пар $(x; y) = 7 \cdot 6 = 42$

(3) $f(x) = 2 \iff x = 11, 22$

$f(y) \geq 3 \iff y = 13, 17, 19, 23$

кол-во $= 2 \cdot 4 = 8$

(4) $f(x) = 3 \iff x = 13$
$f(y) \geq 4 \iff y = 17, 19, 23$
кол-во $= 1 \cdot 3 = 3$

(5) $f(x) = 4 \iff x = 17, 19$
$f(y) = 5 \iff y = 23$
кол-во $= 2 \cdot 1 = 2$

Общее кол-во $= (1) + (2) + (3) + (4) + (5) = 143 + 42 + 8 + 3 + 2 = 198$

Ответ: 198

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax+b \le -8x^2-30x-17 \\ \dfrac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8x^2-(30+a)x-(17+b) \ge 0 & (1) \\ \dfrac{4ax^2+(3a+4b-12)x+3b-11}{4x+3} \ge 0 & (2) \end{cases}$$

~~(1)~~ чтобы неравенство(1) выполнялось для $x \in \left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$

необходимо и достаточно: $\begin{cases} D_1 > 0 \\ f\left(-\frac{11}{4}\right) > 0 \\ f\left(-\frac{3}{4}\right) \ge 0 \end{cases}$

~~$f(x) = -8x^2+(30+a)x+(17+b)$~~

$f(x) = -8x^2-(30+a)x-(17+b)$

чтобы нер-во (2) выполнялось для $x \in \left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right) \Leftrightarrow$

~~необходимо и~~ $\Leftrightarrow 4ax^2+(3a+4b-12)x+3b-11 \le 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=0 \\ \cancel{3a+4b-12}\,(4b-12)x+3b-11 \le 0 \quad (3) \end{cases} \\ \begin{cases} a \ne 0 \\ 4ax^2+(3a+4b-12)x+3b-11 \le 0 \quad (4) \end{cases} \end{array}\right.$$

~~$\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=3 \\ x \le 4b+3x \end{cases}$~~

чтобы нер-во (3) выполнялось для $x \in \left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right) \Leftrightarrow$

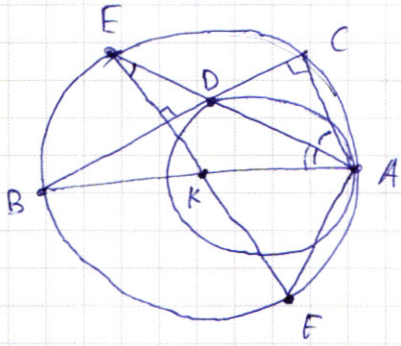
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=3 \\ \begin{cases} b<3 \\ \dfrac{11-3b}{4b-12} \le -\dfrac{11}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} b>3 \\ \dfrac{11-3b}{4b-12} \ge -\dfrac{3}{4} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow b \in \left(-\infty; \frac{11}{4}\right] \cup [3; +\infty)$$

чтобы нер-во (4) выполнялось для $x \in \left[-\frac{11}{4}; -\frac{7}{4}\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ D_4<0 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g\left(-\frac{11}{4}\right) < g\left(\frac{3}{4}\right) \le 0 \\ -\frac{3}{4} < -\dfrac{3a+4b-12}{8a} \end{cases} \\ \begin{cases} g\left(-\frac{3}{4}\right) < g\left(-\frac{11}{4}\right) < 0 \\ -\frac{11}{4} > \dfrac{-(3a+4b-12)}{8a} \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

N4



$BC \perp EF$, $BC \perp AC$ $\Rightarrow EF \parallel AC \Rightarrow \angle FEA = \angle EAC$

~~$\angle FKA = \angle KAC$ (т.к. $EF \parallel AC$)~~
~~$\angle FKA = \angle FEA + \angle KAE$ (внешн. угол)~~
~~$\Rightarrow \angle KAC = \angle FKA = \angle FEA + \angle KAE$~~
~~$\angle KAC = \angle KAE + \angle EAC$~~
~~$\angle KAC = \angle KAE + \angle KEA$~~

N3

$$5^{\log_{12} x^2+18x} + x^2 \geq (x^2+18x)^{\log_{12} 13} - 18x$$

ОДЗ: $x^2+18x > 0$

Пусть $x^2+18x = a$

$$5^{\log_{12} a} + a \geq a^{\log_{12} 13} \iff 5^{\log_{12} a} + 12^{\log_{12} a} \geq a^{\log_{12} 13}$$

Заметим, что ~~...~~ $a = 144$ – решение

т.к. производная функции $5^x + 12^x$ всегда меньше, чем производная функции $x^{\log_{12} 13}$, то $a < 144$ – решение, а при $a > 144$ $5^{\log_{12} a} + 12^{\log_{12} a} < a^{\log_{12} 13}$

~~$a \in [$~~ $a \leq 144$ – решение

$0 < x^2+18x - 144 \leq 0$ – решение

$x^2+18x+81 \leq 225$

$(x+9)^2 \leq 15^2$

$$\begin{cases} -15 \leq x+9 \leq 15 \\ x^2+18x > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in [-24; 6] \\ x \in (-18; 0) \end{cases} \iff \text{Ответ: } (-18; 0)$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac45 \qquad tg\,\alpha - ?$

$\sin2\alpha\cdot\cos4\beta + \sin4\beta\cdot\cos2\alpha + \sin2\alpha = -\frac45$

$\cancel{2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}}$

$\sin2\alpha(\cos4\beta+1) + \sin4\beta\cos2\alpha = -\frac45$

$\cancel{\sin 2\alpha}$

$\begin{cases} \sin2\alpha\cdot\cos2\beta + \cos2\alpha\cdot\sin2\beta = -\frac{1}{\sqrt5} & \Big|\cdot\frac{4}{\sqrt5} \\ \sin2\alpha(\cos4\beta+1) + \cos2\alpha\cdot\sin4\beta = -\frac45 \end{cases}$

$tg2\alpha\cdot\cos4\beta + \sin4\beta + tg2\alpha$

$tg2\alpha(\cos4\beta+1)+\sin4\beta = -\frac{4}{5\cos2\alpha}$

$\sin2\alpha(2\cos^2 2\beta + \cos2\beta) + \cos2\alpha(2\sin^2 2\beta + \sin2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} - \frac45$

$\sin2\alpha\cdot\cos2\beta(2\cos2\beta+1) + \sin2\alpha\cdot\cos2\beta(2\sin2\beta+1) = c$

$\sin2\alpha\cdot\cos2\beta\Big(2(\cos2\beta+\sin2\beta+1)\Big) = c$

$tg2\alpha\left(2\cos^2 2\beta - \frac{4}{\sqrt5}\cos2\beta\right) +$

$+ 2\sin^2 2\beta - \frac{4}{\sqrt5}\sin2\beta - 1 = 0$

$2\alpha = x$
$2\beta = y$

$\sin x = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\begin{cases} \frac{4}{\sqrt5}\sin x\cdot\cos y + \frac{4}{\sqrt5}\cos x\cdot\sin y = -\frac45 \\ \sin x(2\cos^2 y) + \cos x\cdot(2\sin^2 y - 1) = -\frac45 \end{cases}$

$\sin(x+2\beta) + \sin2\alpha = -\frac45$

$\sin x\cdot\cos2\beta + \cos x\cdot\sin2\beta + \sin2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin x\left(2\cos^2 y - \frac{4}{\sqrt5}\cos y\right) + \cos x\left(2\sin^2 y - \frac{4}{\sqrt5}\sin y - 1\right) = 0$

$-\frac{1}{\sqrt5}\cos2\beta + \cos x\cdot\sin2\beta + \sin2\alpha = -\frac14$

$\begin{cases} \sin x\cdot\cos y + \cos x\cdot\sin y = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin x\cdot2\cos^2 y + \cos x\cdot(2\sin^2 y - 1) = -\frac45 \end{cases}$

$\sin x(2\cos^2 y + \cos y) + \cos x(2\sin^2 y + \sin y - 1) = -\left(\frac{1}{\sqrt5}+\frac45\right) \qquad tg\,\alpha - ?$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \qquad \sin(2\alpha+4\beta) + \sin2\alpha = -\frac45$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 1 (Нумеровать только чистовики)

$\sin(2\alpha+2B) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\qquad$ $\sin(2\alpha+4B)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha\cdot\cos 2B + \sin 2B\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin 2\alpha\cdot\cos 4B + \sin 4B\cdot\cos 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$+\sin 2\alpha$

$\sin 2\alpha = -\left(\frac{4}{5}+\sin(2\alpha+4B)\right)$

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+(3y-3)^2 = 25 \end{cases}$$

$\cancel{x^2-4y+4+9y^2-18y+9}$

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-2)-2(y-1) = \sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2-9b^2=25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2-4ab+b^2=ab \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2+4b^2=5ab \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$$

$\cancel{10b^2=5(ab-5)}$

$\cancel{2b^2=ab-5}$

$13b^2=5(ab-5)$

$$\begin{cases} a^2+4b^2=5ab \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$$

$b^2=\frac{5ab-25}{13}$

$\cancel{a-2b=\sqrt{ab}}$

$a-2b\geq 0$

$\cancel{ab}$

$\cancel{4k-9k-m}$

$\cancel{(a-3b)(a+3b)=25}$

$$\begin{cases} a^2+4b^2=5ab \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$$

$\cancel{b^2=ab-5}$

$b^2=5-ab$

$a^2-5ab+4b^2=0$

$a=4b$

$a=b$

$a^2+9b^2=25$

$$\begin{cases} a^2+20=5ab \\ \cancel{a^2+45-9ab=25} \\ b^2=5-ab \end{cases}$$

$$\begin{cases} b(a+1)=5 \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$$

$(a-5)(a+5)=9b^2$

$ab\geq b=\frac{25}{5}=\frac{20}{5}$

$\cancel{9b^2(a+1)}$

$b^2(a+1)^2=25$

$(a-5)(a+5)(a+1)^2=25\cdot 9$

$(a^2-25)(a^2+2a+1)$

$\frac{(a-5)(a+5)}{(a+1)^2}=3\cdot3\cdot5\cdot5$

$a^4+2a^3+a^2-25a^2-50a-25)=25\cdot 9$

$a^4+2a^3-24a^2-50a-25\cdot10=0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №2

(Нумеровать только чистовики)

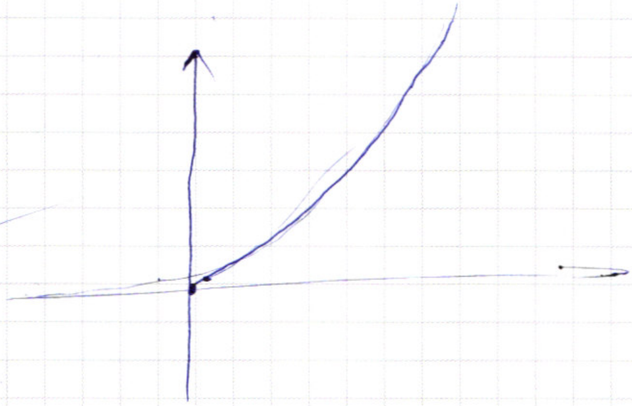
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~5 log~~

~~$5^{\log_{12} a} + \log^{12} a$~~

$$5^{\log_{12} a} + 12^{\log_{12} a} \geq a^{\log_{12} 13}$$

$$5^{\log_{12} a} + a - a^{\log_{12} 13} \gtrless 0$$



~~5 b~~

$$5^{\log_{12} a} \geq a^{\log_{12} 13} - a$$

$$a\left(a^{\log_{12}\frac{13}{12}} - 1\right)$$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin(2\alpha) = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

4 знач.

$\frac{2}{\sqrt5}$ $-\frac{2}{\sqrt5}$

$$\sin(2a+2B)\cdot\cos 2B + \cos(2a+2B)\cdot\sin 2B + \sin 2a = -\frac{4}{5}$$

1) $-\frac{1}{\sqrt5}\cos 2B + \frac{2}{\sqrt5}\cancel{\cos(2a+2B)}\sin 2B + \sin 2a = -\frac{4}{5}$

$$\sin 2a\cdot\cos 2B + \cos 2a\cdot\sin 2B = -\frac{1}{\sqrt5}$$

$$\begin{cases} \sin 2a\cos 2B + \sin 2B\cdot\cos 2a = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin 2a\cdot\cos 4B + \sin 4B\cdot\cos 2a + \sin 2a = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

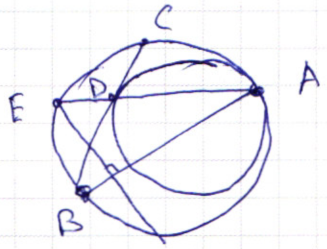
$$\sin 2a\left(2\cos^2 2B + \cos 2B\right) + \cos 2a\left(\cancel{\cos}\sin^2 2B + \sin 2B - 1\right) = -\left(\frac{4}{5}+\frac{1}{\sqrt5}\right)$$

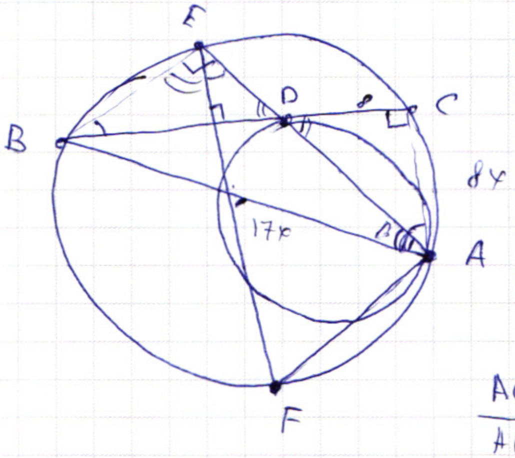
5^3+12^3 13^3 $17\cdot(25+144+\ldots)$ $17\cdot169 \wedge 13^3$ $1700+153 \wedge 169\cdot13$ $1700+153 \wedge$

$169 \times 13 = 507 + 169 = 2197$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 3 (Нумеровать только чистовики)





$BD = 17$

$\frac{AC}{AB} = \frac{8}{17}$

$17^2x^2 - 8^2x^2 = \cdot$

$9x \cdot 25x = \cancel{8}\,25^2$

$9x^2 = 25$

$x^2 = \frac{25}{9}$

$17x = 17\frac{\sqrt{5}}{3}$

$AB = 17\frac{\sqrt{5}}{3}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$

$5^{\log_{12}a} + a \geq |a|^{\log_{12}13}$

$a = x^2+18x$ $\quad x(x+18)$

~~$5\log$~~

~~$5^{\log_{12}a} - |a|^{\log_{12}13} \geq -a$~~

$5^{\log_{12}a} + a - a^{\log_{12}13} \geq 0$

$5^{\log_{12}a} \geq a^{\log_{12}13} - a^1$

$5^{\log_{12}a} + 12^{\log_{12}a} \geq a^{\log_{12}13}$

$60^{\log_{12}a} \wedge a^{\log_{12}13}$

~~$\log_{12} 5^{\log}$~~

$\log_{60} 60^{\log_{12}a}$

$5^{\log_{12}a} + 12^{\log_{12}a} \geq a^{\log_{12}13}$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

если $f\left(\frac{1}{y}\right) > 0 \Rightarrow f(x/y) > 0$

$f\left(\frac{1}{y}\right) < 0 \Rightarrow f(y) > 0$

$y = 5; 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 22, 23$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$

$f(x) < f(y)$

(1) $f(x) = 0$, $f(y) \geq 1$

$x = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24$

y = оставшиеся

(2) $f(x) = 1$, $f(y) \geq 2$

$x = 5, 7, 10, 14, 15, 20, 21$

$y = 11, 13, 17, 19, 22, 23$

(3) $f(x) = 2$, $f(y) \geq 3$

$x = 11, 22$

$y = 13, 17, 19, 23$

(4) $f(x) = 3$, $f(y) \geq 4$

$x = 13$

$y = 17, 19, 23$

(5) $f(x) = 4$

$f(y) \geq 5$

$x = 17, 19$

$y = 23$

$f(p) > 1$ $\quad$ $f(p) = 0$

$p \geq 5$ $\quad$ $p < 5$

$f(ab) = f(a) + f(b)$ $\quad$ $f(p) = [p/4]$ $\quad$ p – простое $\quad f($

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 24 \\ 1 \leq y \leq 24 \\ f(x/y) < 0 \end{cases}$$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f(ab) - f(a) = f(b)$

$f(2b) - f(2) = f(b)$

$f(2b) = f(b)$

$f(3b) = f(b)$

$f(b) = f(ab) - f(a)$

$f(a) > f(ab)$

$f\left(\frac{1}{7}\right) = -1$

$f(b) = 0$ $\quad$ $f(1) = 0$

$f(7) = 1$

$f\left(k \cdot \frac{1}{k}\right) = f(k) + f\left(\frac{1}{k}\right)$

$f\left(\frac{1}{k}\right) = f\left(k \cdot \frac{1}{k}\right) - f(k)$

$f\left(\frac{1}{k}\right) = -f(k)$

$f(k) > 0$ $\quad$ $f\left(\frac{1}{k}\right) < 0$

$f(1) = 0$, $f(2) = 0$, $f(3) = 0$, $f(4) = 0$, $f(5) = 1$, $f(6) = 0$, $f(7) = 1$, $f(8) = 0$, $f(9) = 0$, $f(10) = 1$, $f(11) = 2$, $f(12) = 0$, $f(13) = 3$, $f(14) = f(7) = 1$, $f(15) = 1$, $f(16) = 0$

$f(17) = 4$, $f(18) = 0$, $f(19) = 4$, $f(20) = 1$, $f(21) = 1$, $f(22) = 2$, $f(23) = 5$, $f(24) = 0$

☑ черновик ☐ чистовик $\qquad$ Страница № 5

(Поставьте галочку в нужном поле) $\qquad$ (Нумеровать только чистовики)

$$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$$

$-8x^2-30x-17 \ge ax+b$

$-8x^2-(30+a)x-(17+b) \ge 0$

$D>0$

2 $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$ $f\left(-\frac{11}{4}\right) > 0$ $f\left(-\frac{3}{4}\right) \ge 0$

$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b$

$\frac{-4ax^2-(3a+4b-12)x-3b+11}{4x+3} \le 0$

$\frac{12x+11-(ax+b)(4x+3)}{4x+3} \le 0$

$\frac{4ax^2+(3a+4b-12)x+3b-11}{4x+3} \ge 0$

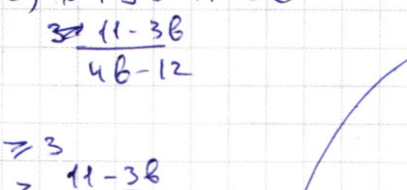
$12x+11-(4ax^2+3ax+4bx+3b)$

$-4ax^2-(3a+4b)x-3b+12x+11$

$a=0$

$\frac{(4b-12)x+3b-11}{4x+3} \ge 0$

$\left[\begin{cases} x \ge \frac{11-3b}{4b-12} \\ b \ge 3 \end{cases}\right.$ $\begin{cases} x \le \frac{11-3b}{4b-12} \\ b \le 3 \end{cases}$



$(4b-12)x+3b-11 \ge 0$

$-\frac{3}{4}$

$\left[\begin{cases} \frac{11-3b}{4b-12} \ge -\frac{11}{4} \\ b \ge 3 \end{cases}\right.$ $\begin{cases} \frac{11-3b}{4b-12} \ge -\frac{3}{4} \\ b < 3 \end{cases}$

$(4b-12)x+3b-11 \le 0$

$\left[\begin{cases} x \le \frac{11-3b}{4b-12} \\ b \ge 3 \end{cases}\right.$ $\begin{cases} x \ge \frac{11-3b}{4b-12} \\ b < 3 \end{cases}$

1 $\left[\begin{cases} \frac{11-3b}{4b-12} \ge -\frac{3}{4} \\ b \ge 3 \end{cases}\right.$ $\begin{cases} \frac{11-3b}{4b-12} \le -\frac{11}{4} \\ b < 3 \end{cases}$

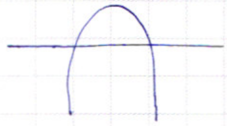
$a=0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №6

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$4ax^2+(3a+4b-12)x+3b-11 \le 0$ $\qquad [-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$

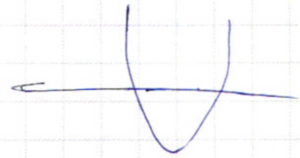


$a<0$

$$\left[\begin{array}{l} D<0 \\ f(-\frac{11}{4}) < f(-\frac{3}{4}) \le 0 \\ -\frac{3}{4} < \frac{-(3a+4b-12)}{8a} \end{array}\right.$$

$a<0$

$(3a+4b-12)^2-4(3b-11)\cdot 4a<0$



$a>0$

$$\begin{cases} D>0 \\ \left[\begin{array}{l} f(-\frac{11}{4})<0 \\ f(-\frac{3}{4})<0 \end{array}\right. \end{cases}$$

(2) $\begin{cases} (30+a)^2 > -4(17+b)\cdot 8 \\ -8\cdot\frac{121}{16}+(30+a)\frac{11}{4}-(17+b)>0 \\ -8\cdot\frac{9}{16}+(30+a)\frac{3}{4}-(17+b)>0 \end{cases}$

$\begin{cases} a=0 \\ b\in(-\infty; \frac{11}{4}] \cup [3;+\infty) \end{cases}$

(1) $\begin{cases} a=0 \\ b=3 \\ \begin{cases} \cancel{44-12b > -12b+36} \\ b>3 \end{cases} \\ \begin{cases} 44-12b \le -44b+11\cdot 12 \\ b<3 \end{cases} \end{cases}$

$\begin{cases} a=0 \\ \left[\begin{array}{l} b\ge 3 \\ 32b \le 11\cdot12-11\cdot4=11\cdot8 \\ b\le\frac{11}{4} \end{array}\right. \end{cases}$

$\begin{cases} 900+60a+a^2 > -32\cdot17-32b \\ -\frac{121}{2}+\frac{15\cdot11}{2}+\frac{11a}{4}-17-b>0 \\ -\frac{9}{2}+\frac{15\cdot3}{2}+\frac{3a}{4}-17-b>0 \end{cases}$

$22\cdot4+11a-68-4b>0$

$11a-4b+20>0$

$18\cdot4+3a-68-4b>0$

$\begin{cases} 3a-4b+4>0 \\ 11a-4b+20>0 \\ (30+a)^2 > -32b-32\cdot17 \end{cases}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)