МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6}, \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x + \left|x^2 - 10x\right|^{\log_3 4} \geqslant x^2 + 5^{\log_3\left(10x - x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{15}{2}$, $BD = \frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 25$, $2 \leqslant y \leqslant 25$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x - 16}{4x - 5} \leqslant ax + b \leqslant -32x^2 + 36x - 3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL = 3$, $KM = 1$, $MN = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1.

(1) $\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$; (2) $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha=-\frac{2}{5}$

Запишем сумму синусов для (2): $\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha=2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos2\beta=-\frac{2}{5}$

$\frac{2}{\sqrt5}\cdot\cos2\beta=\frac{2}{5}$

$\cos2\beta=\frac{1}{\sqrt5}\Rightarrow\sin2\beta=\pm\sqrt{1-\frac{1}{5}}=\pm\frac{2}{\sqrt5}$

(1): $\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin2\alpha\cdot\cos2\beta+\cos2\alpha\cdot\sin2\beta=-\frac{1}{\sqrt5}$

1 Случай ($\cos2\beta=\frac{1}{\sqrt5}$; $\sin2\beta=\frac{2}{\sqrt5}$):

$\sin2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5}+\cos2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5}=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin2\alpha+2\cos2\alpha=-1$

$2\sin\alpha\cos\alpha+2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=-\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

$2\sin\alpha\cos\alpha+2\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha=-\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

$\sin^2\alpha-3\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha=0$

$\cos\alpha=0$ – не подходит, т.к. тогда $\sin^2\alpha=0$, однако $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\Rightarrow$

$\Rightarrow\cos\alpha=0$ – не корень

$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-3=0$

$tg^2\alpha-2tg\alpha-3=0$

По т. Виета: $\left[\begin{array}{l}tg\alpha=-1\\tg\alpha=3\end{array}\right.$

2 Случай ($\cos2\beta=\frac{1}{\sqrt5}$; $\sin2\beta=-\frac{2}{\sqrt5}$)

$\frac{\sin2\alpha}{\sqrt5}+\frac{2\cos2\alpha}{-\sqrt5}=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin2\alpha-2\cos2\alpha=-1$

$2\sin\alpha\cos\alpha-2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=-\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

$2\sin\alpha\cos\alpha-2\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha=-\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

$-\cos^2\alpha+3\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=0$

$\cos\alpha\neq0$

$3\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha=0$

$3tg^2\alpha+2tg\alpha-1=0$

$\frac{D}{4}=4$

$\left[\begin{array}{l} tg\alpha=\frac{-1+2}{3}=\frac{1}{3} \\ tg\alpha=-1 \end{array}\right.$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} tg\alpha=-1 \\ tg\alpha=\frac{1}{3} \\ tg\alpha=3 \end{array}\right.$

Задача 2.

$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} & (1) \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 & (2) \end{cases}$

(2) $(x-6)^2-36+(6y-3)^2-9=45$

$(x-6)^2\cancel{-36}+(6y-3)^2=90$

Задача 3

$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4}\geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

ОДЗ: $10x-x^2>0$

На ОДЗ $|x^2-10x|=10x-x^2$

$10x+(10x-x^2)^{\log_3 4}\geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

$10x-x^2\geq 5^{\log_3(10x-x^2)}-(10x-x^2)^{\log_3 4}$

Замена $y=10x-x^2>0$ // $5^{\log_3 y}=5^{\frac{\log_5 y}{\log_5 3}}=y^{\log_3 5}$

$y\geq 5^{\log_3 y}-y^{\log_3 4}$

$y\geq y^{\log_3 5}-y^{\log_3 4}$

На ОДЗ $y>0\Rightarrow$ поделим нер-во на y:

$y^{\log_3 5-1}-y^{\log_3 4-1}\leq 1$

$y^{\log_3\frac{5}{3}}-y^{\log_3\frac{4}{3}}\leq 1$ (*)

☐ черновик ☑ чистовик Страница №2

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Докажем, что левая часть нер-ва — возрастающая ф-ция при $y>0$

$f(y) = y^{\log_3 \frac{5}{3}} - y^{\log_3 \frac{4}{3}}$

$f'(y) = \log_3 \frac{5}{3} \cdot y^{\log_3 \frac{5}{9}} - \log_3 \frac{4}{3} \cdot y^{\log_3 \frac{4}{9}} = 0 \quad (y>0)$

$\log_3 \frac{5}{3} \cdot y^{\log_3 \frac{5}{9} - \log_3 \frac{4}{9}} = \log_3 \frac{4}{3}$

$\log_3 \frac{5}{3} \cdot y^{\log_3 \frac{5}{3}} = \log_3 \frac{4}{3}$

$y^{\log_3 \frac{5}{3}} = \frac{\log_3 \frac{4}{3}}{\log_3 \frac{5}{3}} = \log_{\frac{5}{3}} \frac{4}{3} < 0$, т.к. $\frac{5}{3} > \frac{4}{3}$ => корней при $y>0$ нет =>

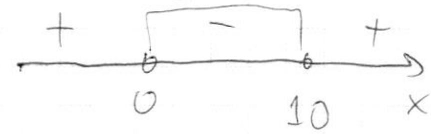
=> левая часть (*) возр. при $y>0$, а правая явл. константой

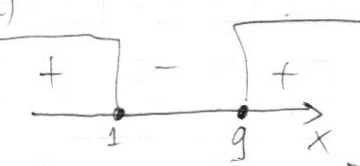
$y^{\log_3 \frac{5}{3}} - y^{\log_3 \frac{4}{3}} \le 1$

Подставим $y = 9 = 3^2$: $3^{2\log_3 \frac{5}{3}} - 3^{2\log_3 \frac{4}{3}} = \frac{25}{9} - \frac{16}{9} = 1$

Т.к. левая часть возраст., то для $\forall y > 9$ нер-во не выполняется, а для $\forall y \le 9$ — выполняется => $0 < y \le 9$

$\begin{cases} 10x - x^2 > 0 \\ 10x - x^2 \le 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 10x < 0 \ (1) \\ x^2 - 10x + 9 \ge 0 \ (2) \end{cases}$

(1) 

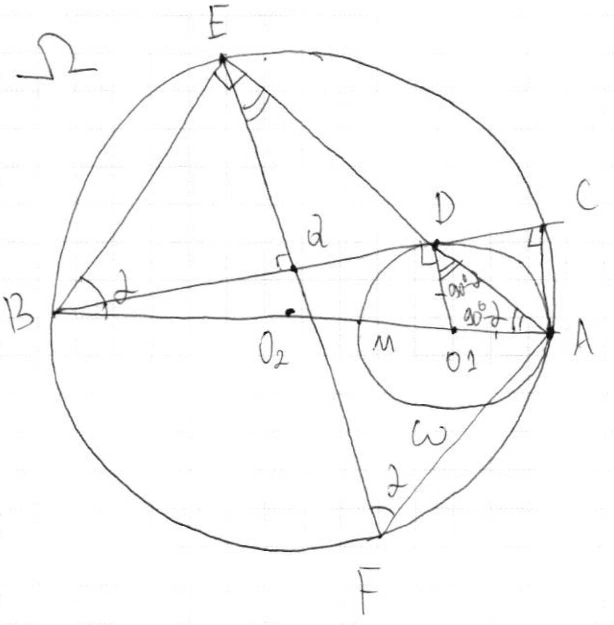
(2) 

$\frac{D}{4} = 25 - 9 = 16 \qquad x = \left[\begin{array}{l} 9 \\ 1 \end{array}\right.$

Ответ: $x \in (0; 1] \cup [9; 10)$

Задача 4.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)



1) BC – кас $\Rightarrow \angle BDO_1 = 90^\circ$

$\triangle BDO_1 \sim \triangle BCA \Rightarrow \frac{r}{AC} = \frac{O_1D}{AC} = \frac{BD}{BC} = \frac{17}{17+15} = \frac{17}{32}$

$r = O_1D$

$R = O_2B$

По т. Пифагора для $\triangle ABC$:

$AC^2 + BC^2 = 4R^2$

$AC^2 + 16^2 = 4R^2$

$AC = \frac{32}{17} r$

$\frac{32^2}{17^2} r^2 + 16^2 = 4R^2$

По св-ву отрезков касательных: $BD^2 = BM \cdot BA = (2R - 2r) \cdot 2R$

Пусть $2r = x$; $2R = y$

$$\begin{cases} \frac{16^2}{17^2} \cdot x^2 + 16^2 = y^2 \ (1) \\ (2)\ \frac{17^2}{4} = (y - x) \cdot y \end{cases}$$

(2): $\frac{17^2}{4y} = y - x$

$x = y - \frac{17^2}{4y}$

(1) $\cancel{\frac{16^2}{17^2} x^2 + 16^2} = \frac{16^2}{17^2}\left(y - \frac{17^2}{4y}\right)^2 + 16^2 = y^2$

$16^2\left(\frac{y}{17} - \frac{17}{4y}\right)^2 + 16^2 = y^2$

$16^2\left(\frac{y^2}{17} - \frac{17}{4}\right)^2 + 16^2 y^2 = y^4$

$16^2\left(\frac{y^4}{17^2} - \frac{y^2}{2} + \frac{17^2}{4^2}\right) + 16^2 y^2 = y^4$

$y^4 - \frac{16^2}{17^2} y^4 + \frac{16^2}{2} y^2 - 16^2 y^2 - 17^2 4^2 = 0$

$y^4 - \frac{256}{289} y^4 + \frac{y^2}{2} - 256 y^2 - \frac{289}{16} = 0$

$\frac{33}{289} y^4 - \frac{511}{2} y^2 - \frac{289}{16} = 0$

$\cancel{D = \frac{511^2}{4} + \frac{289}{4} \cdot \frac{33}{289} = \frac{511^2}{4} + \frac{33}{4}} = \frac{511^2 + 33}{4}$

$y^4 - \frac{256}{289} y^4 + 128 y^2 - 256 y^2 - 17^2 \cdot 4^2 = 0$

$\frac{33}{289} y^4 - 128 y^2 - 17^2 \cdot 4^2 = 0$

$\frac{D}{4} = 64^2 + 33 \cdot 4^2 = 2^{12} + 33 \cdot 16 = 4096 + 33 \cdot 16 = 4624 = 16 \cdot 289 = 4^2 \cdot 17^2$

$y^2 = \frac{64 + 4 \cdot 17}{\frac{33}{289}} = (64 + 68) \cdot \frac{289}{33} = \frac{132}{33} \cdot 289 = 4 \cdot 289 \Rightarrow y = 2 \cdot 17 = 34 \Rightarrow$

$\Rightarrow R = 17 = R_\Omega$

$\begin{array}{r} 33 \\ \times 16 \\ \hline 198 \\ +33\ \ \\ \hline 528 \\ +4096 \\ \hline 4624 \end{array}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x = 2r = 34 - \frac{289}{4\cdot 34} = 34 - \frac{17^2}{8\cdot 17} = 34 - \frac{17}{8}$

$r = 17 - \frac{17}{\cancel{8}16} = \cancel{\frac{136-17}{8} = \frac{119}{8} = r_\omega} = \frac{17\cdot 16 - 17}{16} = 16 = r_\omega$

2) $\angle AFE = \angle ABE \overset{=\alpha}{}$ − опираются на одну дугу

BA − диаметр $\Rightarrow \angle BEA = 90^\circ \Rightarrow \angle BAE = 90^\circ - \alpha$

$r = O_1A$ − радиус; $r = O_1D$ − радиус ($\angle BDO_1 = 90^\circ$) $\Rightarrow \angle O_1AD = \angle O_1DA = 90^\circ - \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BO_1D = 180^\circ - 2\alpha$

$\cancel{BO_1 = \sqrt{BD^2 + O_1D^2} = \sqrt{\frac{17^2}{4} + \left(\frac{119}{8}\right)^2}}$

$\cancel{tg(180^\circ - 2\alpha) = -tg2\alpha = \frac{BD}{O_1D} = \frac{17}{2}\cdot\frac{8}{119} = \frac{17\cdot 4}{119} = \frac{68}{119}}$

$\cancel{tg2\alpha = -\frac{68}{119}}$

$BO_1 = \sqrt{BD^2 + O_1D^2} = \sqrt{\frac{17^2}{4} + 16^2} = \frac{\sqrt{17^2 + 4\cdot 16^2}}{2}$

$tg(180^\circ - 2\alpha) = \frac{BD}{O_1D} = \frac{17}{2\cdot 16} = \frac{17}{32}$

$\frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} = -\frac{17}{32}$

$\frac{2tg\alpha}{tg^2\alpha - 1} = \frac{17}{32}$

$64tg\alpha = 17tg^2\alpha - 17$

$\cancel{17\alpha^2}\ 17tg^2\alpha - 64tg\alpha - 17 = 0$

$\frac{D}{4} = 32^2 + 289 = 1024 + 289 = 1313$

$tg\alpha = \frac{32 + \sqrt{1313}}{17} = tg\angle EFA$

Ответ: $R_\Omega = 17$; $r_\omega = 16$; $tg\angle EFA = \frac{32 + \sqrt{1313}}{17}$

Задача 5.

$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$

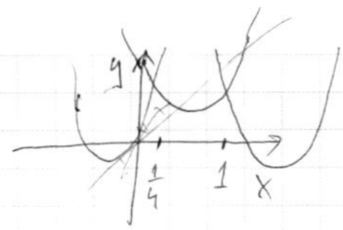
$\left[\frac{1}{4}; 1\right]$ − на данном промежутке $4x-5<0$

$$\begin{cases} ax+b \ge \frac{16x-16}{4x-5} \ (1) \\ ax+b \le -32x^2+36x-3 \ (2) \end{cases}$$

(1) $(ax+b)(4x-5) \ge 16x-16$

$4ax^2-5ax+4bx-5b\geq 16x-16$

$4ax^2-x(5a-4b+16)-5b+16\geq 0$



1) $a=0$: $-x(-4b+16)-5b+16\geq 0$

~~III. Пусть $a=b=0$~~ $x(16-4b)\leq 16-5b$

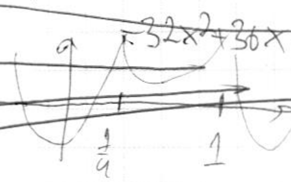
$f(x)=x(4b-16)-5b+16$ $\qquad b\neq 4$ $\quad x\leq \frac{16-5b}{16-4b}$

$\begin{cases} f(\frac{1}{4})\geq 0 \\ f(1)\geq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b-4-5b+16\geq 0 \\ 4b-16-5b+16\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4b\geq -12 \\ -b\geq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b\leq 3 \\ b\leq 0\end{cases}$ $\quad b\leq 0.$

~~(2) $-32x^2+36x-3\geq ax+b$ при $a=0$; $-32x^2+36x-3\geq b$~~

~~$-32x^2+36x-3-b\geq 0$~~

~~$32x^2-36x+b+3\leq 0$ $\forall x\in[\frac{1}{4};1]$~~



~~$\begin{cases} f(1)>0 \\ f(\frac{1}{4})>0\end{cases}$ $\quad f_0=\frac{36}{64}=\frac{9}{16}$~~

~~32.~~

2) $a\neq 0$ ~~$4ax^2-5ax+4$~~

$4ax^2-x(5a-4b+16)-5b+16\geq 0$

$f_0=\frac{5a-4b+16}{8a}$

$f(1)=4a-5a+4b-16-5b+16=-a-b\geq 0 \Rightarrow a+b\leq 0$

$f(\frac{1}{4})=\frac{a}{4}-\frac{5}{4}a+b-4-5b+16=-a-4b+12\geq 0$

$a+4b\leq 12$

$\frac{5a-4b+16}{8a}$

Задача 2

$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-12y=\sqrt{2y(x-6)-(x-6)} \\ (x-6)^2+(6y-3)^2=90\end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x-12y=\sqrt{(2y-1)(x-6)} \\ (x-6)^2+9(2y-1)^2=90\end{cases}$

ОДЗ: $x-12y\geq 0$; Замена $a=x-6$; $b=2y-1$ $(x-12y=a-6b)$

$\begin{cases} (a-6b)^2=ab \\ a^2+9b^2=90\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2-12ab+36b^2=ab \\ a^2+9b^2=90\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-13ab+36b^2=0 & (1) \\ a^2+9b^2=90 & (2)\end{cases}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(1) $a^2-13ab+36b^2=0$

$D=169b^2-144b^2=25b^2$

$a=\frac{13b\pm 5b}{2}=\left[\begin{array}{l}\cancel{\frac{b}{2}} \quad 9b\\ \cancel{\frac{25}{2}b} \quad 4b\end{array}\right.$

$a-6b=\left[\begin{array}{l}\frac{b}{2}-\frac{12b}{2}=-\frac{11}{2}b\geq 0 \quad b\leq 0\\ \frac{25}{2}b-\frac{12}{2}b=\frac{13}{2}b\geq 0 \quad b\geq 0\end{array}\right.$

1) $x-6=\frac{b}{2}\Rightarrow x=\frac{b}{2}+6=-\sqrt{\frac{90}{37}}+6$

$y=\frac{b+1}{2}=\frac{1-\sqrt{\frac{360}{37}}}{2}$

2) $x=\sqrt{\frac{90}{661}}+6$

$y=\frac{\sqrt{\frac{360}{661}}+1}{2}$

$a=9b$ или $a=4b$

$81b^2+9b^2=90$

$b=\pm 1$

$25b^2=90$

$b=\pm\frac{\sqrt{90}}{5}$

$a-6b=\left[\begin{array}{l}9b-6b=3b \quad b\geq 0\\ 4b-6b=2b \quad b\leq 0\end{array}\right.$

(2) 1) $a=\frac{b}{2}$

$\frac{b^2}{4}+9b^2=90$

$b^2+36b^2=360$

$b^2=\frac{360}{37}$

$b\leq 0\Rightarrow b=-\sqrt{\frac{360}{37}}$

2) $\left(\frac{25}{2}b\right)^2+9b^2=90$

$\frac{625}{4}b^2+\frac{36}{4}b^2=90$

$\frac{661b^2}{4}=90$

$b=\sqrt{\frac{360}{661}}$

$b\geq 0 \Rightarrow b=\sqrt{\frac{360}{661}}$

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=9\\ b=1\end{cases}\\ \begin{cases}b=-\frac{\sqrt{90}}{5}\\ a=-\frac{4}{5}\sqrt{90}\end{cases}\end{array}\right.$ ← из условия что при $a=9b$ $b\geq 0$, $a=4b$ $b\leq 0$

Ответ: 1) $x=15$

$y=\frac{b+1}{2}=1$

2) $x=a+6=-\frac{4}{5}\sqrt{90}+6$

$y=\frac{b+1}{2}=\frac{-\frac{\sqrt{90}}{5}+1}{2}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$ $\quad tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$2\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\sin(2\alpha+2\beta) \cancel{+\sin} = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta) = -\frac{2}{5}$ $\quad \sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$

$\begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{1}{5}\\ \sin(2\alpha+2\beta) = \frac{1}{\sqrt5}\end{cases}$ $\quad \sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$

$\boxed{\cos 2\beta = -\frac{1}{5}\cdot\sqrt5 = \frac{1}{\sqrt5}}$ $\quad \boxed{\sin 2\beta = \sqrt{1-\frac{1}{5}} = \pm\frac{2}{\sqrt5}}$

$\cancel{2\sin^2}$ $2\cos^2\beta - 1 = \frac{1}{\sqrt5}$ $\quad \cos^2\beta = \frac{1+\sqrt5}{2\sqrt5}$

$2\cos^2\beta = \frac{1+\sqrt5}{\sqrt5} \Rightarrow$ $\quad \sin^2\beta = 1 - \frac{(1+\sqrt5)^2}{20} = \frac{1}{14-2\sqrt5}{20} = \frac{7-\sqrt5}{10}$ $\quad \frac{6+2\sqrt5}{20}$

$(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)\cdot(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) =$

$= \sin\alpha\cos\alpha\cdot\cos^2\beta - \sin^2\alpha\cos\beta\sin\beta + \cos^2\alpha\cos\beta\sin\beta - \sin\alpha\cos\alpha\sin^2\beta =$

$= \sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\beta - \sin^2\beta) - \sin\beta\cos\beta(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha\cdot\cos 2\beta +$

$+ \sin\beta\cos\beta\cdot\cos 2\alpha = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt5} + \frac{1}{2}\sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5} + \cos 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1 = -\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha$

$2\sin\alpha\cos\alpha + 2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = -\cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$24 \quad \cancel{36-72+9-18}$

№2.

$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6} \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45 \end{cases}$ $\quad x - 12y \geq 0 \quad x \geq 12y$

$(x-6)^2 - 36 + (6y-3)^2 - 9 = 45$ $\quad (x+6y)^2 - 12xy - 12x - 36y = 45$

$\cancel{(x-6)^2 + (6y-3)^2 = 0}$ $\quad (x-6)^2 + (6y-3)^2 = 90$

$(x-6)^2 - 9(y-$ $\quad (x+6y)^2 - 12(xy + x + 3y) = 45$

$\cancel{x+6}$ $\quad 2\cancel{xy - 12y - x + 6} \Rightarrow$

$(x+6y)^2 - 12x(y+1)$

$\cancel{xx}$ $x^2 - 12x - 36 + 36y^2 - 36y - 9 = 0$ $\quad x^2 - 24xy + 144y^2 = 2xy - 12y - x + 6$

$x^2 - 12x - 36 + 36y^2 - 36y - 9 = 0$ $\quad x^2 - 26xy + 144y^2 + 12y + x = 6$

$144y^2 + 36y^2 - 144y - 36y$ $\quad (x - 12y)^2 - 2xy + 12y + x = 6$

$180y^2 - 180y = 45$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

$\cancel{x^2-24}$

$x^2-12x+36y(y-1)=45$

$12(2xy-x)-36y=45-(x-6y)^2$

$(x-6y)^2+24xy-12x-36y=45$

$(x-12y)^2-24xy=2xy-12y-x+6$

$(x-6y)^2+12(2xy-x-3y)=45$ +

$(x-6y)^2+24xy \cancel{-12} =12x+36y+45$

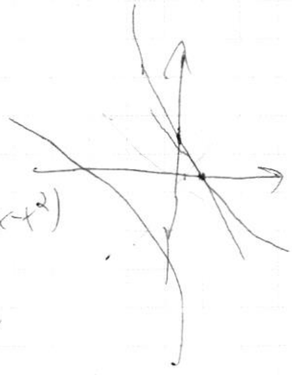
$(x-12y)^2+(x-6y)^2= \cancel{2xy} \; 2xy+24y+12x+51$

$x^2-24xy+144y^2=2xy-12y-x+6$

$$\begin{cases} x^2-26xy+144y^2+12y+x-6=0 \\ x^2+36y^2-12x-36y-45=0 \end{cases}$$

$(x-\cancel{169}13y)^2-25y^2+12y+x-6=0$

$(x-6)^2+(6y-3)^2=90$



№3. $10x+(x^2-10x)^{\log_3 4}\geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

ОДЗ: $10x-x^2>0$ $\quad 10x+(10x-x^2)^{\log_3 4}\geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

$y=10x-x^2>0$ $\quad (10x-x^2)^{\log_3 4}-5^{\log_3(10x-x^2)}\geq x^2-10x$

$y^{2\log_3 2^4}-5^{\log_3 y}\geq -y$ $\quad \log_3 5$

$y^{\log_3 4}=5^{\log_5 y\cdot\log_3 4}$ $\quad 5^{\log_3 y}=5^{\frac{\log_5 y}{\log_5 3}}=y^{\frac{1}{\log_5 3}}$

$-y^{\log_3 4}+y^{\log_3 5}\cancel{\geq}\, y$

$y^{\log_3 4}-y^{\log_3 5}\geq -y$

$y=0$

$y^{\log_3 5}-y^{\log_3 4}\leq y$ $\quad \left[y(y^{\log_3 5-1}-y^{\log_3 4-1}-1)\geq 0 \right.$

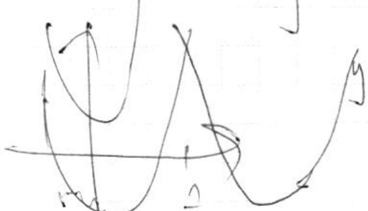
$\frac{4(4x-3)+16}{4x-5}=4+\frac{4}{4x-5}$

$y^{\log_3\frac{5}{3}}-y^{\log_3\frac{4}{3}}\leq 1$ $\quad y^{\log_3 5-1}-y^{\log_3 4-1}=1$

$\frac{4x-5+12x-11}{4x-5}$ $\quad y^{\log_3\frac{5}{3}}-y^{\log_3\frac{4}{3}}=1$

$=1+\frac{12x-11}{4x-5}$

$\log_3\frac{4}{3}+\log_3\frac{5}{4}$ $\quad t$ $\quad \log_3\frac{5}{4}$



$t^{\log_3\frac{5}{4}}-t\leq 1$

$y=9$ - подходит

$3^{\log_3\frac{25}{9}}$ $\quad \frac{25}{9}-\frac{16}{9}=1$

y^2

$\log_3\frac{5}{3}\cdot y^{-2}-\log_3\frac{4}{3}=0$

$\frac{1}{3}\cdot y^{-2}-1=0$ $\quad y^{-2}=3$ $\quad \frac{1}{y^2}=3$ $\quad y^2=\frac{1}{3}$ $\quad y_{min}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

31

$y^{-2}=\frac{\log_3\frac{4}{3}\cdot\cancel{\log_3\frac{5}{3}}}{\log_3\frac{5}{3}}=\frac{1}{y^2}>0$ $\quad \log_{\frac{5}{3}}\frac{4}{3}<0$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле) Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b$

$\cancel{\frac{16x-16}{4x-}}$ $\begin{cases} ax+b \le -32x^2+36x-3 \\ ax+b \ge \frac{16x-16}{4x-5} \end{cases}$

$x^2-12x+36y^2-48y=45+\sqrt{2xy-12y-x+6}$

$x-12y-x^2-36y^2+12$

$(x-6)^2 \cancel{-36y^2-12x-}$

$-36 \quad +(6y-3)^2-9=45$

$\cancel{f(\frac{x}{y})<0=f(x)+f(\frac{1}{y})}$

$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$

$(x-6)^2+(6y-3)^2=90$

$\sqrt{2y(x-6)-(x-6)}=$

$=\sqrt{(2y-1)(x-6)}$

$(x-6)^2+9(2y-1)^2=90$

$a^2+9b^2=90$

$121b^2-144b^2$

$x-6-6(2y-1)=x-6-12y+6=x-12y$

$\cancel{x-12y=\sqrt{}}$

$a-6b=\sqrt{ab}$

$ab=(a-6b)^2$

$(x-12y)^2=ab$

$x-12y=a-6b$

$(a-6b)^2=ab$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

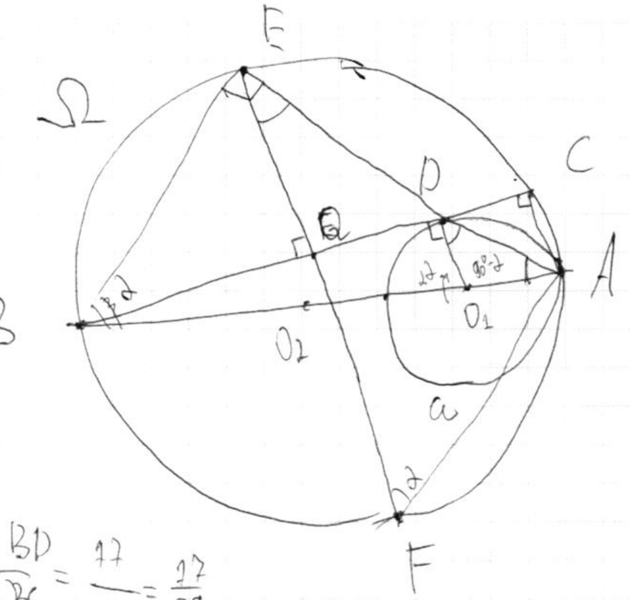
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.



$\frac{r}{AC} = \frac{O_1D}{AC} = \frac{BD}{BC} = \frac{17}{17+15} = \frac{17}{32}$

$R, r, \angle AFE, S_{AEF} - ?$

$CD = \frac{15}{2}, BD = \frac{17}{2}$

$BD^2 = (2R-2r)\cdot 2R$

$\frac{289}{4} = 4(R-r)R$

$16^2 + AC^2 = 4R^2$

$256 + \frac{32^2}{17^2} r^2 = 2R^2$

$AC = \frac{32}{17} r$

$\frac{289}{16R} = R - r$

$r = R - \frac{289}{16R}$

$256 + \frac{32^2}{17^2}\left(R - \frac{289}{16R}\right)^2 = 2R^2$

$16^2 \cdot 2^2 =$

$17 \cdot 8 = 136$, $136 - 17 = 119$

$1024 + 289 = 1313$

$\tg 2\alpha =$

$289 + 256 \cdot 4 = 1024 + 289 =$

$\tg 2\alpha = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha - 1} = \frac{2\tg\alpha}{1 - \tg^2\alpha}$

$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$2^{8\cdot 2}$

$2^{12} = 4096 + 528 = 4624$

$16 \cdot 33 = 528$

$4 \cdot 656$

$2 \cdot 1312 = 4 \cdot 656$

$1312 : 2 = 656$

$66 \cdot 66 = 396 + 396 = 56$

10

$x = \frac{17}{...}$

$(8\sqrt{2} - 17) \cdot 8\sqrt{2}$

$2 \cdot 16^2$, $8\sqrt{2}$

$4624 : 16 = 289$

$4 \cdot 2 \cdot 328 = 4 \cdot$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)