МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1.

$$-\frac{8}{17} = \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta$$

тогда $\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$

значит, $\sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

I) $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$

тогда $-1 = 4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha$

$(-1-\cos 2\alpha)^2 = 16\sin^2 2\alpha$

$0 = 17\cos^2 2\alpha + 2\cos 2\alpha - 15$

тогда а) $\cos 2\alpha = -1 = 2\cos^2\alpha - 1$

тогда $\cos\alpha = 0$ и $tg\,\alpha$ не определён!

б) $\cos 2\alpha = \frac{15}{17}$

$\cos^2\alpha = \frac{16}{17}$

$tg\,\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{\sin 2\alpha}{2} = \left(\frac{16}{17}\right)^{-1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{8}{17}\right) = \underline{-\frac{1}{4}}$

II) $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$-1 = 4\sin 2\alpha - \cos 2\alpha$

$16\sin^2 2\alpha = (\cos 2\alpha - 1)^2$

$0 = 17\cos^2 2\alpha - 2\cos 2\alpha - 15$

а) $\cos 2\alpha = 1 = 2\cos^2\alpha - 1$

$\cancel{\cos^2\alpha = 1}$

~~тогда~~ тогда $\cos^2\alpha = 1$,

значит $\sin\alpha = 0$,

$\underline{tg\,\alpha = 0}$

б) $\cos 2\alpha = -\frac{15}{17}$,

$\cos^2\alpha = \frac{1}{17}$

$tg\,\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin 2\alpha = 17\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{8}{17}\right) = \underline{-4}$

то есть $tg\,\alpha$ принимает не более 3 значений: $-4; -\frac{1}{4}; 0$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

Но по условию значений не меньше 3.

Тогда y_2 принимает ровно 3 значения: $-\frac{1}{4}; -4; 0$

Ответ: $-4; -\frac{1}{4}; 0$

№3.

Заметим, что $x^2+6x>0$

Пусть тогда $x^2+6x=4^k$

Тогда $3^k+4^k\geq 5^k$ (*)

Пусть $t=k-2$

Тогда $9\cdot 3^t+16\cdot 4^t\geq 25\cdot 5^t$

Заметим, что при $t>0$, $25\cdot 5^t=\underline{9\cdot 5^t}+\underline{\underline{16\cdot 5^t}}>\underline{9\cdot 3^t}+\underline{\underline{16\cdot 4^t}}$

при $t\leq 0$, $25\cdot 5^t=\underline{9\cdot 5^t}+\underline{\underline{16\cdot 5^t}}\leq \underline{9\cdot 3^t}+\underline{\underline{16\cdot 4^t}}$

Это означает, что неравенство (*) верно

тогда и только тогда, когда $k\leq 2$

Тогда $4^k\in(0;16]$

$0<x^2+6x\leq 16$

$\begin{cases} x\in(-\infty;-6)\cup(0;+\infty) \\ x\in[-8;2] \end{cases} \Rightarrow x\in[-8;-6)\cup(0;2]$

Ответ: $x\in[-8;-6)\cup(0;2]$

№5.

Пусть x - рационально.

Тогда $f(x\cdot 1)=f(x)+f(1)$

значит, $f(1)=0$.

Пусть p - простое число. Тогда $f(p\cdot\frac{1}{p})=f(p)+f(\frac{1}{p})$

$f(\frac{1}{p})=-f(p)=-\left[\frac{p}{4}\right]$

Пусть $x=p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_n$ - разложение на простые множители нат. числа x

($p_1, p_2, \ldots, p_n$ - прост. числа)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Тогда $f(x) = f(p_1) + f(p_2) + \ldots + f(p_n) = \left[\frac{p_1}{4}\right] + \left[\frac{p_2}{4}\right] + \ldots + \left[\frac{p_n}{4}\right]$ (*)

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = f\left(\frac{1}{p_1}\right) + f\left(\frac{1}{p_2}\right) + \ldots + f\left(\frac{1}{p_n}\right) = -\left[\frac{p_1}{4}\right] - \left[\frac{p_2}{4}\right] - \ldots - \left[\frac{p_n}{4}\right] = -f(x).$$

тогда

$f(x/y) = f(x) - f(y) < 0$

то есть $f(x) < f(y)$

Рассмотрим числа $f(3), f(4), \ldots, f(27)$.

Согласно (*) получим, что $f(3) = f(4) = f(6) = f(8) = f(9) = f(12) = f(16) =$

$= f(18) = f(24) = f(27) = 0$ (10 чисел).

$f(5) = f(7) = f(10) = f(14) = f(15) = f(20) = f(21) = 1$ (7 чисел)

$f(11) = f(22) = f(25) = 2$ (3 числа)

$f(13) = f(26) = 3$ (2 числа)

$f(17) = f(19) = 4$ (2 числа)

$f(23) = 5$ (1 число).

Заметим, что если $f(x/y) < 0$, то нат. значению x будут соответствовать все нат. значения y, при которых $f(y) > f(x)$.

тогда так как $3 \le x \le 27$; $3 \le y \le 27$, Кол-во пар (x, y) равно $10 \cdot (7+3+2+2+1) + 7 \cdot (3+2+2+1) + 3 \cdot (2+2+1) +$

$+ 2 \cdot (2+1) + 2 \cdot 1 = 150 + 56 + 15 + 6 + 2 =$

$= 221 + 8 = 229$

Ответ: 229

№ 4.

Пусть $AB = 2R$; O - середина AB и центр Ω; O_1 - центр ω.

(пусть r - радиус ω). Пусть $\angle CAE = \beta$

$\angle BCA = 90°$ (AB - диаметр).

тогда $\angle CDA = 90° - \angle CAE = 90° - \beta$

(Заметим, что углы $\angle CDA$ и $\angle CAD$ - острые в п/у $\triangle DCA$)

Заметим, что $O_1D \perp BC$ (BC - касательная к ω).

Тогда $\angle O_1DA = 90^\circ - \angle ADC = \beta$.

$O_1D = O_1A$, тогда $\angle DAO_1 = \beta$; $\angle DO_1A = 180^\circ - 2\beta$

Значит, $\angle CBA = 90^\circ - \angle CAB = 90^\circ - \angle CAE - \angle DAO_1 = 90^\circ - 2\beta$.

Тогда по теореме синусов $CA = 2R \sin \angle CBA = 2R\cos(2\beta)$
(для Ω)

Кроме того, $\operatorname{tg} \angle DAC = \frac{CD}{CA}$

$$CD = 2R\cos(2\beta)\operatorname{tg}\beta$$

По теореме синусов для $\triangle BDA$:

$$\frac{AB}{\sin \angle BDA} = \frac{BD}{\sin \angle DAO_1}$$

$$\angle BDA = 180^\circ - \angle CDA = 90^\circ + \beta$$

$$BD = \frac{2R}{\cos\beta} \cdot \sin\beta = 2R\operatorname{tg}\beta$$

$$\cos(2\beta) = \frac{CD}{BD} = \frac{5}{13} = 2\cos^2\beta - 1$$

$$\frac{9}{13} = \cos^2\beta$$

β - острый угол, тогда $\cos\beta = \frac{3}{\sqrt{13}}$

$\sin\beta = \frac{2}{\sqrt{13}}$.

$\left.\begin{array}{l}\angle BFA = 90^\circ \\ \angle BFE = \angle BAE = \beta\end{array}\right| \Rightarrow \angle AFE = \angle BFA - \angle BFE = 90^\circ - \beta$

Тогда $\sin \angle AFE = \cos\beta = \frac{3}{\sqrt{13}}$

$\angle AFE = \arcsin\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$

$$R = \frac{BD}{2\operatorname{tg}\beta} = \frac{13}{4 \cdot \frac{2}{3}} = \frac{39}{8}$$

$O_1D \perp BC$; $AC \perp BC$. Тогда $\triangle BDO_1 \sim \triangle BCA$

$$\frac{AB}{BO_1} = \frac{BC}{BD}$$

$$\frac{2R}{2R - r} = \frac{18}{13}$$

$$r = \frac{5}{9}R = \frac{65}{24}$$

~~Ответ:~~ Пусть $EF \cap BC = K$. $\angle FEA = \angle KED = 90^\circ - \angle \cancel{EKD}\ EDK = 90^\circ - \angle CDA = \beta$

$\angle AFE = 90^\circ - \beta$, значит $\angle EAF = 90^\circ$.

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 4

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

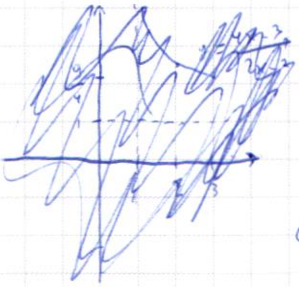
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Тогда $S_{AEF} = \frac{1}{2}\cdot AE\cdot AF = \frac{1}{2}\cdot(2R\sin\angle AFE)\cdot(2R\cdot\sin\angle AEF) =$



$= 2R^2\cdot\sin\beta\cdot\cos\beta = \cancel{2}\cdot\frac{9\cdot 13^{\cancel{2}}}{\cancel{64}\,32}\cdot\frac{6}{\cancel{13}} =$

$= \frac{9\cdot13\cdot3}{16} = \frac{27\cdot13}{16} = \frac{351}{16}$

Ответ: $R=\frac{39}{8}$; $r=\frac{65}{24}$; $\angle AFE = \arcsin\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$; $S_{AEF}=\frac{351}{16}$.

№ 2.

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} y\geq\frac{2}{3}x \\ (3y-2x)^2 = 3xy-2x-3y+2 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y\geq\frac{2}{3}x \\ \left[\begin{array}{l} y=\frac{4x-2}{3} \\ y=\frac{x+1}{3} \end{array}\right. \\ y=\frac{2\pm\sqrt{-9x^2+18x+16}}{3} \end{cases}$$

I) если $y=\frac{4x-2}{3}$, то $4x-2 = 2\pm\sqrt{-9x^2+18x+16}$

$4x-4 = \pm\sqrt{-9x^2+18x+16}$

$16x^2-32x+16 = -9x^2+18x+16$

$25x^2-50x=0$

$x=0$ или $x=2$

~~но при $x=0$ $y=\frac{4\cdot0-2}{3}=-\frac{2}{3}<0$~~

$x=0$; $y=-\frac{2}{3}$ или $x=2$; $y=2$

но $y\geq\frac{2}{3}x$, поэтому пара корней $(0;-\frac{2}{3})$ не подходит.

При $x=2$; $y=2$ исходная система верна

II) ~~если~~ если $y=\frac{x+1}{3}$, то $x+1 = 2\pm\sqrt{-9x^2+18x+16}$

$x-1 = \pm\sqrt{-9x^2+18x+16}$

$x^2-2x+1 = -9x^2+18x+16$

$10x^2-20x-15=0$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$2x^2-4x-3=0$

$x = 1 \pm \sqrt{10}$

$x=1+\sqrt{10}$; $y=\frac{2+\sqrt{10}}{3}$ или $x=1-\sqrt{10}$; $y=\frac{2-\sqrt{10}}{3}$

$y \ge \frac{2}{3}x$,

поэтому $x=1-\sqrt{10}$; $y=\frac{2-\sqrt{10}}{3}$

$2x^2-4x-3=0$

$x=1\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$

$x=1+\frac{\sqrt{10}}{2}$; $y=\frac{2+\frac{\sqrt{10}}{2}}{3}$ или $x=1-\frac{\sqrt{10}}{2}$; $y=\frac{2-\frac{\sqrt{10}}{2}}{3}$

$y\ge\frac{2}{3}x$, поэтому

$x=1-\frac{\sqrt{10}}{2}$; $y=\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{10}}{6}$

при точках $(x; y)$ исходная система верна

Ответ: $(2; 2)$, $\left(1-\frac{\sqrt{10}}{2}; \frac{2}{3}-\frac{\sqrt{10}}{6}\right)$.

№ 6.

I) Заметим, что так как $x\in(1;3]$, при $a=-2$; $b=6$,

$\frac{4x-3}{2x-2} > 6-2x$ при $x\ne\frac{3}{2}$, $x\in(1;3]$ и $\frac{4x-3}{2x-2}=6-2x$ при $x=\frac{3}{2}$

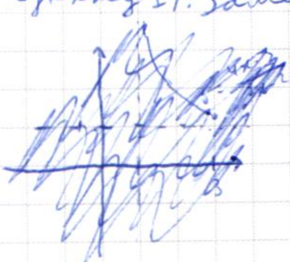
$6-2x > 8x^2-34x+30$ при $x\in(1;3)$ и $6-2x=8x^2-34x+30$ при $x=3$

(кроме того $6-2\cdot1 = 8\cdot1^2-34\cdot1+30$).

II) Рассмотрим точки $A(1; a+b)$ и $B(3; 3a+b)$ на прямой $y=ax+b$

Заметим, что $a+b\ge4$, $3a+b\ge0$ (иначе неравенство верно не для всех $x\in(1;3]$).

По пункту I): Заметим также, что при $x\in[1;3]$ прямая $y=6-2x$ касается графика ф-ции $y=\frac{4x-3}{2x-2}$ в точке $\left(\frac{3}{2}; 3\right)$.



Тогда если $a+b>4$ либо $3a+b>0$ ~~либо $3a+b>0$~~, то прямая $y=ax+b$ будет иметь больше 1 пересечения с графиком

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

ф-ции $y = \frac{4x-3}{2x-2}$ при $x \in [1; 3]$, то есть неравенство

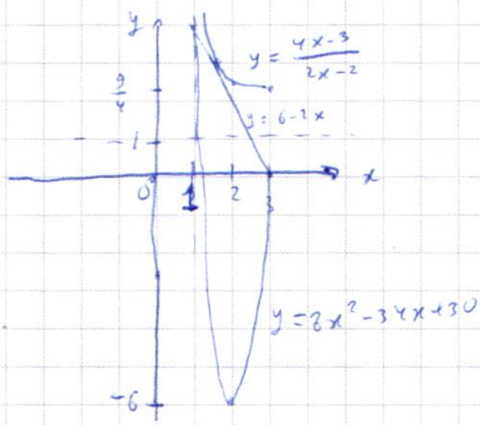
будет верно не при всех $x \in (1; 3]$.

Если $3a + b > \frac{9}{4}$, то точка $B(3; 3a+b)$ лежит выше графика ф-ции $y = \frac{4x-3}{2x-2}$

Тогда $a+b=4$; $3a+b=0$

$a = -2$; $b = 6$

Ответ: $a=-2$; $b=6$



№ 7.

Пусть M — сер. PS

N — сер. RS

K — сер. QR

L — сер. PR

F — сер. QS

$PMNL$ вписан в окружность (сечение сферы плоск-ю (PLM))

При этом $PMNL$ — пар-мм.

Тогда $PMNL$ — пр-ник. (тогда $PR \perp PS$)

Аналогично $KLMF$ — тоже прямоугольник.

Значит, $LK \perp LM \Rightarrow PQ \perp PS$

Тогда $(PQN) \perp RS = N$ (N — сер. RS)

Значит, пирамида симм. относительно (PQN).

тогда $PR = PS$

Тогда $\boxed{RS = \sqrt{PR^2+PS^2} = 2}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$2 - \frac{\sqrt{10}}{2} - 2 + \sqrt{10} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

$b \le 4$

$(3 - \frac{3\sqrt{10}}{2})(\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{10}}{6}) - 2 + \sqrt{10} - 2 + \frac{\sqrt{10}}{2} + 8 =$

$= 2 - \frac{\sqrt{10}}{2} - \sqrt{10} + \frac{30}{12} - 2 + \frac{3\sqrt{10}}{2} = \frac{5}{2} = \frac{10}{4}$

$3(1 + \frac{10}{4} - \sqrt{10}) + 3(\frac{4}{9} + \frac{10}{36} - \frac{4\sqrt{10}}{18}) - 6 + 3\sqrt{10} - \frac{8}{3} + \frac{4\sqrt{10}}{6} =$

$1 + \frac{1}{2x-2}$

$= 3 + \frac{30}{4} - 3\sqrt{10} + \frac{12}{9} + \frac{30}{36} - \frac{12\sqrt{10}}{18} - 6 + 3\sqrt{10} - \frac{8}{3} + \frac{4\sqrt{10}}{6}$

$= 3 + \frac{30}{4} + \frac{4}{3} + \frac{5}{6} - 6 - \frac{8}{3} =$

$= \frac{15}{2} + \frac{5}{6} - 3 - \frac{4}{3} = \frac{50}{6} - \frac{13}{3} = \frac{50-26}{6} = 4$

$a + b \ge 4$

$3a + b \le \frac{9}{4}$

$b \ge 4 - a \le \frac{9}{4} - 3a$

$2a \le -\frac{7}{4}$ $a \le -\frac{7}{8}$

при

$1 + \frac{2x-1}{2x-2} = 1 + \frac{2x-2+1}{2x-2} = 2 + \frac{1}{2x-2} \ge ax + b$

$ax + b$

$34^2 - 32 \cdot 30 = 4 \cdot (17^2 - 240) = 4 \cdot 49$

$\frac{34}{2 \cdot 8} = \frac{17}{8} = 2\frac{1}{8}$

$x = \frac{34 \pm 14}{16} = \frac{17 \pm 7}{8}$

$\frac{9}{4} - 3a \ge b$ при $a < 0$

$a \ge 0$ $6 - 2x$

$x = 3$ или $x = \frac{5}{4}$

$8 \cdot \frac{17^2}{8} - \frac{2 \cdot 17^2}{8} =$

$b \le \frac{9}{4} - 3a$ при

$- \frac{17^2}{8} + 30$

$ax + b \ge (x-3)(8x-10)$

$-4.5(12-10) = -3$

$= 2$

$= - \frac{49}{8}$

$3a + b \ge 0$

$a + b \ge 4$

$\frac{4x-3}{2x-2} - ax \ge b \ge -ax + 8x^2 - 34x + 30$

$0 = 3a + b$

$4 = a + b$

$\frac{9}{4} \ge 2a + b \ge -6.$

$\frac{4x-3}{2x-2} \ge 8x^2 - 34x + 30$

$-4 = 2a$

$a = -2$ $b = 6$

$\frac{6-3}{3-2} = 3$

$4x - 3 \ge 16x^3 - 68x^2 + 60x - 16x^2 + 68x - 60$

$\frac{9}{4} \ge 2a + 4 - a$

$0 \ge 16x^3 - 84x^2 + 122x - 57$

$6 - 2x$

$a \le \frac{9}{4} - 4 = -\frac{7}{4}$

$\ge ax + b \ge 0$

$x = 1 + \sqrt{-\frac{1}{2a}}$

$b \ge -3a$

$\frac{9}{4} \ge 3a - a$

$a \le 0$

$\frac{9}{4} \ge a \ge -\frac{9}{4}$

$\frac{4 + 4\sqrt{-\frac{1}{2a}} - 3}{2 + 2\sqrt{-\frac{1}{2a}} - 2} =$

$\frac{4x-3}{2x-2} - ax \ge b \ge 8x^2 - 34x + 30 - ax$

$f(x)$

$= \frac{1 + 4\sqrt{-\frac{1}{2a}}}{2\sqrt{-\frac{1}{2a}}} - a - a\sqrt{-\frac{1}{2a}} =$

$f'(x) = (2 + \frac{1}{2x-2} - ax)' = -\frac{2}{(2x-2)^2} - a = -\frac{1}{2(x-1)^2} - a = 0.$

$(x-1)^2 = -\frac{1}{2a}$

$x = 1 \pm \sqrt{-\frac{1}{2a}}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$7x-1=6\pm3\sqrt{\ }$ $\quad x=\frac{4\pm4\sqrt{10}}{4}=1\pm\sqrt{10}$

$3(11-2\sqrt{10})+\frac{14-4\sqrt{10}}{3}-6+6\sqrt{10}+\frac{-8+4\sqrt{10}}{3}=4=$

$7(x-1)=\pm3\sqrt{\dots}$

$49x^2-98x+49=9(-9x^2+12x+16)=$ $\quad =75$

$(1-\sqrt{10})^2=1+10-2\sqrt{10}$ $\quad =-81x^2+162x+144$

$130x^2-260x-95=0$ $\quad 3(x+y)^2-10(x-y)$

$D=4\cdot130^2+4\cdot130\cdot95=$ $\quad 3(11-2\sqrt{10})+\frac{4+10-4\sqrt{10}}{3}-6+6\sqrt{10}+\frac{-8-14\sqrt{10}}{3}=4=$

$10(11-2\sqrt{10})-20(1-\sqrt{10})-15=$

$=130(520+380)=130\cdot30^2$ $\quad =33-6\sqrt{10}+\frac{14-4\sqrt{10}-8+4\sqrt{10}}{3}-6+6\sqrt{10}$

$=$

$x=\frac{260\pm30\sqrt{130}}{260}=1\pm\frac{3\sqrt{130}}{26}$ $\quad 27$

$x^2-2x+1=-9x^2+18x+16$

$10x^2-20x-15=0$

$x=1+\frac{3\sqrt{130}}{26}$

$D=400+40\cdot15=$

$=4(100+150)=$

$=4\cdot250=100\cdot10$

$10\sqrt{10}$

$y=\frac{6+\frac{21\sqrt{130}}{26}}{9}=\frac{2}{3}+\frac{7\sqrt{130}}{78}$

$9y^2+4x^2-12xy=3xy-2x+3y+2$

$\frac{9}{3}-2+\frac{7\sqrt{130}}{26}=2+\frac{6\sqrt{130}}{26}$

$9y^2+y(-15x+3)+4x^2+2x-2=0$

$400+600=1000$ $\quad D=225x^2+9-90x-144x^2-72x+72$

$=(9x)^2-2\cdot81x+81=9^2(x-1)^2$

$x=\frac{20\pm10\sqrt{10}}{20}=$

$=1\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$

$y=\frac{15x-3+9x-9}{18}=\frac{24x-12}{18}=\frac{4x-2}{3}$

$16+24=4\cdot10$

$x=\frac{4+2\sqrt{10}}{4}$

$y=\frac{15x-3-9x+9}{18}=\frac{6x+6}{18}=\frac{x+1}{3}$

$-9(11-2\sqrt{10})+18-12\sqrt{10}+16=$

$3y^2-4y+(3x^2-6x-4)=0$

$D=16-12(3x^2-6x-4)=-36x^2+72x+64=4(-9x^2+18x+16)$

$y=\frac{4\pm2\sqrt{\dots}}{6}=\frac{2\pm\sqrt{\dots}}{3}$

$4x-2=2\pm\sqrt{\ }$

$4x-4=\pm\sqrt{\ }$ $\quad x=2$

$16x^2-32x+16=-9x^2+18x+16$ $\quad 2-\sqrt{10}-2+2\sqrt{10}=\sqrt{10}$

$25x^2-50x=0$ $\quad x=0,\ x=2$

$(1-\sqrt{10})(2-\sqrt{10})-2+2\sqrt{10}-8+\sqrt{10}+8=$

$=2+10-3\sqrt{10}-8+3\sqrt{10}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

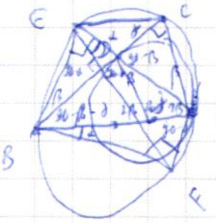
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$CD = \frac{5}{2}$

$BD = \frac{13}{2}$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = [p/4]$

$\cancel{f(x) + f(\frac{1}{y})}$

$\cancel{f(\frac{x}{y}) = f(x)}$

$f(t) = f(\frac{p}{q})$

$f(\frac{1}{p} \cdot p) = [\frac{p}{4}] + f(\frac{1}{p})$

$10 \cdot 15 + 7 \cdot 8 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 2 + 6 + 15 + 56 + 150 = 79 + 150 = 229$

$\gamma = \beta$

$AB = 2R$

$O_1A = r$

$f(x \cdot 1) = f(x) + f(1)$

$f(1) = 0$

0 : 10 : 15

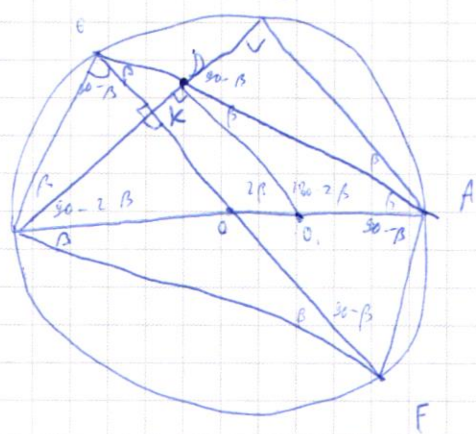
1 : 7 :

2 : 3

3 : 2

4 : 2

5 : 1



$AE = 2R\cos 2\beta$

$f(\frac{1}{p}) = -[\frac{p}{4}]$

$tg\,\beta = \frac{CD}{CA}$

$f(\frac{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}{b_1 \cdot b_2 \cdots b_n}) =$

$CD = 2R\cos 2\beta\, tg\,\beta$

$= [\frac{a_1}{4}] + [\frac{a_2}{4}] + \ldots + [\frac{a_n}{4}] - [\frac{b_1}{4}] - [\frac{b_2}{4}] - \ldots - [\frac{b_n}{4}]$

$\frac{2R}{\cos\beta} = \frac{BD}{\sin\beta}$

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19

0, 0, 1, 1, 2, 3, 4, 4

$BD = 2R\, tg\,\beta$

$f(3) = 0$

$f(4) = 0$

$f(5) = 1$

$f(6) = 0$

$f(7) = 1$

$f(8) = 0$

$f(9) = 0$

$f(10) = 1$

$f(11) = 2$

$f(12) = 0$

$f(13) = 3$

$f(14) = 1$

$f(15) = 1$

$f(16) = 0$

$f(17) = 4$

$f(18) = 0$

$f(19) = 4$

$f(20) = 1$

$f(21) = 1$

$f(22) = 2$

$f(23) = 5$

$f(24) = 0$

$f(25) = 2$

$f(26) = 3$

$f(27) = 0$

$\frac{CD}{BD} = \cos 2\beta = \frac{5}{13} = 2\cos^2\beta - 1$

$\frac{9}{13} = \cos^2\beta$

$2R = \frac{BD \cos\beta}{\sin\beta} = \frac{13}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{39}{4}$

$\cos\beta = \frac{3}{\sqrt{13}}$

$R = \frac{39}{8}$

$\sin\beta = \frac{2}{\sqrt{13}}$

$\frac{2R}{2R - r} = \frac{13/2}{13/2} = \frac{18}{13}$

$26R = 36R - 18r$

$18r = 10R$

$r = \frac{5}{9}R = \frac{5 \cdot 39}{9 \cdot 8} = \frac{65}{24}$

27 + 13 = 81

27

351

$\cancel{\angle AFE = \ldots}$ $\sin\angle AFE = \cos\beta = \frac{3}{\sqrt{13}}$

$\angle AFE = \arcsin(\frac{3}{\sqrt{13}})$

$AF = 2R\sin\beta$, $AE = 2R\cos\beta$

$S_{AFE} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot AF = \frac{1}{2} \cdot 4R^2 \cdot \sin\beta \cdot \cos\beta$

$= 2 \cdot \frac{9 \cdot 169}{64} \cdot \frac{6}{13} = \frac{27 \cdot 13}{16} = \frac{351}{16}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$

$3a+b \leq \frac{9}{4} = \frac{9}{4}$ $72+30-102=0$

$10-4-5+2=3$

$\frac{9}{4} \geq 3a+b \geq 0$

$\frac{5}{2} \geq 2a+b \geq -6.$ $32+30-68$

$4x-3 \geq (2x-2)(ax+b) = 2ax^2-2b-2ax+2bx$

$0 \geq 2ax^2+x(2b-2a-4)-2b+3$

$3(x+y)^2-10(x+y)=$

$=2(3y-2x)^2$

$3t^2-10t=2(3t-5x)^2$

При $a>0$: $f(1)\leq 0$, $f(3)\leq 0$.

$3+4+8\cdot\frac{25}{4_3}-12-\frac{20}{3}=$

$=\frac{5}{3}=4$

$0 \geq 2a+2b-2a-4-2b+3$ (верно)

$145y^2$

$f(3)$

$3t^2-10t=2(9t^2+25x^2-30tx)=$

$0 \geq 18a+6b-6a-12-2b+3=$

$=12a+4b-9$ $\frac{7x-1}{4} \geq \frac{2}{3}x$

$=18t^2+50x^2-60tx$

$\frac{9}{4} \geq 3a+b$

$7x-1 \geq 6x$

$0=15t^2+t(10-60x)+50x^2$

$x \geq 1$

$0=3t^2+t(2-12x)+10x^2$

$\frac{9}{4}-b \geq 3a>0$

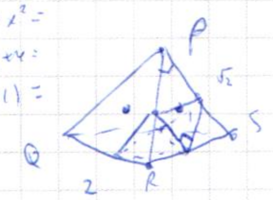
$b<\frac{9}{4}$; $0<a \leq \frac{\frac{9}{4}-b}{3}$

б) $a<0$:

$4+144x^2-48x-120x^2=$

$=24x^2-48x+4=$

$=4(6x^2-8x+1)=$



$3(x+y)^2-10(x+y)+3=2(3y-2x)^2+3$

$(3t-1)(t-3) = 2(3y-2x)^2+3$

$y \geq \frac{2x}{3}$ $\frac{8x-2}{4} \geq \frac{2x}{3}$ $x \geq 1$

$2x \geq 2$

$8x-2 \geq 6x$

$144+36-21=$

$3\sqrt[2]{(x-1)(3y+2)} = 3(x+y)^2-10(x+y)$

$=144+720+36=$

$=720+180=30^2$

$y=\frac{8x-2}{9}$;

$y=\frac{-12-30}{-18}=\frac{42}{18}=\frac{7}{3}$

$3x^2-6x+3y^2-4y-4=0$

$y=-1$

$9y-6$

$D=36-36y^2+48y+48=$

$=-36y^2+48y+84=4(-9y^2+12y+21)=$

$9y+2=8\pm\frac{8}{3}\sqrt{(y+1)(21-9y)}$

$=4(y+1)(-9y+21)$

$3(3y-2)=\pm\frac{8}{3}\sqrt{(y+1)(21-9y)}$

$x=\frac{6\pm2\sqrt{(y+1)(21-9y)}}{6}=1\pm\frac{\sqrt{(y+1)(21-9y)}}{3}$

$81y^2+36-108y=\frac{64}{9}(-9y^2+12y+21)$

$145y^2+36-108y=\frac{64\cdot4y}{3}+\frac{64\cdot7}{3}$

☑ черновик   ☐ чистовик   Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле)   (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta) = -\frac{8}{17}$

$2\frac{1}{\sqrt{17}}\cos(2\beta) = \frac{8}{17}$

$\cos(2\beta) = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

I) $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha \frac{4}{\sqrt{17}} + \frac{\cos 2\alpha}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$16\sin^2 2\alpha = 1+\cos^2 2\alpha + 2\cos 2\alpha$

$16 - 16\cos^2 2\alpha = 1+\cos^2 2\alpha + 2\cos 2\alpha$

$0 = 17\cos^2 2\alpha + 2\cos 2\alpha - 15$

$4 + 60\cdot 17 = 1024$

$\cos 2\alpha = \frac{-2\pm 32}{34}$

$\cos 2\alpha = -1$ ⇒ $\cos\alpha = 0$ (против.)

$\cos 2\alpha = \frac{15}{17} = 2\cos^2\alpha - 1$

$\frac{32}{17} = 2\cos^2\alpha$

$\frac{16}{17} = \cos^2\alpha$

$\cos\alpha = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha = \frac{1}{4}\left(-1-\frac{15}{17}\right) = -\frac{8}{17}$

$\sin\alpha = \mp\frac{1}{\sqrt{17}}$

$tg\,\alpha = -\frac{1}{4}$

II) $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$4\sin 2\alpha = -1+\cos 2\alpha$

$16\sin^2 2\alpha = 1+\cos^2 2\alpha - 2\cos 2\alpha$

$16 - 16\cos^2 2\alpha$

$0 = 17\cos^2 2\alpha - 2\cos 2\alpha - 15$

$\cos 2\alpha = \frac{2\pm 32}{34}$

$\cos 2\alpha = 1 = 2\cos^2\alpha - 1$

$\cos^2\alpha = 1$ ⇒ $\sin\alpha = 0$

$tg\,\alpha = 0$

$\cos 2\alpha = -\frac{30}{34} = -\frac{15}{17} = 2\cos^2\alpha - 1$

$\sin 2\alpha = \frac{1}{4}\left(-\frac{32}{17}\right) = -\frac{8}{17}$

$\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin\alpha = \mp\frac{4}{\sqrt{17}}$

$tg\,\alpha = -4$

$f(k) = 3^k + 4^k - 5^k$

$f'(k) = 3^k(\ln 3) + 4^k(\ln 4) - 5^k(\ln 5)$

$0 = x^2 + x(3y-4) - 3y - 2$

$D = 9y^2 - 24y + 16 + 12y + 8 = 9y^2 - 12y + 24 = 3(3y^2 - 4y + 8)$

если $k \le 2$

$\frac{1}{3}+\frac{1}{4} \ge \frac{1}{5}$ $\quad \frac{7}{12} \ge \frac{1}{5}$

5^k

$x =$

$k \in (-\infty; 2]$

$x^2+6x \in (0; 16]$

$|x^2+6x|^{\log_4 3} + x^2 + 6x \ge |x^2+6x|^{\log_4 5}$

$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \ge |x^2+6x|^{\log_4 5}$

$-x^2$

$x^2+6x = 4^k$ $\quad x^2+6x>0$

$3^k + 4^k \ge 5^k$

$k=2$

$k=3$

$3^3+4^3-5^3 = 64+27-125<0$

$k=4$:

$625 - 256 - 81$

$\sqrt{3}+\sqrt{4} \ge \sqrt{5}$

$2+2\sqrt{3} \ge 5$

При $k\ge 2$:

$9\cdot 3^k + 16\cdot 4^k \le 25\cdot 5^k$

$25\cdot 5^k \ge 9\cdot 5^k + 16\cdot 5^k \ge 9\cdot 3^k + 16\cdot 4^k$

при $k\ge 2$

№2

$3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2} = \sqrt{x(3y-2) - (3y-2)} = \sqrt{(x-1)(3y-2)}$

$3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4$

$9y^2 + 4x^2 - 12xy = 3xy - 2x - 3y + 2$

$3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4$

$9x^2 + 9y^2 - 18x - 12y = 12$

$x(x+6)>0$ $\quad x \in (-\infty; -6)\cup(0;+\infty)$

$x^2+6x-16 \le 0$ $\quad 36+64 = 10^2$

$x \in [-8; 2]$ ⇒ $x \in [-8; -6)\cup(0; 2]$

$\cancel{9y^2} + 4x^2 - 12xy + 12 = 3xy - 2x - 3y + 2 + 9x^2 + 9y^2 - 18x - 12y$

$0 = 5x^2 + x(15y - 20) - 15y - 10$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$3x^2-6x+3+3y^2-4y+1=8$

$3(x-1)^2+(3y-1)(y-1)=8$

$3x^2$

б) $\frac{8x-2}{9}$ $8x-2=6\pm3\sqrt{\dots}$

$8x-2=\pm3\sqrt{\dots}$

$64x^2-128x+64=-81x^2+162x+144$

$145x^2-290x-80=0$

$D=4\cdot145^2+320\cdot145=$

$=145(580+320)=$

$=145\cdot30^2$

$3x^2+3y^2-6x-4y+6xy-4x-6y=2(3xy-2x-3y+2)$

$3(x+y)^2-10(x+y)=2(3xy-2x-3y+2)=$

$=2(3y-2x)^2$

$x=\frac{290\pm30\sqrt{145}}{290}=$

$=1\pm\frac{3\sqrt{145}}{29}$

$x+y=t$

$3t^2-10t=2(5y-2t)^2=2(25y^2+4t^2-20ty)=$ $x\geq1$

$=50y^2+8t^2-40ty$ $x=1+\frac{3\sqrt{145}}{29}$

$\frac{-18+30}{-12}=$

$0=5t^2-40ty+10t+50y^2$ $y=\frac{6+\frac{24\sqrt{145}}{29}}{9}=$

$0=t^2-8ty+2t+5y^2=$

$=t^2+t(2-8y)+5y^2$ $=\frac{2}{3}+\frac{8\sqrt{145}}{87}$

$3^4\cdot2^2+4\cdot16\cdot9=$

$=9(9\cdot4+64)=9\cdot100$

$D=4+64y^2-32y-20y^2=$

$=44y^2-32y+4=$

$=4(11y^2-8y+1)=$

$=$

$3y^2-4y+(3x^2-6x-4)=0$

$D=16-36x^2+72x+48=$

$=-36x^2+72x+64=$

$=4(-9x^2+18x+16)$

$t=4y-1\pm\sqrt{11y^2-8y+1}=x+y$

$\pm\sqrt{11y^2-8y+1}=x-5y+1$

$y=\frac{4\pm2\sqrt{-9x^2+18x+16}}{6}=\frac{2\pm\sqrt{-7}}{3}$

$11y^2-8y+1=x^2+25y^2+1-10xy+2x-10y$

$0=x^2+14y^2-2y+2x-10xy$

$0=3x^2+3y^2-6x-4y-4$

$9y^2+4x^2-12yx=3xy-2x-3y+2$

$9y^2-15xy+3y+4x^2+2x-2=0$

$y(3-15x)$

$D=9+225x^2-90x-144x^2-72x+72=$

$=81x^2-162x+81=9^2(x-1)^2$

$2+\frac{8\sqrt{145}}{29}\geq1+\frac{8\sqrt{145}}{29}$

$y_1=\frac{15x-3+x-1}{18}=\frac{16x-4}{18}=\frac{8x-2}{9}$

$y_2=\frac{15x-3-x+1}{18}=\frac{14x-2}{18}=\frac{7x-1}{9}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geq 6-2x$$

$4x-3 \geq 12x-4x^2-12+4x$

ОДЗ

$4x^2-12x+9 \geq 0$

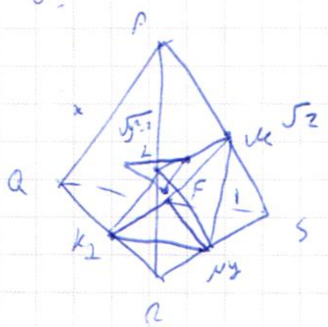
$(2x-3)^2 \geq 0$

$\cancel{6-2x}$

$2(3-x) \geq (x-3)(8x-10)$

$0 \geq (x-3)(8x-8)$

$0 \geq$



$$R^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}\right) + \cancel{\frac{1}{4}\cdot\frac{x^2}{4}} = R^2 - \frac{1}{4}\frac{1}{4}(2+y^2-2)$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)