МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. **[3 балла]** Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. **[4 балла]** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. **[5 баллов]** Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. **[5 баллов]** Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. **[5 баллов]** Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. **[5 баллов]** Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

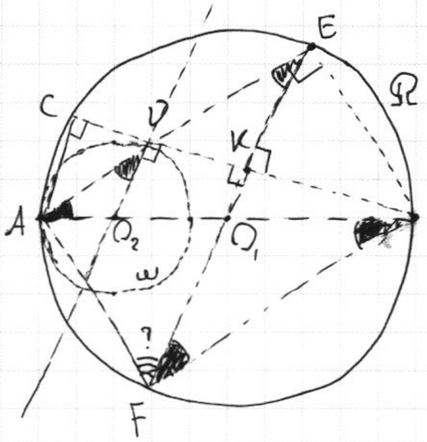
$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. **[6 баллов]** Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



R - радиус окр Ω ; r - радиус окр ω

$CD = \frac{15}{2}$ $BD = \frac{17}{2}$; O_1 - центр Ω ; O_2 - центр ω

1) $\angle AEB = \angle AFB = 90^\circ$, т.к. опир на диам. AB

2) $O_2D \perp BC$, т.к. BC - касат.

3) т.к. $EF \perp BC \rightarrow EF \parallel DO_2$

4) $\angle O_2AD = \angle O_2DA$, т.к. $\triangle AO_2D$ - р/б

5) $\angle O_2AD = \angle O_2DA_1 = \angle AEF$

6) $\angle EAB = \angle O_2AD = \angle EFB = \angle ABF$, т.к. опр. на одни и те же дуги

7) следовательно $\angle EAF = \angle AFB = \angle FBE = \angle BEA = 90^\circ$

8) следовательно EF - диаметр, проходит через O_1

9) следовательно $CK = KB = \left(\frac{15}{2} + \frac{17}{2}\right) / 2 = 8$; $DK = 0{,}5$; $CD = 7{,}5$

10) $\frac{R}{8} = \frac{r}{7{,}5}$ т.к. $\angle ACB = 90^\circ$ и теор. Фал.

11) $BD^2 + r^2 = (2R - r)^2 \longrightarrow R = 17$; $r = \frac{15}{16} 17$

12) $O_1K^2 = R^2 - BK^2 \Longrightarrow O_1K = 15$; $KE = 2 \longrightarrow EB = AB = \sqrt{68}$

13) $AE^2 = (2R)^2 - (\underset{AF}{\sqrt{68}})^2 = 1088 \rightarrow AE = \sqrt{1088}$

Итого Ответы:

$S_{AEF} = \frac{AE \cdot AF}{2} = \sqrt{272} \cdot \sqrt{68} = \sqrt{4 \cdot 17 \cdot 17 \cdot 16} = 272$

$R = 17$; $r = 17 \cdot \frac{15}{16}$

$\angle AFE = \arcsin\left(\frac{AE}{2R}\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{1088}}{34}\right) = \arcsin\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right)$

N 1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha = -\dfrac{2}{5} \end{cases}$$

$\sin(x+y) = \sin x\cdot\cos y +$
$+\cos x\cdot\sin y$

$\cos2x = \cos^2x -$
$-\sin^2x$

$\sin2x = 2\cdot\sin x\cdot\cos x$

$$\begin{cases} \sin2\alpha\cdot\cos2\beta + \cos2\alpha\cdot\sin2\beta = -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin2\alpha\cdot\cos4\beta + \cos2\alpha\cdot\sin4\beta + \sin2\alpha = -\dfrac{2}{5} \end{cases}$$

$$\sin x = \frac{2\cdot tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} \;; \quad \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$$!

$a = tg\alpha \;;\; b = tg\beta$

$$\begin{cases} \dfrac{2\cdot a}{1+a^2}\cdot\dfrac{1-b^2}{1+b^2} + \dfrac{1-a^2}{1+a^2}\cdot\dfrac{2\cdot b}{1+b^2} = -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{2\cdot a}{1+a^2}\cdot\left(\left(\dfrac{1-b^2}{1+b^2}\right)^2 - \left(\dfrac{2b}{1+b^2}\right)^2\right) + \dfrac{1-a^2}{1+a^2}\cdot 2\cdot\dfrac{1-b^2}{1+b^2}\cdot\dfrac{2\cdot b}{1+b^2} + \dfrac{2a}{1+a^2} = -\dfrac{2}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{2a-2ab^2+2b-2ba^2}{(1+a^2)(1+b^2)} = -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{\cancel{2}\cdot a}{1+a^2}\cdot\dfrac{1-6b^2+b^4}{(1+b^2)^2} + \dfrac{1-a^2}{1+a^2}\cdot\dfrac{2b-2b^3}{(1+b^2)^2}\cdot\cancel{2} + \dfrac{\cancel{2}a}{1+a^2} = -\dfrac{\cancel{2}\,1}{5} \end{cases}$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(a-ab^2+b-ba^2+ab^2-ab^4+b^3-b^3a) = -\frac{1}{5}(1+a^2)(1+b^2)^2 =$$
$$= a^2b^3+a^2b+ab^4-2b^2a+a$$

$$a-ab^2+b-ba^2+ab^2-ab^4+b^3-b^3a = \sqrt{5}a^2b^3+\sqrt{5}a^2b+\sqrt{5}ab^4-2\sqrt{5}b^2a+$$
$$+\sqrt{5}a$$

$$a^2(-b-\sqrt{5}b^3-\sqrt{5}b) + a(1\cancel{-b^2}\cancel{+b^2}-b^4-b^3-\sqrt{5}b^4+2\sqrt{5}b^2-\sqrt{5}) +$$
$$+b+b^3 = 0$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

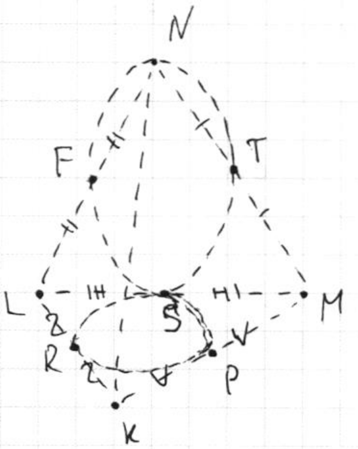
№1 (продолжение)

$$a^2(-b-\sqrt{5}b^3-\sqrt{5}b)+a(1-b^4-b^3-\sqrt{5}b^4+2\sqrt{5}b^2-\sqrt{5})+b+b^3=0$$

$$a=\frac{1-b^4-b^3-\sqrt{5}b^4+2\sqrt{5}b^2-\sqrt{5}\pm\sqrt{||-||-||^2+4(b+b^3)\cdot b+\sqrt{5}b+\sqrt{5}b^3)}}{2b(1+\sqrt{5}b^2+\sqrt{5})}$$

№6

т.к.



т.к. точки F T S P S лежат на одной сфере вместе с N ⇒ △LMK - описанный ⇒ p/c т.к. середины

FNTS - впис четырехуг

№2

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36=45 \end{cases} \qquad (x-6)(2y-1)\geq 0$$

$$\begin{cases} x-6-6(2y-1)=\sqrt{(x-6)(2y-1)} \\ (x-6)^2+9(2y-1)=90 \end{cases}$$

$a=x-6$

$b=2y-1$

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{a\cdot b} \\ a^2+9b^2=9 \end{cases} \qquad a-6b\geq 0$$

$a^2-12ab+36b^2=a\cdot b$

$t=a/b$

$t^2-13t+36=0 \rightarrow t=9;4$

$$\left[\begin{array}{l} a=9b \\ a=4b \end{array}\right. \longrightarrow \left[\begin{array}{l} 81b^2+9b^2=90;\ b=\pm1;\ a=\pm9 \\ 16b^2+9b^2=90;\ b=\pm\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}};\ a=\pm\frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-6=9 \\ 2y-1=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x-6=-9 \\ 2y-1=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} x-6=\frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \\ 2y-1=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \end{cases} \\ \begin{cases} x-6=-\frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \\ 2y-1=-\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \end{cases} \end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=15 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-3 \\ y=0 \end{cases} \text{ не подходит } a\geq 6b \\ \begin{cases} x=\frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{5}}+6 \\ y=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{cases} \text{ не подходит } a\geq 6b \\ \begin{cases} x=-\frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{5}}+6 \\ y=\frac{-3\sqrt{2}+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(15;1)$

$\left(-\frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{5}}+6;\ -\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot 2}\right)$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№5

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(p)=[p/4]$

$f\left(\frac{x}{y}\right)<0$

$f\left(x\cdot\frac{1}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)<0$

$\{x\in[2;25];\ x\in\mathbb{N}\}$

$\{y\in[2;26];\ y\in\mathbb{N}\}$

для ~~$a\in[2;4]$; $f(a)\neq 0$ $a\in[\ ]$~~ $a=$ 2; 3; 4; 6; 8; 9; 12; 16; 18; 24.

$f(a)=0$

для $a=5;7;10;14;15;20;21$

$f(a)=1$

для $a=11;22;25;$

$f(a)=2$

$\boxed{\begin{array}{l} a\in\mathbb{N} \\ f\left(\frac{1}{a}\right)=-f(a)\end{array}}$

~~для $a=13$~~

для $a=13;$

$f(a)=3$

для $a=17;19$ $f(a)=4$

для $a=23$ $f(a)=5$

~~для $a=$ ... $f(a)=$~~ Откуда: $\left|f\left(\frac{1}{y}\right)\right|>f(x)$

Тогда кол-во пар равно:

$10\cdot14+7\cdot7+3\cdot4+1\cdot3+2\cdot1=$

Ответ: 206 пар

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~№ 6~~

$\cancel{\frac{16x-16}{4x-5} \leqslant ax+6 \leqslant -32x^2+36x-3}$

№ 3

$10x + |x^2-10x|^{\log_3 4} \geqslant x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)}$

$x^2-10x \leqslant |x^2-10x|^{\log_3 4} - 5^{\log_3(10x-x^2)}$

$t = x^2-10x \qquad t>0 \ ; \ x \in (0;10)$

$t \leqslant |t|^{\log_3 4} - 5^{\log_3 t}$

$t^{\log_3 3} \leqslant |t|^{\log_3 4} - 5^{\log_3 t}$

$t^{\log_3 4} - |t|^{\log_3 3} \geqslant 5^{\log_3 t}$

$\cancel{t(t^{\log_3 4}-1) \geqslant 5^{\log_3 t}}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6

$$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$$

$$\frac{0}{4-5} \le a\cdot 1+b \le -32+36-3$$

$$0 \le a+b \le -1$$

$$\frac{4-16}{1-5} \le \frac{a}{4}+b \le -32\cdot\frac{1}{16}+9-3$$

$$3 \le \frac{a}{4}+b \le 4$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a+b=0 \\ a+b=-1 \end{array}\right. \\ \frac{a}{4}+b \le 4 \\ \frac{a}{4}+b \ge 3 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} a=-b \\ a=-1-b \end{array}$$

I

$$-\frac{b}{4}+b \ge 3$$

$$-\frac{b}{4}+b \le 4 \to b \in [4; \tfrac{16}{3}]$$

$$a \in [-\tfrac{16}{3}; -4]$$

II

$$\frac{-1-b}{4}+b \le 4$$

$$\frac{-1-b}{4}+b \ge 3$$

$$b \in [\tfrac{13}{3}; \tfrac{17}{3}]$$

$$a \in [-\tfrac{20}{3}; -\tfrac{16}{3}]$$

Ответ:
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a\in[-\frac{16}{3}; -4] \\ b\in[4; \frac{16}{3}] \end{cases} \\ \begin{cases} a\in[-\frac{20}{3}; -\frac{16}{3}] \\ b\in[\frac{13}{3}; \frac{17}{3}] \end{cases} \end{array}\right.$$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{2a - 6b^2\cdot 2a + 2ab^4 + (1-a^2)\cdot(2b-2b^3)\cdot 2}{(1+a^2)(1+b^2)^2} =$$

$$= \frac{2a - 12b^2 a + 2ab^4 + (2b - 2b^3 + 2ba^2 + 2b^3\cdot a^2)\cdot 2}{\ldots} =$$

$$= 2\left(\frac{a - 6b^2 a + ab^4 + 2b - 2b^3 + 2ba^2 + 2b^3\cdot a^2}{(1+a^2)(1+b^2)} + \frac{a}{1+a^2}\right) = -\frac{2}{5}$$

$1 + a^2 + b^2 + a^2b^2$ $\qquad \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \le \frac{1}{3}\log_3 4$

$$\frac{a^2(2b^3+2b) + a(b^4 - 6b^2 + 1) + a + 2b^2\cdot a + b^4 a}{(1+a^2)(1+b^2)^2} = -\frac{1}{5}$$

$$a^2(2b^3+2b) + a(2b^4 - 4b + 2) = -\frac{1}{5}(1+a^2)(1+b^2)^2$$

$$2a^2(b^2+1) + 2\cdot a(b^2-1)^2 = -\frac{1}{5}(1+a^2)(1+b^2)^2$$

$$2(a+b) - 2ab(b+a) = (a+b)(1-ab)\cdot 2 = -\frac{1}{\sqrt5}(1+a^2)(1+b^2)$$

$$2(a+b)(1-ab)\cdot(1+b^2)\cdot\frac{1}{\sqrt5} = 2a(ab(b^2+1) + (b^2-1)^2)$$

$$(2a - 2ab^2 + 2b - ba^2)(1+b^2) = a - ab^2 + b - ba^2 + ab^2 - ab^4 + b^3 - b^3a =$$

$$= \sqrt5\cdot a(ab^3 + ab + b^4 - 2b^2 + 1)$$

$1^{\log_3 4} \le 2$

$9^{\log_3 4} - 9 \ge 25$ $\qquad 1^{\log_3 4} - 1 \ge 5^{\log_3 1}$

$4^{\log_3 4} - 4 \ge 5^{\log_3 4}$

$9^{\log_3(4)}$ $\qquad 4 - 3 \ge$

$t\left(t^{\log_3 4 - 1} - 1\right) \ge 5^{\log_3 t}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №___

(Нумеровать только чистовики)

№2 $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}$

$2xy - 12y - x + 6 > 0$

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6} \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45 \end{cases}$$

$\frac{9 \pm \sqrt{3 \cdot 19}}{16}$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 6 \\ y > \frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x < 6 \\ y < \frac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

$1296 - 384 = 912$

$140 + 49$ 189 12 201 $201 + 3 + 2 = 206$

$x^2 + 36y^2 - 12x - 36y - 45 = 0$

$x^2 - 15x + 3\sqrt{2xy - 12y - x + 6} + 36y^2 - 45 = 0$

$-32x^2 + 36x - 3 \geq$

$\frac{36 \pm \sqrt{36^2 - 4 \cdot 3 \cdot 32}}{2 \cdot 32}$

$32x^2 - 36x + 3 = 0$

~~$x^2 - 24xy + 36 \cdot 4 \cdot y^2 = 2xy - 12y - x + 6$~~

$x^2 - 12x + 36 + 36y^2 - 36y + 9 = 90$

$(x-6)^2 + (6y-3)^2 = 90 = (x-6)^2 + 9(2y-1)^2 = x - 12y$

$2xy - 12y - x + 6$ $f(\frac{1}{5})$

$x(2y-1) - 6(2y-1)$ $\frac{5}{2b} = \frac{1}{5}$ $25b^2 = 90$

$b = \frac{90}{25}$

$120 + 24 = 144$

$a > 6b$

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{(x-6)(2y-1)} = (x-6) - 6(2y-1) \\ (x-6)^2 + 9(2y-1) = 90 \end{cases}$$

$3 \cdot 4 =$

$\log_3 4 - \log_3 3 =$

$x - 6 - 12y + 6 = x - 6 - 6(2y-1)$

$a^2 - 12ab + 36b^2 = a \cdot b$

$a = (x-6)$ $b = (2y-1)$

$a^2 - 13ab + 36b^2 = 0$

$$\begin{cases} a - 6 \cdot b = \sqrt{a \cdot b} \\ a^2 + 9b^2 = 90 \end{cases}$$

$t = \frac{a}{b}$

$t^2 - 13t + 36 = 0$

$t^{\log_3 4} - t^{\log_3 3} = t\left(\log_3 \frac{4}{3} + 1\right)$

$t^{\log_3 3} - t$ $= 5^{\log_3 t}$

$= \frac{13 \pm 5}{2} = 9; 4$

$\frac{a}{b} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 4 \cdot 36}}{2} =$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

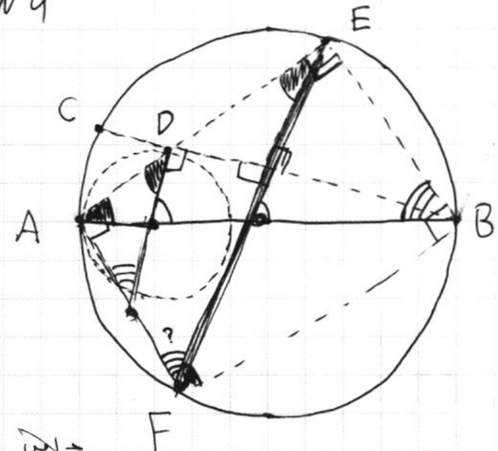
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

$5^{\log_3 t}$ $\quad \frac{1}{3}^{\log_3 4}$ $\quad (3^{-1})^{\log_3 4}$ $\quad \frac{1-2b^2+b^4}{(1+b^2)} - \frac{4b^2}{(1+b^2)^2}$

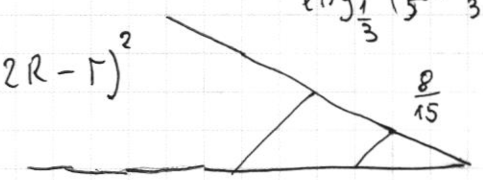


$CD = \frac{15}{2}$ $\quad BC = \frac{32}{2} = 16$

$BD = \frac{17}{2}$

$\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right)$

$BD^2 + r^2 = (2R - r)^2$



$\frac{R}{2R-r} = \frac{8}{8,5}$

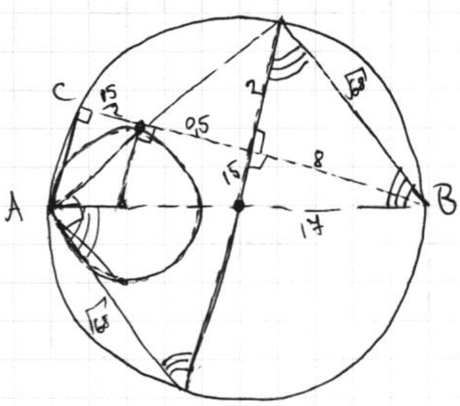
$\frac{R}{2R} = \frac{1}{2}$ $\quad \frac{R}{8} = \frac{2r}{15}$

$\frac{R}{8} = \frac{r}{\frac{15}{2}}$ $\quad 15R = 16r$ $\quad \frac{289}{4}$

$\boxed{r = \frac{15}{16}R}$

$17 \cdot 17 = 119 + 17 = 289$

$\sqrt{4+64}$



$\left(\frac{17}{2}\right)^2 + \left(\frac{15}{16}R\right)^2 = \left(2R - \frac{15}{16}R\right)^2$ $\quad r = \frac{15}{16}\cdot 17$

$1088 = 4 \cdot 16 \cdot 17$

$\frac{289}{4} + \frac{225}{256}R^2 = \frac{289}{256}R^2$

$1088 : 4 = 272$

$\frac{289}{4} = \frac{64}{256}R^2$ $\quad R^2 = \frac{289}{4}\cdot\frac{256}{64} =$

$= \frac{17^2}{2^2}\cdot\frac{16^2}{8^2} \quad \frac{17\cdot 16}{2 \cdot 8} =$

$= 17 = R$

$272 : 17 = 16$ $\quad 272 - 17 = 102$

$17 \cdot 6 = 102$

$289 \cdot 4 = 1156$ $\quad 1156 - 68 = 1088$

$289 - 68 = 221$

$34 \cdot 8 = 272$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5} \end{cases}$$

$\sin(x+y)=\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta+\cos 2\alpha\cdot\sin 4\beta+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5} \end{cases}$$

$\cancel{tg\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{2\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{1}}$

$\sin 2\alpha\cdot(\cos^2 2\beta-\sin^2 2\beta)+\cos 2\alpha\cdot 2\cdot\cos 2\beta\cdot\sin 2\beta+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}$

$\cancel{\cos 2x=\frac{2\cdot tg x}{1+tg^2 x}=\frac{2\cdot\frac{\sin}{\cos}}{1+\frac{\sin^2}{\cos^2}}=\frac{\frac{2\sin}{\cos x}}{\frac{\cos^2+\sin^2}{\cos^2 x}}=\frac{2\cdot\sin x}{\cos x}\cdot\frac{\cos^2 x}{1}=\sin 2x}$

$$\boxed{\begin{aligned} \sin 2x&=\frac{2\cdot tg x}{1+tg^2 x} \\ \cos 2x&=\frac{1-tg^2 x}{1+tg^2 x} \end{aligned}}=\frac{1-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 x}}=\frac{\frac{\cos 2x}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 x}}=\cos 2x$$

$-2+3-3$

$12 \mid 4$

$a=tg\alpha \qquad b=tg\beta$

$-1-b+4b\le 16$ $\quad \frac{3}{4}b\le 4$ $\quad 3b\le 16$

$3b\le\frac{17}{3}$ $\quad b\le\frac{16}{3}$

$$\frac{2\cdot a}{1+a^2}\cdot\frac{1-b^2}{1+b^2}+\frac{1-a^2}{1+a^2}\cdot\frac{2\cdot b}{1+b^2}=-\frac{1}{\sqrt5}$$

$\frac{3b}{4}\ge 3 \quad b\ge 4$

$-b-4\left(1+\frac{1}{\sqrt5}\right)$

$$\begin{cases} \frac{2a-2ab^2+2b-2a^2b}{(1+a^2)(1+b^2)}=-\frac{1}{\sqrt5} \\ \frac{2\cdot a}{1+a^2}\cdot\left(\left(\frac{1-b^2}{1+b^2}\right)^2-\left(\frac{2\cdot b}{1+b^2}\right)^2\right)+\frac{1-b^2}{1+b^2}\cdot\frac{1-a^2}{1+a^2}\cdot 2\cdot\frac{2\cdot b}{1+b^2}+\frac{2\cdot a}{1+a^2}=-\frac{2}{5} \end{cases}$$

$-1-b+4b\ge 12$

$3b\ge 13$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)