МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2}, \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 27$, $3 \leqslant y \leqslant 27$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geqslant ax+b \geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1; 3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR = 2$, $QS = 1$, $PS = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

© МФТИ, 2022

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\cdot\sin\left(\frac{4\alpha+4\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(-\frac{4\beta}{2}\right) =$

$= 2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{8}{17};$

$\cos 2\beta = \dfrac{-\frac{8}{17}}{2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)} = \frac{4}{\sqrt{17}};$

$\sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\cos^2 2\beta} = \pm\frac{1}{\sqrt{17}};$

1) $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}};$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = \sin 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} +$
$+ \cos 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}};$

$4\cdot\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = (8\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha) + (2\cdot\cos^2\alpha - 1) = -1;$

$2\cdot\cos\alpha\cdot(4\cdot\sin\alpha + \cos\alpha) = 0;$

$\left[\begin{array}{l}\cos\alpha = 0, \text{ но тогда } \operatorname{tg}\alpha \text{ не определён;}\\ 4\cdot\sin\alpha+\cos\alpha = 0, \text{ и тогда } \boxed{\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{4};}\end{array}\right.$

2) $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}};$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} - \cos 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}};$

$8\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha = -1 + (1 - 2\cdot\sin^2\alpha);\quad 2\sin\alpha\cdot(4\cos\alpha + \sin\alpha) = 0;$

$\left[\begin{array}{l}\sin\alpha = 0, \text{ тогда } \boxed{\operatorname{tg}\alpha = 0;}\\ 4\cdot\cos\alpha+\sin\alpha = 0; \text{ тогда } \boxed{\operatorname{tg}\alpha = -4;}\end{array}\right.$

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha \in \left\{-\frac{1}{4}; 0; -4\right\};$

№2

Возведём первое в квадрат:

$9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2;$

Это тоже самое что:

$(4x-3y-2)\cdot(x-3y+1)=0;$

$\left[\begin{array}{l}4x-3y-2=0;\\ x-3y+1=0;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}=y;\\ \frac{1}{3}x+\frac{1}{3}=y;\end{array}\right.$

Подставим во второе:

1) $\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}=y;$

$3x^2+3\cdot\left(\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}\right)^2-6x-4\cdot\left(\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}\right)=4;$ (домножаем на 9);

$27x^2+48x^2-48x+12-54x-48x+24-36=0;$

$75x^2-150x=75x(x-2)=0;$

$\left[\begin{array}{l}x=0;\\ x=2;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0;\\ y=-\frac{2}{3};\end{cases}\\ \begin{cases}x=2;\\ y=2;\end{cases}\end{array}\right.$

$\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}=y;$

2) $3x^2+3\cdot\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right)^2-6x-4\cdot\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right)-4=0;$ (домножаем на 9);

$27x^2+3x^2+6x+3-54x-12x-12-36=0;$

$30x^2-60x-45=0;$

$2x^2-4x-3=0;$ $D=16+24=40;$

$x=\frac{4\pm2\cdot\sqrt{10}}{4}=1\pm\frac{1}{2}\cdot\sqrt{10};$

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1+\frac{\sqrt{10}}{2};\\ y=\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{10}}{6};\end{cases}\\ \begin{cases}x=1-\frac{\sqrt{10}}{2};\\ y=\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{10}}{6};\end{cases}\end{array}\right.$

Заметим, что $3xy-2x-3y+2=3\cdot(x-1)\cdot\left(y-\frac{2}{3}\right)\geq0;$

Проверим каждое решение:

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $\begin{cases} x=0; \\ y=-\frac{2}{3}; \end{cases}$

$3\cdot(-1)\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)\geq 0$ – да, подходит;

2) $\begin{cases} x=2; \\ y=2; \end{cases}$

$3\cdot(1)\cdot\left(\frac{4}{3}\right)\geq 0$ – да, подходит;

3) $\begin{cases} x=1+\frac{\sqrt{10}}{2}; \\ y=\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{10}}{6}; \end{cases}$

$3\cdot\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{10}}{6}\right)\geq 0$ – да, подходит;

4) $\begin{cases} x=1-\frac{\sqrt{10}}{2}; \\ y=\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{10}}{6}; \end{cases}$

$3\cdot\left(-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{10}}{6}\right)\geq 0$ – да, подходит;

Ответ: $\left(0; -\frac{2}{3}\right)$ и $(2;2)$ и $\left(1+\frac{\sqrt{10}}{2}; \frac{2}{3}+\frac{\sqrt{10}}{6}\right)$ и $\left(1-\frac{\sqrt{10}}{2}; \frac{2}{3}-\frac{\sqrt{10}}{6}\right)$;

№3

Заметим, что $(x^2+6x)>0$ (он находится в ~~Кон~~ $3^{\log_4(x^2+6x)}$);

И ~~в~~ $a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$; Тогда:

$t^{\log_4 3}+t\geq t^{\log_4 5}$, где $t=x^2+6x$, $t>0$;

~~Заметим~~ Разделим на t:

$t^{\log_4 \frac{3}{4}}+1\geq t^{\log_4 \frac{5}{4}}$;

Заметим, что $\log_4\frac{3}{4}<0$, а $\log_4\frac{5}{4}>0$, а тогда $x^{\log_4\frac{3}{4}}$ – убывающая, а $x^{\log_4\frac{5}{4}}$ – возрастающая, а тогда

Найдём, когда $t^{\log_4\frac{3}{4}}+1=t^{\log_4\frac{5}{4}}$, это явно при $t=8$;

$8^{\log_4\frac{3}{4}}+1=\left(4^{\log_4\frac{3}{4}}\right)^2+1=\left(\frac{3}{4}\right)^2+1=?\left(4^{\log_4\frac{5}{4}}\right)^2=\left(\frac{5}{4}\right)^2$;

$\frac{9}{16}+\frac{16}{16}=\frac{25}{16}$ – да.

А тогда, неравенство $t^{\log_4 \frac{3}{4}} + 1 \geq t^{\log_4 \frac{5}{4}}$ выполняется при всех t, где $0 < t \le 8$;

Тогда: $0 < x^2+6x \le 8$;

1) $0 < x^2+6x$; $x \in (-\infty; -6) \cup (0; \infty)$;

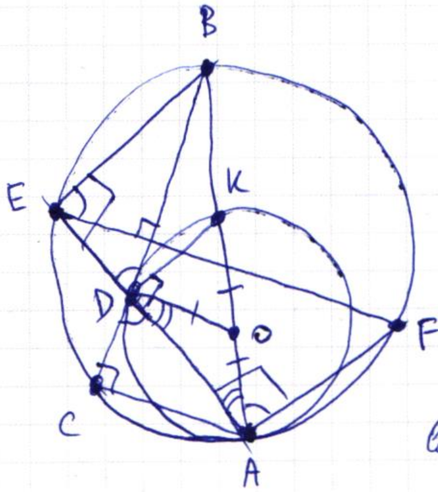
2) $x^2+6x-8 \le 0$; $D = 36+24 = 60$;

$x = \frac{-6 \pm 2\cdot\sqrt{15}}{2} = -3 \pm \sqrt{15}$; $x \in [-3-\sqrt{15}; -3+\sqrt{15}]$;

$-3-\sqrt{15} < -3-3 = -6$;

$-3+\sqrt{15} > 0$;

Ответ: $[-3-\sqrt{15}; -6) \cup (0; -3+\sqrt{15}]$;

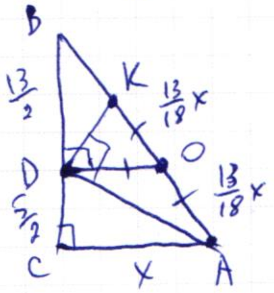


№4

$\angle BEA = \angle BCA = \angle KDA = 90^\circ$ (опираются на диаметры);

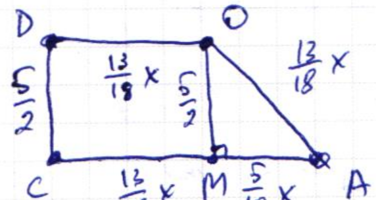
$\angle EAF = \angle EAB + \angle BAF = \angle ODA + \angle BEF =$
$= \angle ODA + \angle CDA = 90^\circ$ (забыл добавить, что т.к. BC – касательная, то $\angle ODB =$
$= 90^\circ$, т.к. O – центр ω);

Обозначим CA за x; Тогда:



$\frac{OD}{CA} = \frac{BD}{BC} = \frac{13}{18}$;

$OD = \frac{13}{18}\cdot x$;



Найдём x:

$\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{18}x\right)^2 = \left(\frac{13}{18}x\right)^2$; $45^2 + 25x^2 = 169x^2$; $\boxed{x = \frac{45}{12} = \frac{15}{4}}$;

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Радиус $\omega = \frac{13}{18}\cdot x = \frac{13}{18}\cdot\frac{15}{4} = \frac{13\cdot 5}{6\cdot 4} = \boxed{\frac{65}{24}}$

Радиус Ω:

$(2R)^2 = \left(\frac{18}{2}\right)^2 + x^2 = \left(\frac{18}{2}\right)^2 + \left(\frac{15}{4}\right)^2;$

$64R^2 = 36^2 + 15^2 = 1521 = 39^2;$

$\boxed{R = \frac{39}{8}};$

Найдём $\angle EFA$:

$\angle EFA = \angle EBA = \angle DKA = \arcsin\left(\frac{DA}{KA}\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{15}{4}\right)^2}}{2\cdot\frac{13}{18}\cdot\frac{15}{4}}\right) =$

$= \arcsin\left(\frac{\sqrt{325}\cdot 3}{65}\right) = \boxed{\arcsin\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)};$

Найдём площадь $\triangle AEF$:

1) Найдём AE:

$AE = AD\cdot\frac{R}{r} = 5\cdot\frac{\sqrt{13}}{4}\cdot\frac{\frac{39}{8}}{\frac{65}{24}} = \frac{\sqrt{13}\cdot 9}{4};$

$S_{AEF} = \frac{1}{2}AE\cdot\frac{AE}{\operatorname{tg}\angle AFE} = \frac{1}{2}\cdot AE^2\cdot\frac{\cos\angle AFE}{\sin\angle AFE} = \frac{1}{2}\cdot\frac{13\cdot 81}{16}\cdot\frac{\frac{2}{\sqrt{13}}}{\frac{3}{\sqrt{13}}} =$

$= \frac{13\cdot 81\cdot 2}{2\cdot 16\cdot 3} = \frac{13\cdot 27}{16} = \boxed{\frac{351}{16}}$

Ответ: $r = \frac{65}{24}$; $R = \frac{39}{8}$; $\angle AFE = \arcsin\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$; $S_{AEF} = \frac{351}{16}$;

№5

$f(a) = f(1) + f(a)$; $f(1) = 0$;

$f\left(a \cdot \frac{1}{a}\right) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) = f(1) = 0$;

$f\left(\frac{1}{a}\right) = -f(a)$;

$f(xy) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y)$;

Значения:

$f(3) = 0$
$f(4) = 0$
$f(5) = 1$
$f(6) = 0$
$f(7) = 1$
$f(8) = 0$
$f(9) = 0$
$f(10) = 1$
$f(11) = 2$
$f(12) = 0$
$f(13) = 3$
$f(14) = 1$
$f(15) = 1$
$f(16) = 0$
$f(17) = 4$
$f(18) = 0$
$f(19) = 4$
$f(20) = 1$
$f(21) = 1$
$f(22) = 2$
$f(23) = 5$
$f(24) = 0$
$f(25) = 2$
$f(26) = 3$
$f(27) = 0$
$f(28) = 1$
$f(29) = 7$
$f(30) = 1$

1) $f(x) = 7$

Пар: 27

2) $f(x) = 5$

Пар: 26

3) $f(x) = 3$

Пар:

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 2\cdot\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \\ 2\cdot\sin(\alpha+2\beta)\cdot\cos(\alpha+2\beta) + 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\beta = -\frac{8}{17}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \\ \sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta + \sin 4\beta\cdot\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}; \end{cases}$$

$$\cos(4\beta+4\alpha) = 1-2\sin^2(2\alpha+2\beta) = 1-2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)^2 = 1-\frac{2}{17} = \frac{15}{17};$$

$$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\cdot\sin\left(\frac{4\alpha+4\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{-4\beta}{2}\right) = 2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta) = -\frac{8}{17};$$

$$\cos 2\beta = \frac{-\frac{8}{17}}{-\frac{2}{\sqrt{17}}} = \frac{8\sqrt{17}}{2\cdot 17} = \frac{4}{\sqrt{17}}; \quad \sin 2\beta = \sqrt{1-\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right)^2} = \pm\frac{1}{\sqrt{17}};$$

1) $\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = \sin 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} + \cos 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}};$

$4\cdot\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1;$

$8\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha + (2\cdot\cos^2\alpha - 1) = -1;$

$2\cdot\cos\alpha\cdot(4\sin\alpha+\cos\alpha) = 0;$ → $tg\alpha$ нет X;

$$\left[\begin{array}{l} \cos\alpha = 0; \\ 4\cdot\sin\alpha + \cos\alpha = 0; \end{array}\right. \quad tg\alpha = -\frac{1}{4};$$

2) $\sin 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} - \cos 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}};$

$4\cdot\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1;$

$4\cdot\sin 2\alpha = -1+(1-2\cdot\sin^2\alpha);$

$2\cdot\sin\alpha = -\sin^2\alpha;$

1) $\sin\alpha = 0$, $tg\alpha = 0$;

2) $2 = -\sin\alpha$, нет $\varnothing$;

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$4\cdot\sin 2\alpha = -1+\cos 2\alpha;$

$8\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha = -2\cdot\sin^2\alpha;$

1) $\sin\alpha = 0 \rightarrow \operatorname{tg}\alpha = 0;$

2) $4\cdot\cos\alpha = -\sin\alpha;$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{4}{-1} = -4;$

$(3x-\frac{3}{\ }) \cdot (y-\frac{2}{3})$

$(\sqrt{3}x-\sqrt{3})^2 - 3 + (\sqrt{3}y-\frac{2}{\sqrt{3}})^2 - \frac{4}{3} = 4;$

$(\sqrt{3}x-\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3}y-\frac{2}{\sqrt{3}})^2 = 8\frac{1}{3} = \frac{25}{3};$

$(x-1)^2 + (y-\frac{2}{3})^2 = \frac{25}{3\sqrt{3}} = \left(\sqrt{\frac{25}{3\sqrt{3}}}\right)^2$

$9y^2 - 12xy + 4x^2 = 3xy - 2x - 3y + 2;$

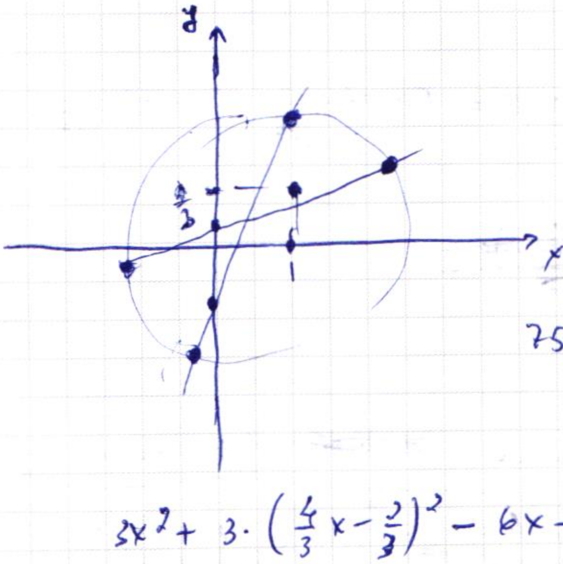
$4x^2 + 2x + 9y^2 + 3y - 15xy - 2 = 0;$

$(4x - 3y - 2)\cdot(x - 3y + 1) =$

$= (4x-3y-2)\cdot(x-3y+1) = 0;$

$\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{10}}{6} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{10}}{6};$

$\left[\begin{array}{l} 4x-3y-2=0; \\ x-3y+1=0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 4x-2=3y; \\ x+1=3y; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \frac{4}{3}x-\frac{2}{3}=y; \\ \frac{1}{3}x+\frac{1}{3}=y; \end{array}\right.$



$3x^2 + 3\cdot(\frac{1}{3}x+\frac{1}{3})^2 - 6x - 4\cdot(\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}) - 4 = 0;$

$27x^2 + 3x^2 + 6x + 3 - 54x - 12x - 12 - 36 = 0;$

$30x^2 - 48x - 45 = 0;$ $10x^2 - 16x - 15 = 0;$

$D = 256 + 600 = 856;$

$75x^2 - 150x$ ~~= 0;~~

$75x\cdot(x-2) = 0;$ $\left[\begin{array}{l} x=0; \\ x=2; \end{array}\right.$

$3x^2 + 3\cdot(\frac{4}{3}x-\frac{2}{3})^2 - 6x - 4\cdot(\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}) = 4;$ 0123457

$3x^2 + \frac{16}{3}x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{4}{3} - 6x - \frac{16}{3}x + \frac{8}{3} - 4 = 0;$

$27x^2 + 48x^2 - 48x + 12 - 54x - 48x + 24 - 36 = 0;$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$3^{\log_4(x^2+6x)} + (x^2+6x) \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}; \quad x^2+6x = t;$

1) $t > 0;$

$3^{\log_4 t} + t \geq t^{\log_4 5};$

$3^{\log_4 t} \geq t^{\log_4 5} - t = t \cdot (t^{\log_4 5 - 1} - 1) = t \cdot (t^{\log_4 \frac{5}{4}} - 1);$

$f(x) = 3^{\log_4 x} + x - x^{\log_4 5}$

$f'(x) = \ln 3 \cdot 3^{\log_4 x} \cdot \frac{1}{\ln 4 \cdot x} + 1 - \log_4 5 \cdot x^{\log_4 \frac{5}{4}} = 0;$

$a^{\log_b c} = c^{\log_b a};$

$2^{\log_4 16} = 16^{\log_4 2} = 4;$

$t^{\log_4 3} - t^{\log_4 5} + t \geq 0;$

$t^{\log_4 \frac{3}{4}} - t^{\log_4 \frac{5}{4}} + 1 \geq 0;$

$1 - t^{\log_4 5 - \log_4 3} + t^{1 - \log_4 3} \geq 0;$

$\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} \quad \left(\frac{1}{5}\right)^{2}$

$1 - t^{\log_4 \frac{5}{3}} + t^{\log_4 \frac{4}{3}} \geq 0;$

0 1

$f'(x) = \log_4 3 \cdot x^{\log_4 \frac{3}{4}} - \log_4 5 \cdot x^{\log_4 \frac{5}{4}} + 1 = 0;$

$\frac{3}{4} - \frac{5}{4} + 1 = \frac{1}{2};$

$t^{<0} + 1 \geq t^{>0};$

$8^{\log_4 \frac{3}{4}} = \left(4^{\log_4 \frac{3}{4}}\right)^2 = \frac{9}{16};$ $\quad t = 8;$

$\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_4 \frac{3}{4}} = \frac{4}{3};$

$\frac{7}{3} - \frac{4}{5} = \frac{20}{3} - \frac{12}{3} = \frac{8}{3};$ $\quad \frac{16}{9} - \frac{16}{25}$

☑ черновик ☐ чистовик

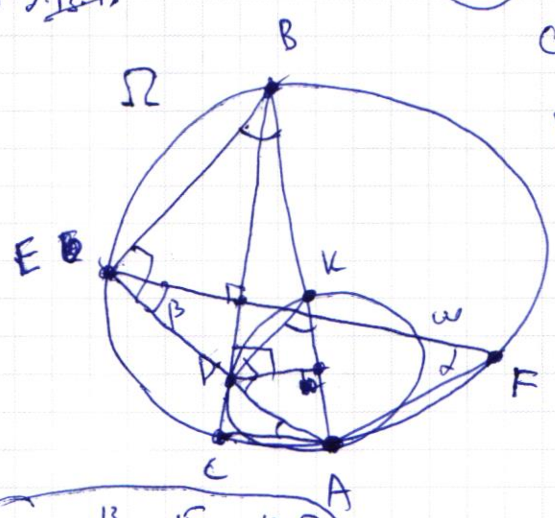
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\frac{5\cdot\sqrt{13}\cdot 18\cdot 39\cdot 4}{4\cdot 4\cdot 2\cdot 13\cdot 15} = \frac{\sqrt{13}\cdot 18}{8} = \frac{\sqrt{13}\cdot 9}{4}$

$270 + 81 = 351$



$CD = \frac{5}{2};$

$BD = \frac{13}{2};$

$EA = 5\cdot\frac{\sqrt{13}}{4}\cdot\frac{\frac{39}{4}}{\frac{2\cdot 13}{18}\cdot\frac{15}{4}} =$

$= \frac{\sqrt{13}\cdot 9}{4};$

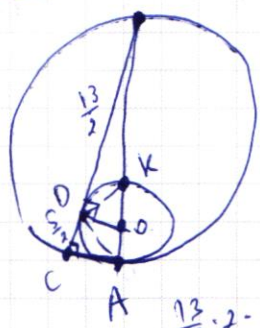
$\frac{EA}{\sin\alpha} = 2R;$

$\sqrt{325} = 5\cdot\sqrt{13};$

$\sin\beta = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{1}{4}\cdot\sqrt{325}} = \frac{10}{\sqrt{325}} = \frac{2}{\sqrt{13}};$

$KA = \frac{13}{18}\cdot 2\cdot\frac{15}{4} = \frac{13\cdot 5}{12};$

$AF = 2R\cdot\sin\beta = \frac{39}{4}\cdot\frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}\cdot 3}{2};$



$\sin\angle EAF = \sin(\angle EAB + \angle BAF) =$

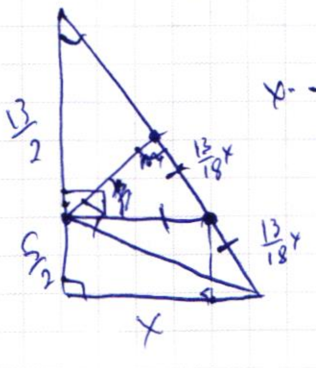
$\angle AFE = \angle EBA = \arcsin\frac{EA}{BA} =$

$= \arcsin\frac{DA}{KA} = \arcsin\left(\frac{\frac{1}{4}\cdot\sqrt{325}}{\frac{13\cdot 5}{6\cdot 2}}\right) =$

$= \arcsin\left(\frac{\sqrt{325}\cdot 3}{65}\right);$

$= \arcsin\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right);$

$\frac{13}{18}\cdot 2\cdot\frac{15}{4} = \frac{13\cdot 5}{6\cdot 2}$



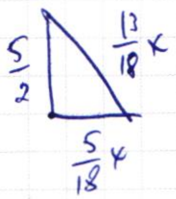
$x\cdot\frac{\frac{13}{2}}{\frac{18}{2}} = \frac{13}{18}x$

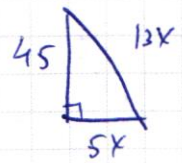
$39^2 = 900 + 540 + 81 = 1521;$

$(30+6)^2 =$

$= 900 + 360 + 36 =$

$= 1296$





$\frac{3}{\sqrt{13}}$

$\frac{3}{\sqrt{13}}\cdot\frac{39}{4} = \frac{9\sqrt{13}}{4};$

$\frac{13\cdot 27}{16} =$

$\frac{3}{\sqrt{13}}$

$45^2 + 25x^2 = 169x^2;$

$45^2 = 144x^2;$

$x = \frac{15}{4};$

$x = \frac{45}{12};$

$r = \frac{15}{4}\cdot\frac{13}{18} = \frac{5\cdot 13}{4\cdot 6} = \frac{65}{24};$

$(2R)^2 = \left(\frac{18}{2}\right)^2 + \left(\frac{15}{4}\right)^2;$

$64R^2 = 36^2 + 15^2 = 1296 + 225 =$

$= 1521;$

$R = \sqrt{\frac{1521}{64}} = \frac{39}{8};$

$\frac{9}{6} =$

$\frac{9\cdot\frac{9}{4x}}{2}$

$AD = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{15}{4}\right)^2} =$

$= \frac{1}{4}\cdot\sqrt{100 + 225} =$

$= \frac{1}{4}\cdot\sqrt{325}; = \frac{5\cdot\sqrt{13}}{4};$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$= \sin\angle EAB \cdot \cos\angle BAF + \cos\angle EAB \cdot \sin\angle BAF =$

$48x^2 - 84 \cdot 2x + 124 = 0;$

$12x^2 - 42x + 31 = 0;$

$=$

$4x-3 \geq 16x^3 - 68x^2 + 60x - 16x^2 + 68x - 60$

$16x^3 - 84x^2 + 124x - 57 \leq 0;$

$D = 1600 + 160 + 4 \cdot - 3148$

$DK = \sqrt{\left(\frac{13\cdot 5}{12}\right)^2 - \frac{25\cdot 13}{16}} = 5\cdot\sqrt{\frac{13^2}{12^2} - \frac{13}{16}} = \frac{5}{4}\cdot\sqrt{\frac{13^2}{3^2} - 13} =$

$= \frac{5}{4}\cdot\sqrt{\frac{169-117}{9}} = \frac{5}{4}\cdot\sqrt{\frac{52}{9}} = \frac{5}{4}\cdot\sqrt{\frac{13\cdot 4}{9}} = \frac{5}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\sqrt{13} = \frac{5}{6}\sqrt{13};$

$\begin{cases} \sin\angle EAB = \frac{DK}{AK} = \frac{\frac{5}{6}\sqrt{13}}{\frac{13\cdot 5}{12}} = \frac{2}{\sqrt{13}}; \\ \cos\angle EAB = \frac{AD}{AK} = \frac{\frac{5\cdot\sqrt{13}}{4}}{\frac{13\cdot 5}{12}} = \frac{3}{\sqrt{13}}; \end{cases}$

$72 - 102 + 30 = 0;$

$\frac{9}{4} \geq, 29 + 6 \geq 0;$

$31 \cdot 48 = (30+1)\cdot(40+8) =$

$= 1200 + 40 + 240 + 8 =$

$= 1488$

$1764 - 1488 = 276;$

$\begin{cases} \cos\angle BAF = \cos\angle CDA = \frac{CD}{AD} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{5\sqrt{13}}{4}} = \frac{2}{\sqrt{13}}; \\ \sin\angle BAF = \sin\angle CDA = \frac{CA}{AD} = \frac{\frac{15}{4}}{\frac{5\sqrt{13}}{4}} = \frac{3}{\sqrt{13}}; \end{cases}$

$\frac{4}{13} + \frac{9}{13} = 1 = \sin\angle EAF; = 90°;$

$f(2) = 0$

$f(3) = 0$

$f(5) = 1$

$f(7) = 1$

$f(11) = 2$

$3 \leq x, y \leq 27$

$f\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right) = f\left(\frac{a}{b}\right) + f\left(\frac{c}{d}\right);$

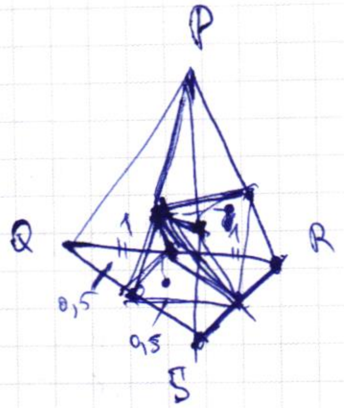
$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right).$

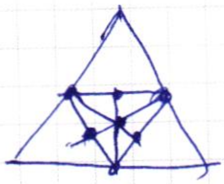
☑ черновик ☐ чистовик

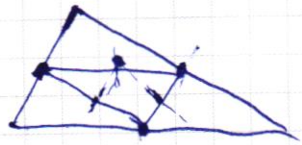
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)







$QR=2$
$QS=1$
$PS=\sqrt{2}$

$f(2)= f(1)+f(2); \to f(1)=0;$

$f(2\cdot\frac{1}{2})= f(2)+f(\frac{1}{2})= 0;$

$-f(a)=f(\frac{1}{a});$

$f(x)-f(y)$

$f(3)=0$

$f(4)=0$

$f(5)=1$

$f(6)=0$

$f(7)=1$

$f(8)=0$

$f(9)=0$

$f(10)=1$

$f(11)=2$

$f(12)=0$

$f(13)=3$

$f(14)=$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)