

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg} \alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6}, \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$|x^2 - 26x|^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + 13^{\log_5(26x - x^2)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω , а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D . Луч AD повторно пересекает Ω в точке E . Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC , повторно пересекает Ω в точке F . Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF , если известно, что $CD = 12$, $BD = 13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $4 \leq x \leq 28$, $4 \leq y \leq 28$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8 - 6x}{3x - 2} \geq ax + b \geq 18x^2 - 51x + 28$$

выполнено для всех x на промежутке $(\frac{2}{3}; 2]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TU . Известно, что $XU = \sqrt{3}$, $TX = \sqrt{2}$, $TZ = 2$. Найдите длину ребра XZ . Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$$\sin(2x+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{14}} \quad \sin(2x+4\beta) + \sin(2x) = -\frac{2}{14}$$

$$\begin{cases} \sin 2x \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2x = -\frac{1}{\sqrt{14}} & \cos(2x+2\beta) = -\frac{4}{\sqrt{14}} \\ \sin 2x \cdot \cos 4\beta + \sin 4\beta \cdot \cos 2x + \sin 2x = -\frac{2}{14} \end{cases}$$

$$\sin 2x (2\cos^2(2\beta) - 1) + 2\sin 2\beta \cos 2\beta \cos 2x + \sin 2x = -\frac{2}{14} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\sin 2x \cos^2(2\beta) + 2\sin 2\beta \cos 2\beta \cos 2x = -\frac{2}{14}$$

$$x \cos(2\beta) (\underbrace{\sin 2x \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2x}_{-\frac{1}{\sqrt{14}}}) = -\frac{2}{14} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(2\beta) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{14}}\right) = -\frac{1}{14} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{14}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin 2\beta = \frac{4}{\sqrt{14}} \Rightarrow \sin 2x \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} \pm \cos 2x \cdot \frac{4}{\sqrt{14}} = -\frac{1}{\sqrt{14}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin 2x \pm 4\cos 2x = -1 \Rightarrow \sin 2x \pm 4\cos 2x + 1 = 0$$

I случай (+) $2\sin x \cos x + 4(\cos^2 x - \sin^2 x) + 1 = 0$

$$2\sin x \cos x + 4\cos^2 x - 4\sin^2 x + \cos^2 x + \sin^2 x = 0$$

$$5\cos^2 x + 2\sin x \cos x - 3\sin^2 x = 0 \quad | : \cos^2 x \text{ Мы можем}$$

$$5 + 2\operatorname{tg} x - 3\operatorname{tg}^2 x = 0$$

это сделать, т.к., по условию,
 $\operatorname{tg} x$ определен $\Rightarrow \cos x \neq 0$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = \frac{5}{3} \\ \operatorname{tg} x = -1 \end{cases}$$

II случай: (-)

$$2\sin x \cos x - 4(\cos^2 x - \sin^2 x) + 1 = 0$$

$$2\sin x \cos x - 4\cos^2 x + 4\sin^2 x + 1 = 0$$

$$2\sin x \cos x - 3\cos^2 x + 5\sin^2 x = 0 \quad | : \cos^2 x$$

$$5\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - 3 = 0$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = -1 \\ \operatorname{tg} x = \frac{3}{5} \end{cases}$$

Ответ: $\operatorname{tg} x \in \left\{ -1; \frac{3}{5}; \frac{5}{3} \right\}$

$$\begin{cases} y-6x = \sqrt{xy-6x-y+6} & (1) \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45 & (2) \end{cases}$$

(2): $9x^2 - 18x + 9 + y^2 - 12y + 36 = 45 + 9 + 36 = 90$
 $(3x-3)^2 + (y-6)^2 = 90$ $3x=t \Rightarrow (t-3)^2 + (y-6)^2 = 90$
 - окружность с $r = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$ с центром в $(3; 6)$

(1): $y-6x = \sqrt{xy-6x-y+6}$ $\left. \begin{matrix} y-6x \geq 0 \\ xy-6x-y+6 \geq 0 \end{matrix} \right\} \text{O.O.}$

$$y^2 - 12xy + 36x^2 = xy - 6x - y + 6$$

$$y^2 - 13xy + y + 36x^2 + 6x - 6 = 0 = y^2 + y(1-13x) + 36x^2 + 6x - 6$$

$$y^2 + y(1-13x) + 36x^2 + 6x - 6 = 0$$

$$D = (13x-1)^2 - 4(36x^2 + 6x - 6) = 169x^2 - 26x + 1 - 144x^2 - 24x + 24 =$$

$$= 25x^2 - 50x + 25 = 25(x^2 - 2x + 1) = 25(x-1)^2 = 5^2(x-1)^2$$

$$\Rightarrow y_{\pm} = \frac{13x-1 \pm 5|x-1|}{2} = \frac{13x-1 \pm 5(x-1)}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{13x-1+5x-5}{2}; \frac{13x-1-5x+5}{2} = 9x-3; 4x+2$$

$y = 9x-3; y = 4x+2$ 1) $y = 9x-3$:

$$9x^2 - 18x + y(y-12) = 45 = 9x^2 - 18x + (9x-3) \cdot (9x-15) =$$

$$= 9x^2 - 18x + 81x^2 - 135x - 24x + 45 = 45 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 90x^2 + 180x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 90x+180=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow y=-3 \\ x=-2 \Rightarrow y=-21 \end{cases}$$

2) $y = 4x+2$: $9x^2 - 18x + y(y-12) = 9x^2 - 18x + (4x+2) \cdot (4x-10) =$

$$= 9x^2 - 18x + 16x^2 - 40x + 8x - 20 = 45 \Rightarrow 25x^2 - 50x - 65 = 0$$

$$5x^2 - 10x - 13 = 0 \Rightarrow D = 100 + 4 \cdot 5 \cdot 13 = 360 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{\pm} = \frac{10 \pm 6\sqrt{10}}{10} = 1 \pm 6\frac{1}{\sqrt{10}} \quad \begin{matrix} x = 1 + 6\frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow y = 6 + \frac{24}{\sqrt{10}} \\ x = 1 - 6\frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow y = 6 - \frac{24}{\sqrt{10}} \end{matrix}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Продолжение № 2.

$$x=0; y=-3$$

$$x=-2; y=-21$$

$$x=1+\frac{6}{\sqrt{10}}; y=6+\frac{24}{\sqrt{10}}$$

$$x=1-\frac{6}{\sqrt{10}}; y=6-\frac{24}{\sqrt{10}}$$

Проверим ответы.

$$O.O: y-6x \geq 0 \quad (0; -3) \text{ и } (-2; -21) \text{ не подходят}$$

$$xy-6x-y+6 \geq 0$$

$$6+\frac{24}{\sqrt{10}}-6-\frac{36}{\sqrt{10}} \Rightarrow \left(1+\frac{6}{\sqrt{10}}; 6+\frac{24}{\sqrt{10}}\right) \text{ - не подходит.}$$

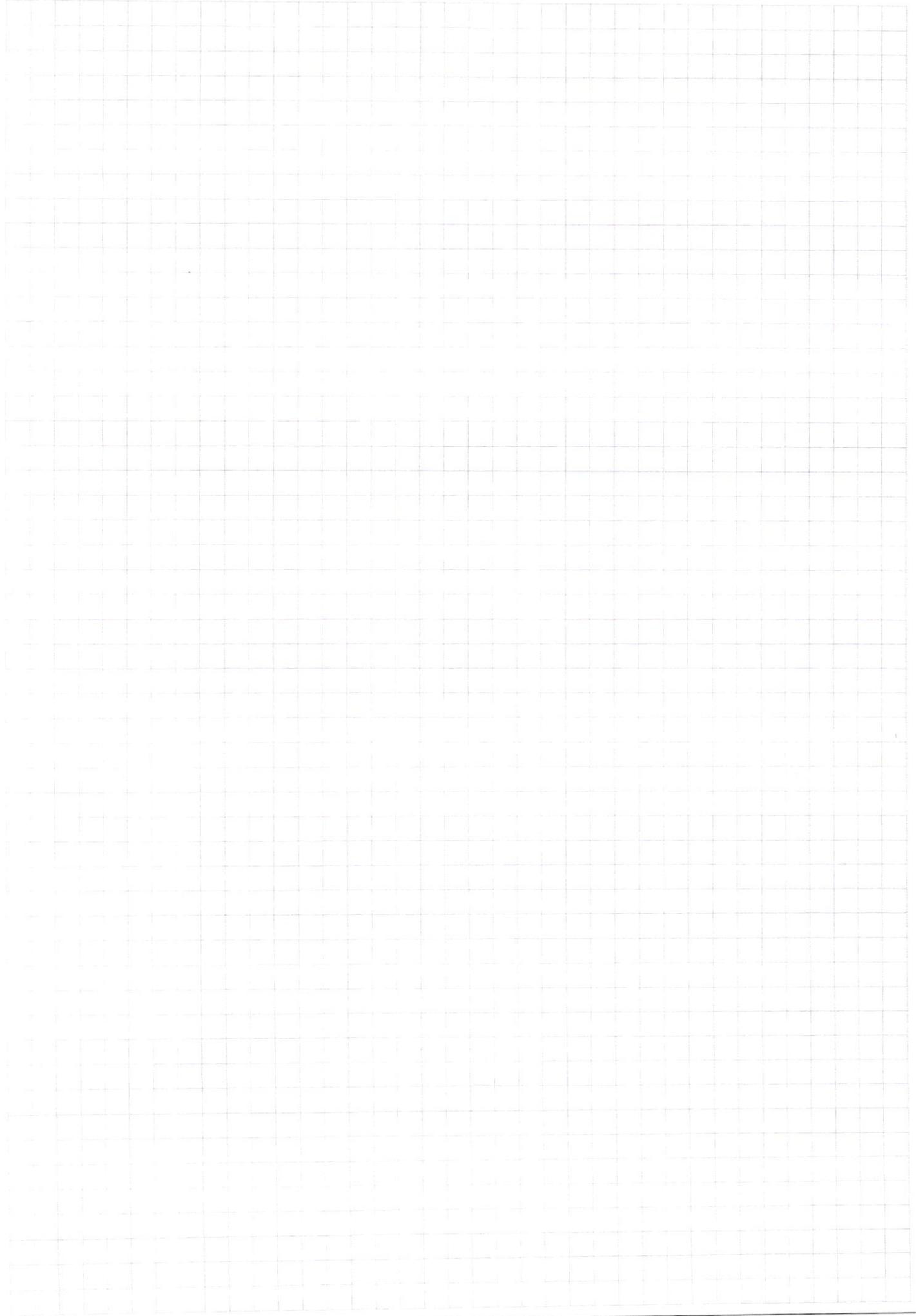
$$6-\frac{24}{\sqrt{10}}-6+\frac{36}{\sqrt{10}} > 0$$

$$\left(1-\frac{6}{\sqrt{10}}\right) \cdot \left(6-\frac{24}{\sqrt{10}}\right) - 6\left(1-\frac{6}{\sqrt{10}}\right) - \left(6-\frac{24}{\sqrt{10}}\right) + 6 =$$

$$= 6 - \frac{24}{\sqrt{10}} - \frac{36}{\sqrt{10}} + \frac{24 \cdot 6}{10} - 6 + \frac{36}{\sqrt{10}} - 6 + \frac{24}{\sqrt{10}} + 6 =$$

$$= \frac{24 \cdot 6}{10} + \frac{1}{\sqrt{10}}(36 + 24 - 24 - 36) > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{ответ: } (x; y) : \left(1 - \frac{6}{\sqrt{10}}; 6 - \frac{24}{\sqrt{10}}\right)$$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 6.

$$(a, b): \frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \geq 18x^2-51x+28 \quad x \in \left(\frac{2}{3}; 2\right]$$

$ax+b$ - уравнение прямой

$18x^2-51x+28$ - ур-е параболы

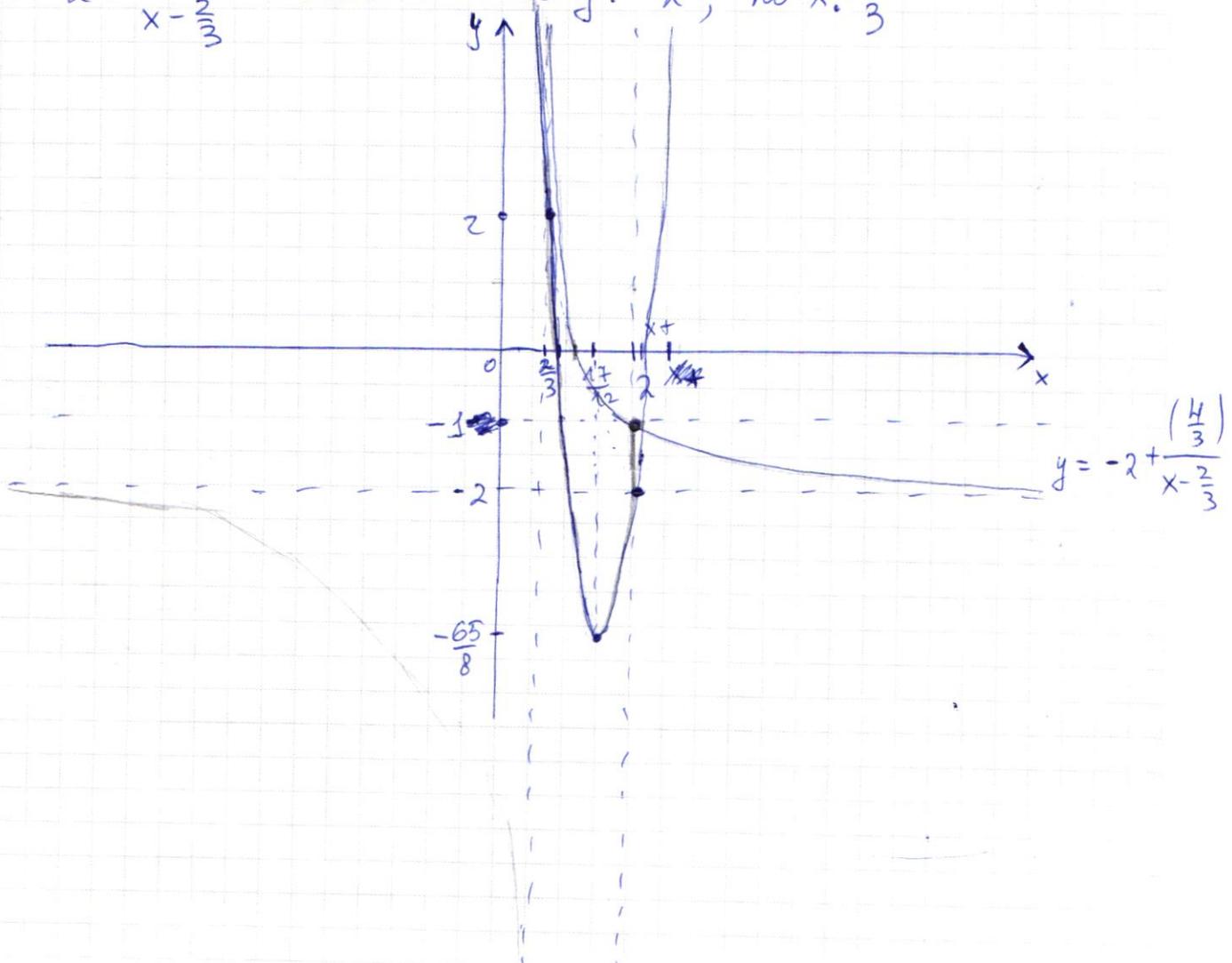
$\frac{8-6x}{3x-2}$ - ур-е гиперболы

$$\begin{aligned} \frac{8-6x}{3x-2} &= \frac{-6x+12-4}{3x-2} = \\ &= \frac{-6x+4+4}{3x-2} = -2 + \frac{4}{3x-2} \end{aligned}$$

$$y = ax + b$$

$$y = 18x^2 - 51x + 28 \text{ - вершина в } \frac{51}{36} = \frac{17}{12}$$

$$y = -2 + \frac{(\frac{4}{3})}{x - \frac{2}{3}} \text{ - асимптота по } y: -2; \text{ по } x: \frac{2}{3}$$



Гипербола пересекает прямую Ox в точке: $-2 + \frac{4}{3(x-\frac{2}{3})} = 0$

$$\frac{4}{3(x-2)} = 2 \Rightarrow 4 = 2 \cdot 3(x-\frac{2}{3}) \Rightarrow \cancel{4} = \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot x = \frac{4}{3} x$$

А в точке $(2; y)$ гипербола: $y = -2 +$

$$18x^2 - 51x + 28 = 0 \quad D = 51^2 - 4 \cdot 18 \cdot 28 = 2601 - 2016 = 585$$

$$= 9 \cdot 13 \cdot 5 \Rightarrow x_{\pm} = \frac{51 \pm 3\sqrt{65}}{36}$$

$$x_- \approx \frac{51 - 3 \cdot 8}{36} \approx \frac{3}{4} \quad x_+ \approx \frac{51 + 3 \cdot 8}{36} \approx \frac{23}{12} < 2 -$$

- Нужно проверить, больше ли x_+ , чем 2 $\frac{51 + 3\sqrt{65}}{36} \sqrt{2}$
 $3\sqrt{65} \sqrt{2} \geq 21 \Rightarrow x_+ > 2$

$$y_b: x_b = \frac{17}{12} \Rightarrow y_b = -\frac{65}{8}$$

Парабола в точке $(2; y)$: $y = 18 \cdot 4 - 51 \cdot 2 + 28 = -2$

$y = ax + b$ должно удовлетворять таким условиям:

1) лежать "под" гиперболой на промежутке $x \in (\frac{2}{3}; 2]$

2) лежать "над" параболой на промежутке $x \in (\frac{2}{3}; 2]$

Парабола пересекает прямую $x = \frac{2}{3}$ в точке: $(\frac{2}{3}; 2) \Rightarrow$

\Rightarrow прямая $ax + b$ должна ~~и~~ пересекать прямую $x = \frac{2}{3}$

в точке $(\frac{2}{3}; t)$, где $t > 2 \Rightarrow ax_1 + b = a \cdot \frac{2}{3} + b > 2$

При этом прямая $ax + b$ должна пересекать $x = 2$

в точках: $(2; k)$, где $k \in [-1; -2]$ $2a + b \geq -2$

$$\begin{cases} \frac{2}{3}a + b > 2 \\ 2a + b \geq -2 \\ 2a + b \leq -1 \end{cases}$$

Однако прямая не должна пересекать гиперболу \Rightarrow проверим касательную, проходящую через точку $(2; -2)$:

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Продолжение номера в.

Проверим, пересекает ли прямая, проходящая через точки $(\frac{2}{3}; 2)$ и $(2; -2)$ гиперболу: $y = ax + b$

$$\begin{cases} 2 = \frac{2}{3}a + b \\ -2 = 2a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow y = -3x + 4 = \frac{8 - 6x}{3x - 2}$$

$$8 - 6x = (3x - 2) \cdot (4 - 3x) = 12x - 9x^2 - 8 + 6x \Rightarrow 9x^2 - 24x + 16 = 0$$

$$D = 24^2 - 4 \cdot 9 \cdot 16 = 576 - 576 = 0 \Rightarrow$$

\Rightarrow прямая касается гиперболы \Rightarrow это единственная
прямая
ответ: $a = -3; b = 4$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$|x^2 - 26x| \log_5^{12} + 26x \geq x^2 + 13 \log_5(26x - x^2) \quad N3.$$

О.О: $26x - x^2 > 0 \Rightarrow$ можем раскрыть модуль со знаком -, т.к. О.О должна выполняться

$$(26x - x^2) \log_5^{12} + 26x \geq x^2 + 13 \log_5(26x - x^2)$$

$$26x - x^2 = t \quad t \log_5^{12} + t \geq 13 \log_5 t$$

$$t \log_5^{12} + t - 13 \log_5 t \geq 0$$

$$x \cdot 26 - x^2 = x(26 - x) > 0 \Rightarrow x \in (0; 26)$$

$t \log_5^{12} + t$ - строго возрастающая ф-ия f_1
(монотонно)

$13 \log_5 t$ - тоже монотонно возрастающая ф-ия f_2

~~На интервале $x \in (0; 26)$ f_1 f_2~~

$$t \in (0; 26 \cdot 13 - 13^2) \Rightarrow t \in (0; 13^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 < f_1 \leq 13^{2 \log_5^{12}} + 13^2, \quad 0 < f_2 \leq 13^{\log_5 13^2}$$

$$0 < f_1 \leq 13^{2 \log_5^{12}} + 13^2, \quad 0 < f_2 \leq 13^{2 \log_5 13}$$

$$t \log_5^{12} + t \geq 13 \log_5 t \quad | \text{ Возьмем логарифм по основанию 5 у обеих частей}$$

(т.к. обе ф-ии возрастают, мы можем это сделать)

$$\log_5(t | t^{\log_5^{12} - 1} + 1) \geq \log_5 t \cdot \log_5 13$$

$$\log_5 t + \log_5 (t^{\log_5^{12} - 1} + 1) \geq \log_5 t \cdot \log_5^{13} \quad \text{T.k. } t > 0$$

$$\log_5 t (1 - \log_5^{13}) + \log_5 (t^{\log_5^{12} - 1} + 1) \geq 0$$

$$- \log_5 t (\log_5^{13} - 1) + \log_5 (t^{\log_5^{12} - 1} + 1) \geq 0$$

$$\log_5 (t^{\log_5 \frac{12}{5} + 1}) - \log_5 t (\log_5^{13} - 1) \geq 0$$

$$\log_5 (t^{\log_5 \frac{12}{5} + 1}) - \log_5 t \cdot \log_5 \frac{13}{5} \geq 0$$

$$\frac{\log_5 (t^{\log_5 \frac{12}{5} + 1})}{\log_5 \frac{13}{5}} - \log_5 t \geq 0 \quad \log_{\frac{13}{5}} (t^{\log_5 \frac{12}{5} + 1}) - \log_5 t \geq 0$$

$$t^{\log_5 \frac{12}{5} + 1} \geq \left(\frac{13}{5}\right)^{\log_5 t}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \cos(2\alpha + 2\beta) = \sqrt{1 - \frac{1}{17}} = \sqrt{\frac{16}{17}}$$

$$A \cos 2\beta + B \sin 2\beta \leq \sqrt{\frac{1}{17} + \frac{16}{17}} \leq 1$$

$$y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6} \quad y - 6x \geq 0$$

$$xy - 6x - y + 6 \geq 0$$

$$(y - 6x)^2 = xy - 6x - y + 6 \quad 3x = t$$

$$y^2 - 12xy + 36x^2 = xy - 6x - y + 6 \quad 9x^2 = t^2$$

$$y^2 - 13xy + 36x^2 + 6x + y - 6 = 0$$

$$y^2 - \frac{13}{3}ty + 4t^2 + 2t + y - 6 = 0$$

$$3+4+5 \cdot 4+6 = 33$$

$$13$$

$$x^2 - 26x \mid \log_5^{12} + 26x \geq x^2 + 13 \log_5(26x - x^2)$$

$$0 \cdot 0 : 26x - x^2 > 0$$

$$26x$$

$$= 2601 - 2016 = 585$$

$$= 5 \cdot 117 = 5 \cdot 9 \cdot 13 = 45 \cdot 13 = 585$$

$$18x^2 - 51x + 28 = 0$$

$$\frac{18 \cdot 12}{2} - \frac{51 \cdot 12}{2} + 28 = 0$$

$$18 \cdot \frac{12}{2} - 51 \cdot \frac{12}{2} + 28 = 0$$

$$18x^2 - 51x + 28 = 0$$

$$x = \frac{51 \pm \sqrt{36}}{12} = \frac{51 \pm 6}{12}$$

$$9x^2 - 18x - 45 + y(y-12) = 0$$

$$9x^2 - 18x - 45 + (4x+2) \cdot (4x-10) = 0$$

$$9x^2 - 18x - 45 + 16x^2 - 40x + 8x - 20 = 0$$

$$25x^2 - 50x - 65 = 0$$

$$5x^2 - 10x - 13 = 0$$

$$D = 100 + 4 \cdot 5 \cdot 13 =$$

$26 \log_5^{12} + 26$
 $26 \log_5^{13} - 13^2 = 13$
 $26 \log_5^{12} + 26$
 $26 \log_5^{13} - 13^2 = 13$

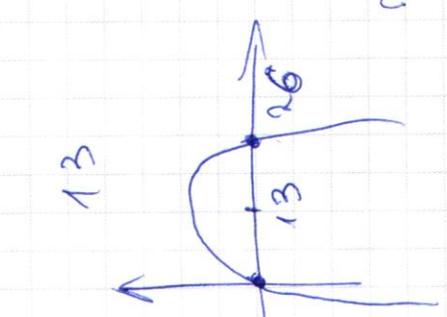
$$y = \frac{3x-2}{4} + 2 - 2 = \frac{3x-2}{4}$$

$$x = 2 - 2 + \frac{4}{4} = 1$$

$$y = \frac{3 \cdot 2 - 2}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$y = \frac{3x-2}{4} + 2 = \frac{3x-2}{4} + \frac{8}{4} = \frac{3x+6}{4}$$

$$x = 2 - 2 + \frac{4}{4} = 1$$

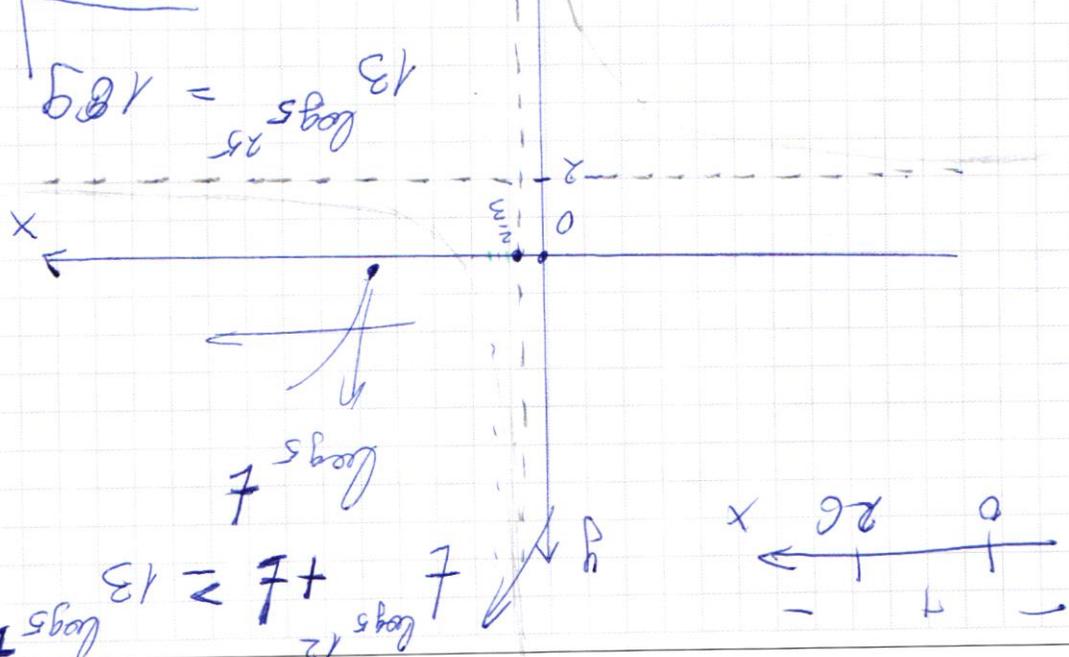


$$x = 4 + \frac{6}{\sqrt{10}}$$

$$y = 4x + 2 \Rightarrow y = 4 + \frac{24}{\sqrt{10}} + 2$$

$$x = 1 - \frac{6}{\sqrt{10}} \Rightarrow y = 4 - \frac{24}{\sqrt{10}} + 2$$

$$13^2(2-1)$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 51 \\ \times 51 \\ \hline 151 \\ 255 \\ \hline 2601 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2601 \\ 3 \\ \hline 28 \\ \hline 4 \\ \hline 172 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 112 \\ \times 18 \\ \hline 896 \\ 112 \\ \hline 2016 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2601 \\ - 2016 \\ \hline 585 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times 13 \\ \hline 135 \\ 45 \\ \hline 585 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 18 \\ \hline 4 \\ \hline 42 \end{array}$$

$$(13x - 1)^2 = 169x^2 - 26x + 1$$

$$\begin{array}{r} 585 \overline{) 5} \\ - 5 \\ \hline 8 \\ - 8 \\ \hline 35 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 114 \overline{) 9} \\ - 9 \\ \hline 24 \end{array}$$

$$51 \pm 3 \cdot 8 = \frac{36}{36} = 1$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ 14 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$\frac{51 - 24}{36} = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{51 + 24}{36} = \frac{75}{36} = \frac{25}{12}$$

$$\frac{8 - 12}{4} = -1$$

$$\frac{14}{4} \times \frac{36}{4} = 126$$

$$51 + 3\sqrt{65} \sqrt{42} = 3\sqrt{65} \sqrt{21}$$

$$y^2 = 18 \cdot \frac{17^2}{12^2} - 51 \cdot \frac{17}{12} + 28 = 0$$

$$= 9 \cdot 2 \cdot \frac{17^2}{12 \cdot 12} - 14 \cdot 2 \cdot \frac{17}{12} + 28 = 0$$

$$= \frac{17^2}{8} - \frac{17^2}{4} + 28 = 17^2 \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4} \right) + 28 = 28 - 17^2 \cdot \frac{1}{8} =$$

$$= \frac{17^2 - 28 \cdot 8}{8} = \frac{289 - 224}{8} = -\frac{65}{8}$$

$$42 - 102 + 28 = -30$$

$$18 + 135 + 24 = 177$$

$$51 + x + 2 - x \cdot 5 - 15 \cdot x^2 - 18 = (9x - 15) \cdot (9x - 18)$$

$5 - 81 - 18 = -94$

$$16x^2 - 40x + 8x - 20 = 16x^2 - 32x - 20 = 0$$

$$5x^2 - 10x - 13 = 0$$

$$D = 100 + 4 \cdot 5 \cdot 13 = 100 + 260 = 360$$

$$18x^2 - 51x + 28 \quad x = \frac{2}{3}$$

$$18 \cdot \frac{4}{9} - 51 \cdot \frac{2}{3} + 28 = 8 - 34 + 28 = 2$$

$(\frac{2}{3}; 2); (2; -2)$ - пересекает ли гипербола?

$$y = ax + b$$

$$2 = \frac{2}{3}a + b$$

$$\Rightarrow -4 = a(2 - \frac{2}{3}) = a \cdot \frac{4}{3}$$

$$-2 = 2a + b$$

~~$$a = -\frac{1}{3}$$~~

$$a = -3$$

$$\Rightarrow b = -2 - 2 \cdot (-3) = 4$$

~~$$y = -3x + 4$$~~

$$\frac{8-6x}{3x-2} = y$$

$$-3x + 4 = \frac{8-6x}{3x-2}$$

$$8-6x = (4-3x) \cdot (3x-2) = 12x - 8 - 9x^2 + 6x$$

$$8-6x = 12x - 8 - 9x^2 + 6x \quad 9x^2 - 24x$$

$$9x^2 - 24x + 16 = 0$$

$$D = 24^2 - 4 \cdot 9 \cdot 16$$

$$\frac{13x-1+5x-5}{2} = \frac{18x-6}{2} = 9x-3$$

$$\frac{13x-1-5x+5}{2} = \frac{8x+4}{2} = 4x+2$$

$$\frac{8x+4}{2} = 4x+2$$

$$\begin{array}{r} 9 \ 5 \\ 9 \ 6 \\ \hline 2 \ 1 \ 6 \\ 9 \ 1 \ 6 \\ \hline 8 \ 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8 \\ 8 \ 4 \\ \hline 9 \ 6 \\ 9 \ 6 \\ \hline 1 \ 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9 \ 5 \ 5 \\ 8 \ 4 \\ \hline 9 \ 6 \\ 9 \ 6 \\ \hline 1 \ 2 \ 4 \\ 1 \ 2 \ 4 \\ \hline 1 \end{array}$$

$$12x - 9x^2 - 8 + 6x = 8 - 6x$$

$$2 = \frac{2}{3} \cdot (-3) + b$$

$$\frac{3}{4} = a \cdot (2 - \frac{2}{3}) = a \cdot \frac{4}{3}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sin(2x+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \quad \text{и т.д.} \quad \sin(2x+4\beta) + \sin 2x = -\frac{2}{17}$$

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \sin y \cos x \\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \end{aligned}$$

$$\sqrt{1 - \frac{1}{17}} = \sqrt{\frac{16}{17}}$$

$$\begin{cases} \sin 2x \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2x = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin 2x \cdot \cos 4\beta + \sin 4\beta \cdot \cos 2x = -\frac{2}{17} \end{cases}$$

$$A \cos x + B \sin x \leq \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$A = \sin 2x$$

$$B = \cos 2x$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} \sin 2x \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2x = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin 2x (\cos^2 2\beta - \sin^2 2\beta) + \cos 2x \cdot 2 \sin 2\beta \cdot \cos 2\beta = -\frac{2}{17} \end{cases} \\ \sin 2x \cos^2 2\beta - \sin 2x \sin^2 2\beta + 2 \cos(2x) \sin(2\beta) \cos(2\beta) = -\frac{2}{17} \\ \sin 2x \cos^2 2\beta + \cos(2x) \sin(2\beta) \cos(2\beta) + \cos(2x) \sin(2\beta) \cos(2\beta) - \sin 2x \sin^2 2\beta = -\frac{2}{17} \\ \cos 2\beta (\sin 2x \cos 2\beta + \cos 2x \sin 2\beta) + \sin 2\beta (\cos 2x \cos 2\beta - \sin 2x \sin 2\beta) = -\frac{2}{17} \\ \left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) \cos 2\beta + \sin 2\beta (\cos 2x \cos 2\beta - \sin 2x \sin 2\beta) = -\frac{2}{17} \end{aligned}$$

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \underbrace{\cos(2x+2\beta)}_B = -\frac{2}{17}$$

$$A \cos 2\beta + B \sin 2\beta = -\frac{2}{17}$$

$$A \cos 2\beta + B \sin 2\beta \leq \sqrt{A^2 + B^2} \leq \sqrt{\frac{1}{17} + \cos^2(2x+2\beta)}$$

$$5 + \frac{10}{3} - 3 \cdot \frac{25}{9} =$$

$$\sin 2x \pm 4 \cos 2x + 1 = 0$$

$$\sin 2x \pm 4 \cos 2x + \cos^2 2x + \sin^2 2x = 0 \quad 5 + \frac{10}{3} - \frac{25}{3}$$

$$2 \sin x \cos x \pm 4(2 \cos^2 x - 1) + \cos^2 x + \sin^2 x = 0$$

$$f: 2 \sin x \cos x + 8 \cos^2 x - 4 + \cos^2 x + \sin^2 x = 0$$

$$3x^2 - 2x - 5 = 0$$

$$D = 4 + 4 \cdot 3 \cdot 5 = 64 \quad x_{\pm} = \frac{2 \pm 8}{6} = \frac{10}{6}, -\frac{1}{3}$$

$$5x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$D = 4 + 4 \cdot 3 \cdot 5 = 64$$

$$x_{\pm} = \frac{-2 \pm 8}{10} = -1; \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\begin{array}{r} 58 \\ 85 \\ \hline 52 \mid 585 \\ 25 \end{array}$$

$$5 \cdot 4 - 4 - 3$$

$$5 \cdot 4 - 4 - 3$$

$$1) y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6}$$

$$2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$$

$$2) 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45$$

$$(3x - 3)^2 = 9x^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3x + 9$$

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$$

$$2) 9x^2 - 18x + 9 + y^2 - 12y$$

$$(3x - 3)^2 + (y - 6)^2 = 9x^2 - 18x + 9 + y^2 - 12y + 36 =$$

$$= 9x^2 - 18$$

$$\begin{array}{r} 200 \\ 196 \\ \hline 4 \\ 28 \\ 28 \\ \hline 56 \end{array}$$

log x

log 7

$$7/7 = 1 + 7/7$$

$$\begin{array}{r} 585 \\ 2016 \\ \hline 2601 \\ 115 \end{array}$$

$$95 = 5 \cdot 19$$