МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6},\\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4

Дано: окр-ти Ω, ω

$\Omega \cap \omega = A$

AB - диаметр Ω

$\{B, C\} \in \Omega$ $BC \cap \omega = D$

$AD \cap \Omega = E$

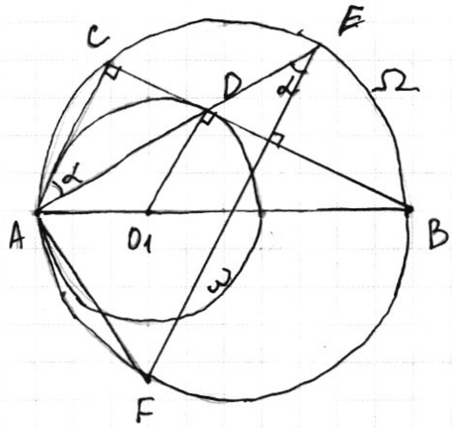
$EF \perp BC$, $F \in \Omega$

$CD = \frac{15}{2}$ $BD = \frac{17}{2}$

$R = ?$ $r = ?$ $\angle AFE = ?$

$S_{AEF} = ?$

Решение:



~~ABдAB~~

O_1 - центр ω

r - радиус ω

R - радиус Ω

1) $BC = BD + CD$ (св-во изм. отр.) $= 16$

2) $\angle ACB$ - впис, опир на AB; AB - диаметр $\Rightarrow \angle ACB = 90^\circ$ (по св-ву)

3) BC - касат к ω; O_1D - радиус, провед в т. кас. $\Rightarrow O_1D \perp BC$ (по св-ву касат.)

4) $O_1D \perp BC$; $\angle ACB = 90^\circ \Rightarrow AC \perp BC$ (по опр.) $\Rightarrow AC \parallel O_1D$ (по признаку)

5) $AC \perp BC$; $EF \perp BC$ $\Rightarrow AC \parallel EF$ (по признаку)

6) $AC \parallel O_1D \Rightarrow \triangle BDO_1 \sim \triangle BCA$ (по ~~-~~ т. о под $\triangle$)

7) $\triangle BDO_1 \sim \triangle BCA \Rightarrow \frac{O_1D}{AC} = \frac{BD}{BC} = \frac{BO_1}{AB}$ (по опр. под. $\triangle$)

$\frac{BO_1}{AB} = \frac{O_1D}{AC} = \frac{BD}{BC}$ $\frac{r}{AC} = \frac{\frac{17}{2}}{16} = \frac{17}{32}$

$\frac{BO_1}{AB} = \frac{17}{32}$ $AB = 2R$ (т.к. AB-диаметр ~~св-во изм. отр.~~) $BO_1 = AB - AO_1 = 2R - r$ (св-во изм. отр.)

$\frac{2R - r}{2R} = \frac{17}{32}$ $64R - 32r = 34R$

$32r = 30R$ $16r = 15R$ $r = \frac{15}{16}R$

8) По т. Пифагора для $\triangle ABC$: $AB^2 = BC^2 + AC^2$

$$4R^2 = 16^2 + \frac{32^2}{17^2} \cdot r^2$$

$$R^2 = 64 + \frac{16^2}{17^2} \cdot \frac{15^2}{16^2} \cdot R^2$$

$$R^2\left(1 - \frac{15^2}{17^2}\right) = 64$$

$$R^2 \frac{2 \cdot 32}{17^2} = 64 \qquad R^2 = 17^2 \qquad R = 17 \qquad r = \frac{15 \cdot 17}{16} = \frac{255}{16}$$

9) по т. синусов для $\triangle AFE$: $\frac{AE}{\sin\angle AFE} = 2R$

10) по т. Пифагора для $\triangle ACD$: $AD^2 = AC^2 + CD^2$ $\qquad AC = \frac{32}{17} r = \frac{32}{17} \cdot \frac{15 \cdot 17}{16} = 30$

$$AD = \sqrt{30^2 + \frac{15^2}{4}} = \sqrt{\frac{3600 + 225}{4}} = \frac{15}{2}\sqrt{17}$$

11) по т о пересек. хордах в окр-ти: $CD \cdot BD = AD \cdot DE$

$$\frac{15}{2} \cdot \frac{17}{2} = \frac{15}{2} \cdot \sqrt{17} \cdot DE \qquad DE = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

12) $AE = AD + DE = \frac{15}{2}\sqrt{17} + \frac{\sqrt{17}}{2} = 8\sqrt{17}$ (св-во цм. отр.)

13) $\sin\angle AFE = \frac{AE}{2R} = \frac{8\sqrt{17}}{2 \cdot 17} = \frac{4\sqrt{17}}{17}$ (из пункта 9)

$$\angle AFE = \arcsin\frac{4\sqrt{17}}{17}$$

14) $\left.\begin{array}{l} AC \parallel EF \\ \angle CAD \text{ и } \angle DEF \text{ н/л} \\ AE - \text{сек.} \end{array}\right\} \Rightarrow \angle CAD = \angle DEF$ (по св-ву пар пр) $= \alpha$

15) $\triangle ACD$: $\sin\alpha = \frac{CD}{AD} = \frac{15/2}{15/2 \cdot \sqrt{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$ (по опр.) $\quad \cos\alpha = \frac{AC}{AD} = \frac{30 \cdot 2}{15 \cdot \sqrt{17}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$

16) по т. синусов для $\triangle AFE$: $\frac{AF}{\sin\alpha} = 2R \qquad AF = 2R \cdot \sin\alpha = 2 \cdot 17 \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} = 2\sqrt{17}$

17) по т. косинусов для $\triangle AFE$: $AF^2 = AE^2 + EF^2 - 2 \cdot AE \cdot EF \cdot \cos\alpha$

$$4 \cdot 17 = 64 \cdot 17 + EF^2 - 2 \cdot 8\sqrt{17} \cdot EF \cdot \frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$EF^2 - 64EF + 60 \cdot 17 = 0$$

$$D = 64^2 - 4 \cdot 60 \cdot 17 = 4^2(256 - 15 \cdot 17) = 4^2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$EF = \frac{64 \pm 4}{2} = \left[\begin{array}{l} EF = 34 \\ EF = 30 \end{array}\right.$ – не может быть, т.к. $AC = 30$, но $AC \neq EF$

$EF = 34$

18) $S_{AEF} = \frac{AE \cdot EF \cdot AF}{4R}$ (по ф-ле площ.) $= \frac{8 \cdot \sqrt{17} \cdot 34 \cdot 2\sqrt{17}}{4 \cdot 17} = 136$

Ответ: $R = 17$ $r = \frac{255}{16}$ $\angle AFE = \arcsin \frac{4\sqrt{17}}{17}$ $S_{AEF} = 136$

№ 1

$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$ $\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$2\sin(2\alpha + 2\beta) \cdot \cos 2\beta = -\frac{2}{5}$

$2 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \cdot \cos 2\beta = -\frac{2}{5}$ $\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\beta = \pm\sqrt{1 - \cos^2 2\beta} = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\left[\begin{array}{l} \sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1 \ (1) \\ \sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha = -1 \ (2) \end{array}\right.$

(1): $\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1$

$2\sin\alpha \cdot \cos\alpha + 2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = -1$

$2\sin\alpha \cdot \cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha = -1 \quad \div \cos^2\alpha$ $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$

$\cos^2\alpha \neq 0$

$2\operatorname{tg}\alpha + 2 - 2(\operatorname{tg}^2\alpha) = -\frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ $\quad -\frac{1}{\cos^2\alpha} = -tg^2\alpha - 1$

$2tg\alpha + 2 - 2tg^2\alpha = -tg^2\alpha - 1$

$tg^2\alpha - 2tg\alpha - 3 = 0$

$\left[\begin{array}{l} tg\alpha = -1 \\ tg\alpha = 3 \end{array}\right.$

(2): $\sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha = -1$

$2\sin\alpha \cdot \cos\alpha - 2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = -1$

$2\sin\alpha \cdot \cos\alpha - 2\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha = -1 \quad \div \cos^2\alpha$

$\cos^2\alpha \neq 0$

$2tg\alpha - 2 + 2tg^2\alpha = -\frac{1}{\cos^2\alpha} = -tg^2\alpha - 1$

$3tg^2\alpha + 2tg\alpha - 1 = 0 \qquad D = 4 + 4\cdot 3 = 4^2$

$tg\alpha = \frac{-2 \pm 4}{6} = \left[\begin{array}{l} tg\alpha = -1 \\ tg\alpha = \frac{1}{3} \end{array}\right.$

Ответ: $tg\alpha = -1$; $tg\alpha = 3$; $tg\alpha = \frac{1}{3}$

№2

$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6} \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45 \end{cases}$

$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2y(x-6) - (x-6)} \\ x^2 - 12x + 36 + 36y^2 - 36y + 9 = 90 \end{cases}$

$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{(2y-1)(x-6)} \\ (x-6)^2 + 9(\cancel{2y}\ 2y-1)^2 = 90 \end{cases}$

пусть $2y - 1 = a \qquad x - 6 = b$

$12y - 6 = 6a \qquad x = b + 6$

$12y = 6a + 6$

$\begin{cases} b + 6 - 6a - 6 = \sqrt{ab} \\ b^2 + 9a^2 = 90 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} b - 6a = \sqrt{ab} \\ b^2 + 9a^2 = 90 \end{cases}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} b^2 - 12ab + 36a^2 = ab \ (1) \\ b - 6a \geq 0 \\ b^2 + 9a^2 = 90 \end{cases}$$

(1): $b^2 - 13ab + 36a^2 = 0 \quad a \neq 0$

$\div a^2$: $\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 13\left(\frac{b}{a}\right) + 36 = 0 \quad D = 13^2 - 36\cdot 4 = 5^2$

$$\frac{b}{a} = \frac{13 \pm 5}{2} = \left[\begin{array}{l} 9 \\ 4 \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} b = 4a \\ b = 9a \end{array}\right. \\ b - 6a \geq 0 \\ b^2 + 9a^2 = 90 \end{cases} \quad \begin{cases} b = 9a \\ b - 6a \geq 0 \\ b^2 + 9a^2 = 90 \end{cases} \quad \begin{cases} b = 9a \\ b - 6a \geq 0 \\ 81a^2 + 9a^2 = 90 \end{cases} \quad \begin{cases} b = 9a \\ b - 6a \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = -1 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} 2y - 1 = 1 \\ x - 6 = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 1 \\ x = 15 \end{cases}$$

Ответ: $(15; 1)$

№3 $\quad 10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$

ОДЗ: $10x - x^2 > 0 \qquad 0 < x < 10$

$$10x + (10x - x^2)^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$$

$$10x - x^2 + (10x - x^2)^{\log_3 4} - (10x - x^2)^{\log_3 5} \geq 0$$

$$(10x - x^2)^{\log_3 3} + (10x - x^2)^{\log_3 4} - (10x - x^2)^{\log_3 5} \geq 0$$

$$\underbrace{(10x - x^2)^{\log_3 3}} \left(1 + (10x - x^2)^{\log_3 4 - 1} - (10x - x^2)^{\log_3 5 - 1}\right) \geq 0$$

из-за ОДЗ это выражение всегда > 0

$$\Rightarrow 1 + (10x - x^2)^{\log_3 4 - 1} - (10x - x^2)^{\log_3 5 - 1} \geq 0$$

$$10x - x^2 = t$$

$1 + t^{\log_3 4 - 1} - t^{\log_3 5 - 1} \geq 0$

$\log_3 4 - 1 < \log_3 5 - 1$

если ~~$t \in$~~ $0 < t < 1$, то равенство выполняется при всех x из ОДЗ, т.к. $t^{\log_3 4 - 1} > t^{\log_3 5 - 1}$ при $0 < t < 1$, но

$1 > t^{\log_3 4 - 1} > t^{\log_3 5 - 1}$

значит разница их не превосходит 1 и когда ещё прибавляем 1 неравенство остается верным.

~~$0 < t < 10 \Rightarrow t^{\log_3 4 - 1} > 0$~~

~~$\div$ нер-во на $t^{\log_3 4 - 1}$~~

~~$\frac{1}{\log} \quad \frac{1}{t^{\log_3 4 - 1}} + 1 - t^{\log_3 5 - 1 - \log_3 4 + 1} \geq 0$~~

~~$t^{1 - \log_3 4} - t$~~

если $t \in (1; 10)$, то $t^{\log_3 5 - 1} > t^{\log_3 4 - 1}$ и разница будет отрицательна $\Rightarrow$ для нер-ва она не должна быть меньше „-1"

№5

$f(ab) = f(a) + f(b) \qquad f(p) = \left[\frac{p}{4}\right] \qquad 2 \leq x \leq 25$

$2 \leq y \leq 25$

простые числа от $[2; 25]$

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \qquad f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) \qquad f(xy) = f(x) + f(y)$

если x-простое ~~числ~~

$f(x) = \left[\frac{x}{4}\right]$

~~т.к. x и y не могут быть простыми числами~~

№6

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \\ -32x^2+36x-3 \ge ax+b \end{cases} \qquad x \in \left[\frac{1}{4}; 1\right]$$

$$\begin{cases} \frac{16(x-1)}{4x-5} \le ax+b \\ -32x^2+36x-3-ax-b \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{16x-16-(4x-5)(ax+b)}{4x-5} \le 0 \\ 32x^2+(a-36)x+b+3 \le 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{16x-16-4ax^2-4xb+5ax+5b}{4x-5} \le 0 \\ 32x^2+(a-36)x+b+3 \le 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{-4ax^2+x(16-4b+5a)+5b-16}{4x-5} \le 0 \\ 32x^2+(a-36)x+b+3 \le 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{4ax^2-x(16-4b+5a)-5b+16}{4x-5} \ge 0 \\ 32x^2+(a-36)x+b+3 \le 0 \quad (1) \end{cases}$$

(1) $\cancel{32x^2+(a-36)x+b+3=0}$

$\cancel{D=(a-36)^2-4\cdot 32\cdot(b+3)=a^2-72a+36^2-4\cdot 32\cdot 3-128b=}$

$=$

(1) – парабола, ветви вверх

$b=-3$

$$\frac{4ax^2-x(28+5a)+31}{4x-5} \ge 0$$

$$\frac{16x-16}{4x-5} \le -32x^2+36x-3$$

$$\frac{16x-16}{4x-5} + 32x^2-36x+3 \le 0$$

$$\frac{(16x-16)+(4x-5)(32x^2-36x+3)}{4x-5}\leq 0$$

$$\frac{16x-16+32\cdot 4x^3-36\cdot 4x^2+12x-5\cdot 32x^2+5\cdot 36x-15}{4x-5}\leq 0$$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

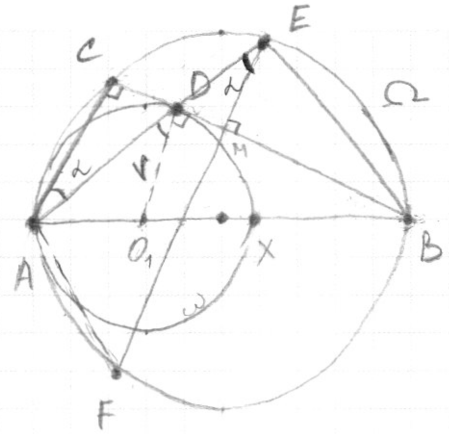
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$R=17$

$r=\frac{15\cdot17}{16}$



$R=?$ $r=?$ $\angle AFE=?$ $S_{AEF}=?$

$CD=\frac{15}{2}$. $BD=\frac{17}{2}$

$\frac{BD}{BC}=\frac{r}{AC}$ $\quad \frac{17}{32}=\frac{r}{AC}$

$BC=16$ $\quad BD=\frac{17}{2}$

$\frac{AD}{DE}=\frac{CD}{DM}$

$BD^2=BX\cdot 2\cdot R$

$\frac{BO_1}{2R}=\frac{17}{32}$

$4R^2=16^2+\frac{32^2}{17^2}r^2$

$R^2=64+\frac{16^2}{17^2}r^2$

$\frac{2R-r}{2R}=\frac{17}{32}$ $\quad AD\cdot DE=CD\cdot DB$

$BD^2=BX\cdot 2R$ $\quad BX=2R-2r$

$64R-32r=34R$

$\frac{17^2}{4}=4R^2-4Rr$ $\quad \frac{17^2}{4}=4R(R-r)$

$32r=30R$ $\quad 16r=15R$

$r=\frac{15R}{16}$

$\frac{17^2}{4}=4R^2-\frac{4\cdot15R^2}{16}$ $\quad 3825$

$17^2=4R^2$ $\quad R=17^2\cdot4$ $\quad r=\frac{15\cdot17}{16}$

$\frac{17^2}{4}=\frac{64-60}{16}R^2$

$\frac{AE}{\sin\angle AFE}=2R$

$AD=\sqrt{AC^2+CD^2}=$

$AC=\frac{32}{17}r=\frac{32}{17}\cdot\frac{15\cdot17}{16}=30$

$=\sqrt{30^2+\frac{15^2}{4}}=\sqrt{\frac{3600+225}{2}}=$

$=\frac{5\sqrt{153}}{2}=\frac{15}{2}\sqrt{17}$ $\quad \sqrt{153}=3\cdot51$

$AD\cdot DE=CD\cdot BD$

$\frac{15}{2}\sqrt{17}\cdot DE=\frac{15}{2}\cdot\frac{17}{2}$

$AE=AD+DE=\left(\frac{15}{2}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{17}=8\sqrt{17}$

$DE=\frac{17}{2\sqrt{17}}=\frac{\sqrt{17}}{2}$

$\frac{8\sqrt{17}}{\sin\angle AFE}=2\cdot17$ $\quad \sin\angle AFE=\frac{4\sqrt{17}}{17}$

$\cos\alpha=\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\cancel{S_{AEF}}$ $\quad \sin\alpha=\frac{CD}{AD}=\frac{15/2}{15/2\cdot\sqrt{17}}=\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\frac{2\sqrt{17}}{8\sqrt{17}}$ $\quad \frac{AF}{\sin\alpha}=2R$ $\quad AF=2\cdot17\cdot\frac{1}{\sqrt{17}}=2\sqrt{17}$

3825 | 5 ; 765 | 5 ; 153

$15\times17=255$

30

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$EF = \frac{64 \pm 4}{2} = \left[\begin{array}{l} \frac{68}{2} = 34 \\ 30 \quad > AC \end{array} \right.$

$S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R} = \frac{34 \cdot 2\sqrt{17} \cdot 8\sqrt{17}}{4 \cdot 17} = \cancel{1088}$

$\begin{array}{r} 34 \\ \times\ 4 \\ \hline 136 \end{array}$

$(x, y) \quad 2 \le x \le 25$

y

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

2 3 5 7 11 13 17

19 23

$\log_3 4 - 1 - \log_3 5 + 1$

$t^{\log_3 \frac{4}{5}} + t^{-\log_3 5 + 1} \ge 0$

$1 + t^{\log_3 4 - 1} - t^{\log_3 5 - 1} \geqslant 0$

$t^{\log_3 4 - 1} - t^{\log_3 5 - 1} = 0$

$\log_3 4 - 1$

$t^{\log_3 4 - 1} - t^{\log_3 5 - 1} \geqslant -1$

$t^{\log_3 5 - 1} - t^{\log_3 4 - 1} \le 1$

$t^{\log_3 5 - 1} - t^{\log_3 4 - 1} \le \log_3 3$

$t^{\log_t 0}$

$D = 36^2 - 4 \cdot 3 \cdot 32 =$

$= 4(18^2 - 3 \cdot 32)$

$\begin{array}{r} 6 \\ 18 \\ 18 \\ 144 \\ 18 \\ 96 \end{array}$

$x^3 - x^2 \le x^0$

$\begin{array}{r} 324 \\ -\ 96 \\ \hline 228 \end{array}$

$228 \,|\, 4 = 57$; -20, 28

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad \sin(2(\alpha+\beta))=-\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$2\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin2\alpha\cdot\cos2\beta+\sin2\beta\cdot\cos2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha=-\frac{2}{5}$

$2\sin(2(\alpha+\beta))\cdot\cos2\beta=-\frac{2}{5}$

$\sqrt5$, 2, 1

$\cancel{2}\left(\cancel{-}\frac{1}{\sqrt5}\right)\cdot\cos2\beta=\cancel{-}\frac{\cancel{2}}{5}$ $\quad \cos2\beta=\frac{1}{\sqrt5}$

$$\left[\begin{array}{l}\sin2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5}+\frac{2}{\sqrt5}\cdot\cos2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}\\ \sin2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5}-\frac{2}{\sqrt5}\cdot\cos2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\sin2\alpha+2\cos2\alpha=-1\ (1)\\ \sin2\alpha-2\cos2\alpha=-1\end{array}\right.$$

(1) $2\sin\alpha\cdot\cos\alpha+2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=-1$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$2\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha-2\sin^2\alpha=-1$

$tg^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\cos^2\alpha=0$ не явл. реш.

$2+2\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)-2\cdot tg^2\alpha=-\frac{1}{\cos^2\alpha}=-1-tg^2\alpha$

$tg^2\alpha-2tg\alpha-3=0$

$D=4+3\cdot4=16$ $\quad tg\alpha=\frac{2\pm4}{2}=\left[\begin{array}{l}3\\-1\end{array}\right.$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha-2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=-1$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha-2\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha+1=0$

$2tg\alpha-2+2tg^2\alpha+tg^2\alpha+1=0$

$3tg^2\alpha+2tg\alpha-1=0$ $\quad D=4+4\cdot3=16$

$tg\alpha=\frac{-2\pm4}{6}=\left[\begin{array}{l}\frac13\\-1\end{array}\right.$

$$\left\{\begin{array}{l}x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}\\ x^2+36y^2-12x-36y=45\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l}x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}\\ (x-6)^2+9(2y-1)^2=90\end{array}\right.$$

$x^2-2\cdot6\cdot x+36+9(4y^2-4y+1)=90$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$x-12y=\sqrt{2y(x-6)-(x-6)}$

$\begin{cases} x-12y=\sqrt{(2y-1)(x-6)} \\ (x-6)^2+9(2y-1)^2=90 \end{cases}$ $(2y-1)=a$ $x-6=b$ $x=b+6$ $12y-6=6a$ $b-6a\geq 0$

$\begin{cases} b+6-6a-6=\sqrt{ab} \\ b^2+9a^2=90 \end{cases}$ $\begin{cases} b-6a=\sqrt{ab} \\ b^2+9a^2=90 \end{cases}$ $\begin{cases} b^2-12ab+36a^2=ab \\ b^2+9a^2=90 \end{cases}$

$b^2-13ab+36a^2=0$

$\left(\frac{b}{a}\right)^2-13\left(\frac{b}{a}\right)+36=0$ $D=13^2-36\cdot 4=5^2$ $169-144$

$\frac{13\pm 5}{2}=\left[\begin{array}{l}9\\4\end{array}\right.$ $\frac{b}{a}=9$ $\frac{b}{a}=4$

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=1\\b=9\end{cases}\\ \begin{cases}a=-1\\b=-9\end{cases}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2y-1=1\\x-6=9\end{cases}\\ \begin{cases}2y-1=-1\\x-6=-9\end{cases}\end{array}\right.$

$\frac{b}{a}=9$ $b=9a$ $81a^2+9a^2=90$

не подх по ОДЗ

$b=4a$ – п.к.

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=1\\x=15\end{cases}\\ \begin{cases}y=0\\x=-3\end{cases} \text{ – не подх.}\end{array}\right.$

3. $10x+|x^2-10x|^{\log_3 4}\geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

$10x-x^2>0$

$10x+(10x-x^2)^{\log_3 4}\geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$ $10x-x^2>0$

$10x+(10x-x^2)^{\log_3 4}\geq x^2+(10x-x^2)^{\log_3 5}$

$10x-x^2+(10x-x^2)^{\log_3 4}-(10x-x^2)^{\log_3 5}\geq 0$

$(10x-x^2)^{\log_3 3}+(10x-x^2)^{\log_3 4}-(10x-x^2)^{\log_3 5}\geq 0$

$\underbrace{(10x-x^2)^{\log_3 3}}_{>0}\left((10x-x^2)^{\log_3 \frac{4}{3}}-(10x-x^2)^{\log_3\frac{5}{3}}+1\right)\geq 0$

≥ 0

$(10x-x^2)^{\log_3\frac{4}{3}}-(10x-x^2)^{\log_3\frac{5}{3}}+1\geq 0$ $\log_3 4-1<\log_3 5-1$

$t^{\log_3\frac{4}{3}}-t^{\log_3\frac{5}{3}}+1\geq 0$ $t^{\log_3 4-1}-t^{\log_3 5-1}+1\geq 0$

$0<t<1$ неравенство верно при любом значении t из данного промежутка

$t>1$ то разность t всегда <0

$t^{\log_3 4-1}-t^{\log_3 5-1}+1\geq 0$

$AF^2=EF^2+AE^2-2\cdot EF\cdot AE\cdot\cos\alpha$

$4\cdot 17=EF^2+64\cdot 17-2\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}\cdot 8\sqrt{17}\cdot EF$

$15\times 17=105+15=255$

$EF^2-64EF+60\cdot 17=0$ $D=64^2-4\cdot 60\cdot 17=4(32^2-60\cdot 17)=4^2$

$32^2\cdot 4$ $4\cdot 4(256-15\cdot 17)$ $16^2\cdot 2^2$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)