МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}, \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1) $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$;

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$;

$\sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \sin 4\beta \cdot \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$;

$(2\cos^2 2\beta - 1)\sin 2\alpha + 2\sin 2\beta \cos 2\beta \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$;

$2\cos^2 2\beta \sin 2\alpha - \sin 2\alpha + 2\sin 2\beta \cos 2\beta \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$;

$2\cos 2\beta(\cos 2\beta \sin 2\alpha + \sin 2\beta \cos 2\alpha) = -\frac{8}{17}$

$2\cos 2\beta \cdot \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{8}{17}$, т.к. $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\Rightarrow$ $2\cos 2\beta \left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{8}{17}$

$\cos 2\beta = +\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\beta = \pm\sqrt{\frac{1}{17}}$.

Рассмотрим сначала когда $\sin 2\beta = \sqrt{\frac{1}{17}}$.

Подставим в первое условие

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$;

$\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$;

$\sin 2\alpha \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} + \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad | \cdot \sqrt{17}$.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №1

(Нумеровать только чистовики)

$4\sin 2t + \cos 2t = -1.$

$\sqrt{1-\sin^2 2t} = -1-4\sin 2t;$ $\qquad -1-4\sin 2t \geq 0$

$4\sin 2t \le -1$

$\sin 2t \le -\frac{1}{4}.$

$1-\sin^2 2t = 1+16\sin^2 2t+8\sin 2t.$

$15\sin^2 2t + 8\sin 2t = 0.$

$\left[\begin{array}{l}\sin 2t = 0\\ \sin 2t = -\frac{8}{15};\end{array}\right.$

Если $\sin 2t = 0$; то $2\sin t\cdot\cos t = \sin 2t = 0$;

$2\sin t\cdot\cos t = 0$

$\sin t\cdot\cos t = 0$

$\sin t = 0$ или $\cos t = 0$; Но, т.к. нам нужен $tg\,t$ и он определён и $tg\,t = \frac{\sin t}{\cos t}$; то $\cos t \neq 0$;

$\Rightarrow \sin t = 0$, и $tg\,t = 0$! . Первый ответ найден.

Если $\sin 2t = -\frac{8}{15}$; то $2\sin t\cdot\cos t = -\frac{8}{15}$;

$\sin t\cdot\cos t = -\frac{4}{15}$

$\sin t\cdot\sqrt{1-\sin^2 t} = -\frac{4}{15}$

$\sin^2 t\,(1-\sin^2 t) = \frac{16}{225}$ $\qquad$ Заменим $\sin^2 t = a$; $a>0$

$a(1-a) = \frac{16}{225}$

$a^2 - a + \frac{16}{225} = 0$

$15a^2 - 15a + \frac{16}{15} = 0.$

$D = 225-64 = 121$; $\qquad \left[\begin{array}{l}a_1 = \frac{13}{15}\\ a_2 = \frac{2}{15}\end{array}\right.$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Обратная замена $a = \sin^2 t$

тогда

$\sin^2 t = \frac{13}{15}$ $\qquad$ $\sin^2 t = \frac{2}{15}$

$\sin t = \pm\sqrt{\frac{13}{15}}$ $\qquad$ $\sin t = \pm\sqrt{\frac{2}{15}}$

$\cos t = \pm\sqrt{\frac{2}{15}}$ $\qquad$ $\cos t = \pm\sqrt{\frac{13}{15}}$

$\operatorname{tg} t = \pm\sqrt{\frac{13}{2}}$ $\qquad$ $\operatorname{tg} t = \pm\sqrt{\frac{2}{13}}$

Найдем еще и значение $\operatorname{tg} t$.

теперь если $\sin 2\varphi = -\sqrt{\frac{1}{17}}$

$\frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2t - \frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2t = -\frac{1}{\sqrt{17}} \quad | \cdot \sqrt{17}$

$4\sin 2t - \cos 2t = -1$

$\cos 2t = 1 + 4\sin 2t$. $\qquad$ $1 + 4\sin 2t \le 1$

$4\sin 2t \le 0$

$1 - \sin^2 2t = 1 + 16\sin^2 2t + 8\sin 2t$.

$\sin 2t \le 0$

$17\sin^2 2t + 8\sin 2t = 0$

и

$1 + 4\sin 2t \ge -1$.

$\left[\begin{array}{l} \sin 2t = 0 \text{ - уже рассмотрен} \\ \sin 2t = -\frac{8}{17}. \end{array}\right.$

$\sin 2t \ge -\frac{1}{2}$.

$\sin 2t = -\frac{8}{17}$; $2\sin t \cdot \cos t = -\frac{8}{17}$;

$\sin t \cdot \cos t = -\frac{4}{17}$.

$\sin t \sqrt{1-\sin^2 t} = -\frac{4}{17}$.

$\sin^2 t(1-\sin^2 t) = \frac{16}{289}$

Замена $\sin^2 t = y$; $y \geq 0$.

$y(1-y) = \frac{16}{289}$

$y^2 - y + \frac{16}{289} = 0$.

$17y^2 - 17y + \frac{16}{17} = 0$

$D = 289 - 64 = 225$

$\left[\begin{array}{l} y = \frac{16}{17} \\ y = \frac{1}{17}. \end{array}\right.$

Обратная замена $y = \sin^2 t$

$\sin^2 t = \frac{16}{17}$ | $\sin^2 t = \frac{1}{17}$

$\sin t = \pm\sqrt{\frac{16}{17}}$ | $\sin t = \pm\sqrt{\frac{1}{17}}$

$\cos t = \pm\sqrt{\frac{1}{17}}$ | $\cos t = \pm\sqrt{\frac{16}{17}}$.

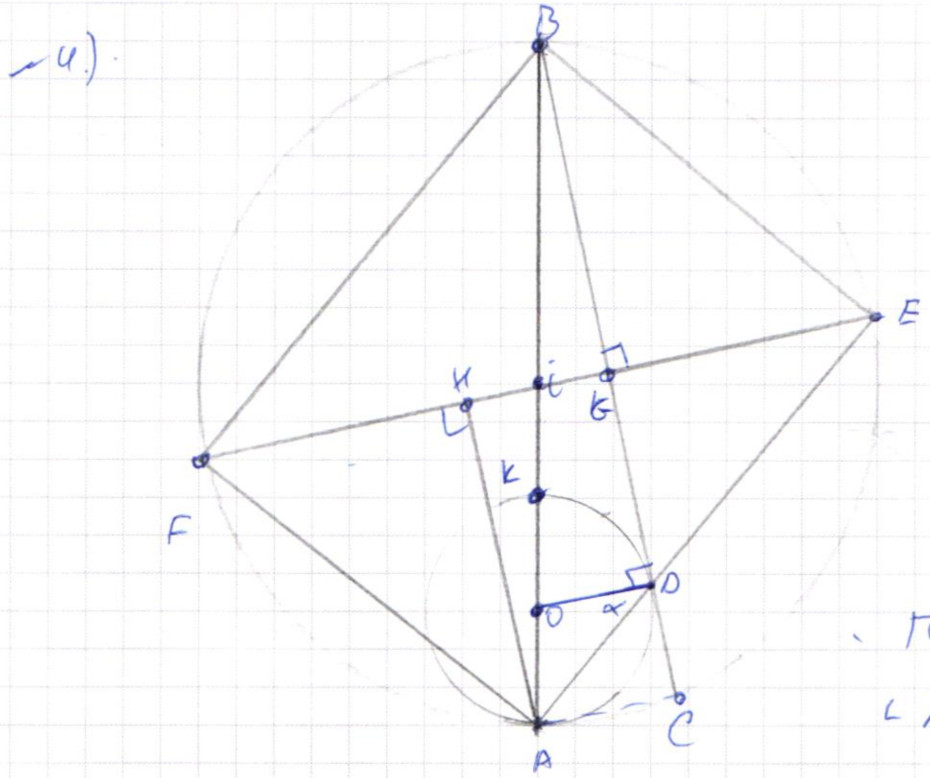
$\operatorname{tg} t = \pm 2$ | $\operatorname{tg} t = \pm \frac{1}{4}$.

Итого мы получили $\operatorname{tg} t = 0$; $\operatorname{tg} t = \pm 2$; $\operatorname{tg} t = \pm\frac{1}{4}$;
$\operatorname{tg} t = \pm\sqrt{\frac{13}{2}}$; $\operatorname{tg} t = \pm\sqrt{\frac{2}{13}}$

Ответ: ± 2; $\pm\frac{1}{4}$; $\pm\sqrt{\frac{2}{13}}$; $\pm\sqrt{\frac{13}{2}}$; 0.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4).



Решение

проведём OD;

O центр окружности ω; i-центр окружности Ω;

BC касается ω в D;

тогда $\angle ODB = \angle ODC = 90°$;

Пусть $\angle ODA = \alpha$, тогда $\angle ADC = 90 - \alpha$; $\Rightarrow$

$\angle EG = 90 - \alpha$ — вертикальные углы с $\angle ADC$;

$\angle EGD = 90°$; по условию; $\angle DEF = \alpha$ - тогда;

$\Rightarrow OD \parallel EF$; т.к. ω и Ω касаются внутренним образом OD - проходит через центр ω; AB-диаметр Ω; A, D, E лежат на одной прямой; $\frac{AK}{AB} = \frac{AD}{AE}$,

значит EF проходит ~~через~~ тоже через центр, (G лежит на EF, то есть EG проходит через центр).

Ω; тогда $EF = AB$; и $\angle BFA = \angle FAE = \angle AEB = \angle EBF = 90°$;

$\angle ACB = \angle ODB = 90°$ $OD \parallel AC$.

$BC = \frac{15}{2}$; $AD = \frac{13}{2}$; $\Rightarrow BC = 9$.

$\triangle OBB \sim \triangle ACB$; по двум углам ($\angle OBB = \angle ACB = 90°$; $\angle ABC$ - общий).

$$\frac{OB}{BC} = \frac{BO}{AB}$$

$BO = D - r$ $\quad D = AB$; $r = OC$; $2r = d = KA$.

$$\frac{13}{2 \cdot 9} = \frac{D-r}{D}$$

$13D = 18D - 18r$

$18r = 5D$

$9d = 5D$

$d = \frac{5D}{9}$

из теоремы о секущей и касательной.

$BK \cdot AB = BD^2$

$BK = D - d = D - \frac{5}{9}D = \frac{4}{9}D$

$D \cdot \frac{4}{9}D = BD^2$

$D = \frac{BD \cdot 3}{2} = \frac{13 \cdot 3}{4}$; $\Rightarrow R = O_1B = \frac{D}{2} = \frac{13 \cdot 3}{8} = \frac{39}{8}$

$d = \frac{5D}{9} = \frac{5 \cdot 13 \cdot 3}{4 \cdot 9} = \frac{5 \cdot 13}{12}$; $r = \frac{5 \cdot 13}{24} = \frac{65}{24}$

$AC \parallel EF$ (ранее получено) $\Rightarrow$ ACEF - равнобедренная трапеция; т.к. вписана в окружность.

т.к. $CG \perp FE$; то опустим вторую высоту из A на EF; пусть это будет AH; $AH = CG$

□ черновик ☑ чистовик Страница № 6
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Но т.к. BC (хорда) $\perp EF$ (диаметр) то

$BG = GC = 4,5$.

тогда $S_{\triangle AEF} = \frac{EF \cdot AH}{2} = \frac{EF \cdot GC}{2} = \frac{39}{4} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{351}{16}$

тогда зная $AB = \frac{39}{4}$, и $BC = 9$

Из прямоугольного $\triangle ACB$ найдём AC.

По теореме Пифагора

$AB^2 = AC^2 + BC^2$

$AC^2 = AB^2 - BC^2$

$AC^2 = \frac{39^2 - 81 \cdot 16}{16} = \frac{225}{16}$; $AC > 0$ - сторона $\triangle$.

$AC = \frac{15}{4}$;

Т.к. $\angle DEF = \angle ODA = \alpha$; то и $\triangle AEF$ - потому прямоугольный ($\angle FAE = 90°$);

$\angle AFE = 90 - \alpha$; т.к. $OD \parallel AC$; AD - секущая, то $\angle ODA = \angle DAC = \alpha$ (накрест лежащие);

тогда из прямоугольного $\triangle ACD$ ($\angle ACD = 90°$),

$\angle ADC = 90 - \alpha = \angle AFE$.

$\operatorname{tg} \angle ADC = \frac{AC}{DC} = \frac{15}{4 \cdot 5} \cdot 2 = \frac{3}{2}$; тогда $\angle AFE = \operatorname{arctg} \frac{3}{2}$.

Ответ: $S = \frac{351}{16}$; $\angle AFE = \operatorname{arctg} \frac{3}{2}$; $r(\omega) = \frac{65}{24}$; $R(\Omega) = \frac{39}{8}$.

3) $3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$

$\log_4(x^2+6x)$ — значит по определению логарифма $x^2+6x>0$.

$3^{\log_4(x^2+6x)}+x^2+6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}$

Заменим $x^2+6x=a$ $a>0$

$3^{\log_4 a}+a \geq a^{\log_4 5}$

Рассмотрим если $a>1$.

То т.к $\log_4 5 \approx 1$, но >1.

То $a^{\log_4 5} \leq a+1$

Тогда $3^{\log_4 a} \geq 1$. $\Rightarrow 3^{\log_4 a}+a \geq a+1$.

$a+3^{\log_4 a} \geq a^{\log_4 5}$ — всегда при $a>1$. (если увеличим правую часть получаем неравенство)

Теперь $a<1$.

~~т.к $a^{\log_4 5}$~~ т.к $\log_4 5>1$; то $a^{\log_4 5}<a$.

Также $3^{\log_4 a} \leq 1$; $3^{\log_4 a}>0$. $\Rightarrow a+3^{\log_4 5}>a$.

Тогда $3^{\log_4 a}+a>a^{\log_4 5}$ — ~~всегда если подс~~ всегда при $a \in (0;1)$;

Тогда $a>0$ и этого достаточно

Обратная замена $a=x^2+6x$

$x^2+6x>0$

$x(x+6)>0$

$x \in (-\infty;-6) \cup (0;+\infty)$

Ответ: $x \in (-\infty;-6) \cup (0;+\infty)$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

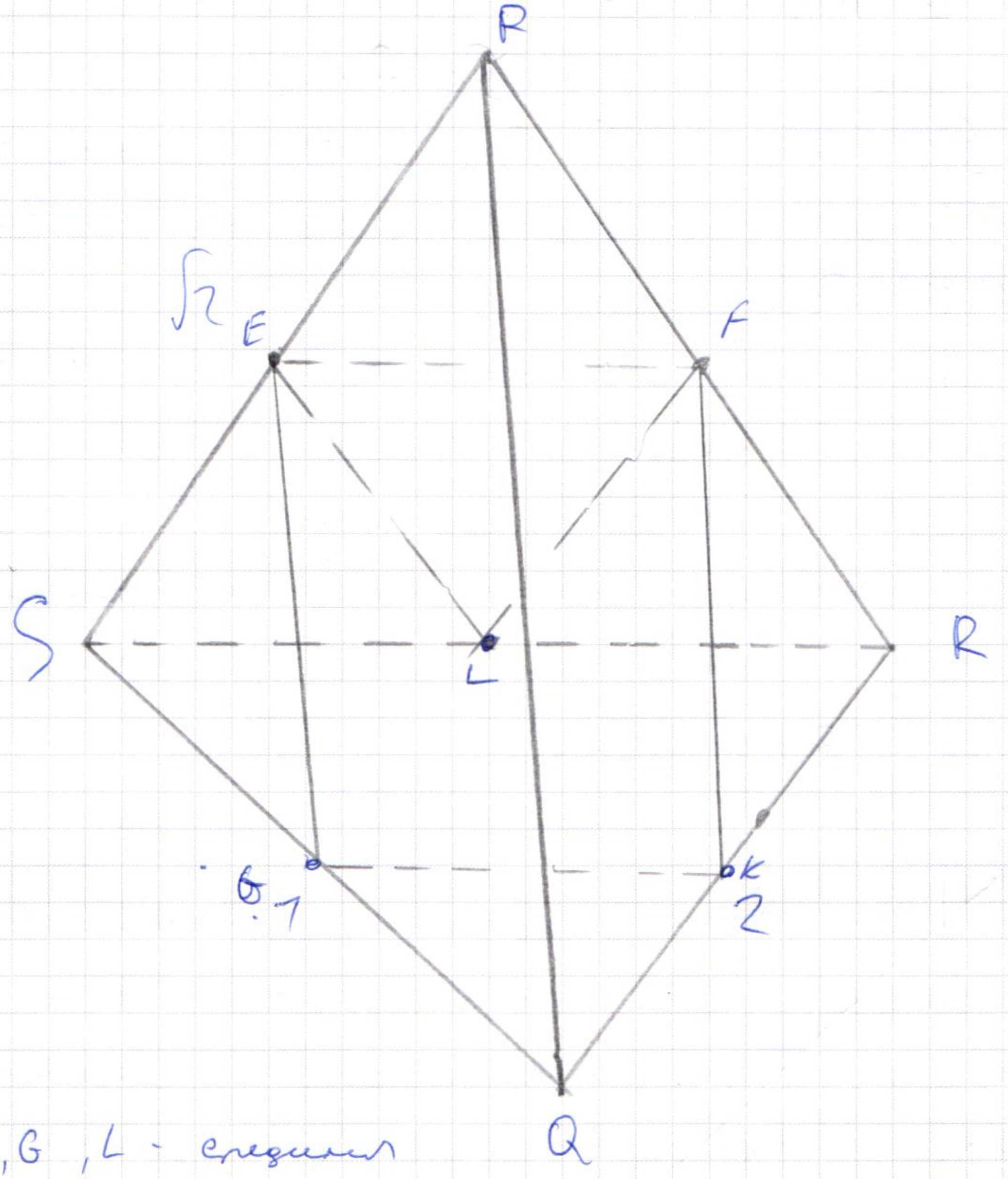
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7)



E, F, K, G, L - средины SR, PR, RQ, SQ, SR; – они стоящей ? – лежат на одной сфере. Т.к. E, F, K, G, L – середины, то из средних линий получается что EGKF - параллелограмм, который вписан в сферу и значит и в окружность; тогда это прямоугольник.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

тогда углы равны по 90° у этого четырёхугольника. $\Rightarrow$ EG и $FK \perp (RQS)$ и $EG \parallel FK \parallel PQ$,

тогда $PQ \perp (RQS)$,

$\Rightarrow \triangle RQP$ и SQP – прямоугольные;

тогда т.к. $\triangle SQP$ – прямоугольный;

$\angle SQP = 90°$; $PS = \sqrt{2}$; $SQ = 1$; то $PQ = 1$;

$\Rightarrow$ для $\triangle RQP$; $\angle RQP = 90°$; $RQ = 2$;

$PR = \sqrt{5}$;

т.к. EFL – середины сторон $\triangle PSR$;

и они лежат с P на одной окружности,

то этот четырёх-угольник $(PLFE)$ – прямоугольник;

(по средним линиям получим параллелограмм, а т.к. вписан в окружность, то прямоугольник).

тогда $\angle RPS = 90°$;

$\Rightarrow RS = \sqrt{7}$;

~~Т.к. эта сфера имеет минимальный радиус; то центр её будет лежать на перпендикуляре к точке Торричелли основания; ведь наш $\triangle RSQ$ – имеет углы меньше чем 120°; больший угол~~

~~$\angle RQS = 120°$; тогда точка торричелли будет в точке Q;~~

~~$-\cos RQS = \frac{7-5}{4} = \frac{1}{2}$; $\cos\angle RQS = -\frac{1}{2} \Rightarrow \angle RQS = 120°$,~~

~~тогда центр сферы будет на RQ.~~

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\angle RQS = 120^\circ$,

$-\cos\angle RQS = \frac{7-5}{4} = \frac{1}{2}$

$\cos RQS = -\frac{1}{2}$; $\Rightarrow \angle RQS = 120^\circ$;

центр сферы будет лежать на $\perp$ к плоскости RQS, опущенная в точку $O \in (RQS)$, которая является центром описанной окружности RQS; R – окружности около RQS будет равна из теоремы синусов

$\frac{RS}{\sin 120} = 2R$; $R = \frac{RS \cdot 2}{\sqrt{3} \cdot 2} = \frac{RS\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{21}}{3}$.

$PO = \frac{\sqrt{30}}{3}$ из $\triangle PQO$; ($\angle PQO = 90^\circ$).

Осталось найти точку которая лежит на $\perp$ к O к плоскости (RQS), которая равноудалена от P и любой вершины $\triangle RQS$.

Ответ: $SR = \sqrt{7}$.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №11

(Нумеровать только чистовики)

2) $\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4. \end{cases}$

Рассмотрим $3x^2+3y^2-6x-4y=4$ относительно x.

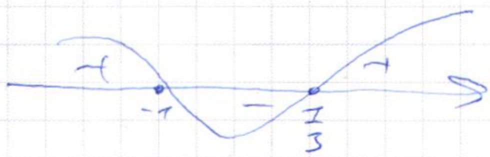
$3x^2+3y^2-6x-4y-4=0$; тогда должно быть что $D\geq 0$

$36-36y^2+48y+48\geq 0$

$36y^2-48y-84\leq 0$

$3y^2-4y-7\leq 0$

$\left[\begin{array}{l} y=\frac{7}{3} \\ y=-1. \end{array}\right.$



$y\in\left[-1,\frac{7}{3}\right]$.

Теперь рассмотрим $3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}$ относительно x,

$9y^2+4x^2-12xy=3xy-2x-3y+2$.

$4x^2-x(15y-2)+9y^2+3y-2=0$.

тогда $D\geq 0$

$\Rightarrow (15y-2)^2-16(9y^2+3y-2)\geq 0$.

$225y^2-60y+4-144y^2-48y+32\geq 0$

$9y^2-12y+4\geq 0$.

$(3y+2)^2\geq 0$;

Из первого для x мы получаем

$$x_1 = \frac{6 + \sqrt{-3y^2+4y+7}}{6}$$

$$x_2 = \frac{6 - \sqrt{-3y^2+4y+7}}{6}$$

Из второго

$$x_1'' = \frac{15y - 2 + 3y - 2}{8} = \frac{18y - 4}{8} = \frac{9y-2}{4}$$

$$x_2'' = \frac{15y - 2 - 3y + 2}{8} = \frac{4}{3}y$$

И теперь составляем ~~все возможные~~ равенства из x_1, x_2, x_1^4, x_2^4; $\cancel{\frac{9y-2}{4} < \frac{4}{3}y}$, в конце проверкой отмечу все неподходящие x, y.

1) $$\frac{6 + \sqrt{-3y^2+4y+7}}{6} = \frac{4}{3}y$$

$$6 - 8y = -\sqrt{-3y^2+4y+7} \qquad y \in (-1; \tfrac{7}{3}]$$

$$36 + 64y^2 - 96y = -3y^2 + 4y + 7$$

$$67y^2 - 100y + 29 = 0.$$

2) $$\frac{6 + \sqrt{-3y^2+4y+7}}{6} = \frac{9y-2}{4}$$

$$12 - 27y + 6 = -2\sqrt{-3y^2+4y+7}$$

$$18 - 27y = -2\sqrt{-3y^2+4y+7}$$

3) $$\frac{6 - \sqrt{-3y^2+4y+7}}{6} = \frac{4}{3}y$$ а это будет тоже что и 1 после преобразований

4) $$\frac{6 - \sqrt{-3y^2+4y+7}}{6} = \frac{9y-2}{4}$$ — это что и 2 после преобразований.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $67y^2 - 100y + 29 = 0$

$D = 10000 - 8092 = 1908$

$y = \dfrac{100 + \sqrt{1908}}{134}$ – подходит для $y \in (-1; \frac{7}{3})$

$y = \dfrac{100 - \sqrt{1908}}{134}$ – подходит для $y \in (-1; \frac{7}{3})$.

2) $\cancel{7}18 - 27y = -2\sqrt{-3y^2+14y+7}$

$324 - 2\cdot 18\cdot 27y + 27^2y^2 = 4(-12y^2+44y+7)$

$324 - 972y - 16y + 629y^2 + 48y^2 - 28 = 0$

$677y^2 - 988y + 296 = 0$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$225y^2-60y+4-144y^2-48y-132\geq 0$

$81y^2-108y+36\geq 0$

$9y^2-12y+4\geq 0$

$16+84=100$

$\cancel{144-16\cdot 9}=$

12

$$\begin{array}{r} \times 67 \\ 29 \\ \hline 703 \\ 134 \\ \hline \times 2043 \\ 4 \\ \hline 8092 \end{array}$$

44×44

$-3-2x=\sqrt{-3x-1}$

$3x^2+3-6x=0.$

$3x^2-6x+3=0$

$x^2-2x+1=0.$

$(x-1)^2=0.$

$x=1$

$-2x=\sqrt{-2x+2}$

$\frac{6+\sqrt{3y^2-4y-7}}{6}=\frac{+19-4}{16}.$

$x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{3y^2-4y-7}}{6}.$

$\frac{15y-2\pm 3y-2}{}=$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{array}{r} \times\, 27 \\ 18 \\ \hline +\,216 \\ 27 \\ \hline \times\, 486 \\ 2 \\ \hline 972 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\, 27 \\ 27 \\ \hline +\,189 \\ 54 \\ \hline 629 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\, 27 \\ 27 \\ \hline +\,189 \\ 54 \\ \hline 629 \end{array}$$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2} \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4. \end{cases}$$

$9y^2 + 4x^2 - \cancel{15}xy + 2x + 3y + 2 = 0$

$\cancel{225y^2 - 16(9y^2 + 2}$

$\cancel{2(x+1)^2}$

$3(x-1)^2 + (y-2)^2 + 2y^2 = \cancel{7}1$

$x^2 - 2x + 1$

$(2 - 15y)^2 - 16(9y^2 + 3y + 2) \geq 0.$

$3(x-1)^2 + (y-2)^2 + 2y^2 = 11.$

$225y^2 - \cancel{60y + 4}$

$- 144y$

$81y^2 - 60y \cancel{+} 48y - 32 \geq 0$

$81y^2 - 108y - 32 \geq 0$

$36 \cancel{- 36y^2 + 48y}$

$3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y - 4 = 0$

$36 - \cancel{3}6y^2 + 48y + 48 \geq 0$

$36y^2 - 48y - \cancel{84} \leq 0.$

$3y^2 - 4y - \cancel{7} \leq 0.$

$16 + 84 =$

$y \in \left(\frac{4\cancel{7}}{3} \quad -1\right)$

$y(-1, \frac{7}{3}).$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(6) = f(2) + f(3)$

$f(10) = f(2) + f(5)$

$f(10) - f(6) = f(5) - f(3)$

$f(2^k) = k$

$\cancel{\log_2 2 \cdot \log_2 8}$

$f(2) = f(1) + f(2)$

$f(1) = 0$

$\cancel{f(8)}$

$\cancel{x-1+x-7}$

$f(2) = 1$

$\cancel{f(6) = 1 + f(3)}$

$f(3) = 1$

$f(6) = 2$

$f(4) = 2$

$f(5) = 2$

$f(7) = 2$

$f(8) = 3$

$f(9) = 2$

$f(10) = 3$

$f(11) = 3$

$f(12) = 3$

$f(13) = 4$

$f(14) \cdot 3$

$\frac{4x-3}{2x-2} \ge ax+b \ge 8x^2-34x+30$ $\quad \frac{5}{2}$ $\quad 46 \quad -68=$

-62

6

$\frac{1}{4} \ge 3a+b \ge 72-102+30.$ $\quad \frac{34}{16}=\frac{17}{8}.$

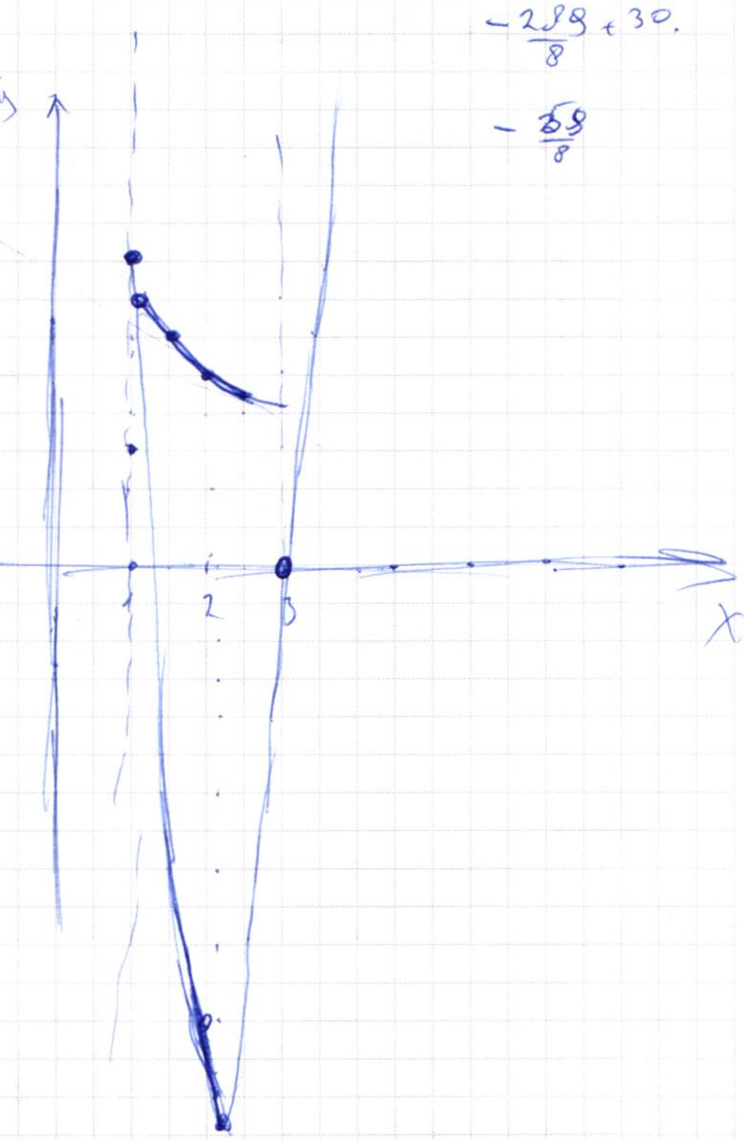
$\frac{289}{8}-\frac{289}{4}+30$

$\frac{1}{4} \ge 3a+b \ge 0.$ $\quad 5$

$-\frac{289}{8}+30.$

$-\frac{\cancel{49}}{8}$

$\frac{13}{6} \quad \frac{7}{3}$



$\frac{4x-3}{2x-2}=8x^2-34x+30.$

$(8x^2-34x+30)(2x-2)=$

$=\cancel{16x^3}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

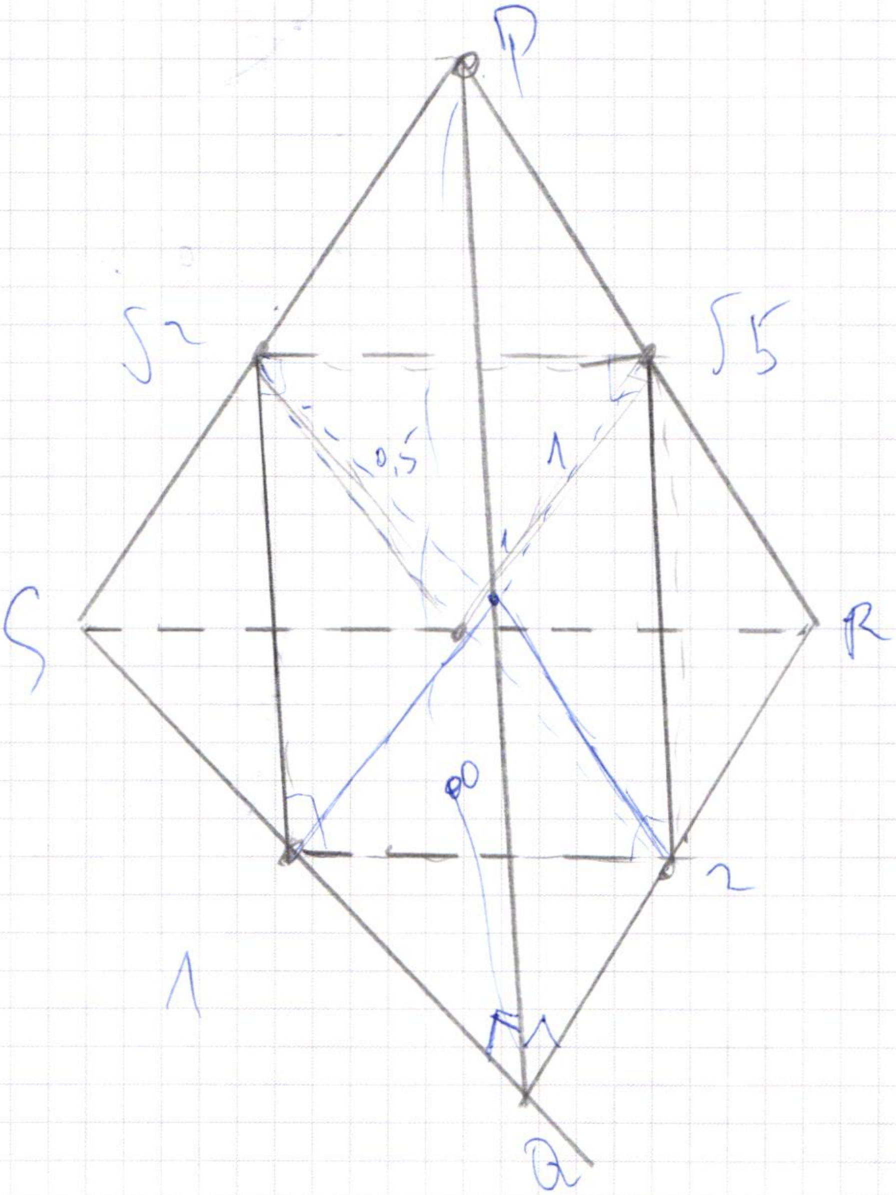
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}$ $\qquad$ $3y-2x\geq 0$

$3x^2+3y^2-6x-4y=4.$

$9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2.$

$9y^2-15xy+4x^2+2x+3y+2=0$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha \cdot (2\cos^2 2\beta - 1) + 2\sin 2\beta \cdot \cos 2\beta \cdot \cos 2\alpha + \sin 2\alpha$

$2\sin 2\alpha \cdot \cos^2 2\beta + 2\sin 2\beta \cos 2\beta \cos 2\alpha =$

$= 2\cos 2\beta \cdot -\frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{8}{\sqrt{17}}$

$\cos 2\beta = \frac{8 \cdot \sqrt{17}}{17} = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\beta = \sqrt{\frac{17-16}{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\frac{4}{\sqrt{17}} \sin 2\alpha + \cos\alpha = -1$

~~16 $\sin^2 2$~~

$\sqrt{1-\sin^2 2\alpha} = \cdot$

$\sqrt{1-\sin^2 2\alpha} = -1 - 4\sin 2\alpha$

$-1-4\sin 2\alpha \geq 0$

$4\sin 2\alpha \leq -1$

$\sin 2\alpha \leq -\frac{1}{4}$

$1-\sin^2 2\alpha = 1 + 8\sin 2\alpha + 16\sin^2 2\alpha$

$15a^2 + 8a = 0$

$a = 0$

$15a = -8$

$a = -\frac{8}{15}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\sin 2t = 0$

$\sin 2t = -\frac{8}{15}$

$-\frac{8}{15}$ $\quad -\frac{1}{4}$

$-\cancel{\frac{32}{60}}$

a

$\sin t = \pm\sqrt{\frac{13}{15}}$ $\quad \cos t = \pm\sqrt{\frac{2}{15}}$

$\sin t = \pm\sqrt{\frac{2}{15}}$ $\quad \cos t = \pm\sqrt{\frac{13}{15}}$

$\cancel{2t=}$

$2\sin t \cdot \cos t = 0.$

1) $\sin t = 0$ $\qquad tg\, t = 0.$

$\cos t = 0.$

2) $\sin t \cdot \cos t = -\frac{4}{15}$

$\cancel{\sin t = -\frac{4}{15}}$

$\frac{\sin t}{\cos t} = \pm\sqrt{\frac{2}{13}}$

$\cancel{\sin t =}$

$a(1-a) = \frac{16}{225}.$

$\pm\sqrt{\frac{13}{2}}$

$\cos t = -\frac{4}{15} \cdot \frac{15}{13} = -\frac{4}{13}.$

$\cancel{a - a^2 = \frac{16}{225}}.$

$\cancel{\cos t = -\frac{4}{15 \cdot 2} \cdot 15 = -2}$

$a^2 - a + \frac{16}{225} = 0.$

$15a^2 - 15a + \frac{16}{15} = 0$

$\cancel{169 + 16}$

$225 - 64 = 121 = 11$

$\cancel{\frac{15+11}{30} = \frac{26}{30} = \frac{13}{15}}.$ $\quad \frac{225-169}{225} = \frac{56}{225}$

$\sin t = \frac{2}{15}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6) $\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b$

$ax+b \geq 8x^2-34x+30.$

$2x-2 \neq 0$

$x \neq 1.$

$4x-3 \geq (ax+b)(2x-2)$

$(ax+b)(2x-2) \geq$

$\cancel{8x^2-34x+30=0.}$

$\cancel{4x^2-17x+30=0.}$

$\cancel{289-}$

$\sin(2\alpha+\sin 2\beta) = \frac{-1}{\sqrt{17}}$

$\to$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \sin 4\beta \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = \sin 2\alpha\,(2\cos^2 2\beta - 1) + 2\sin 2\beta \cos 2\beta \cos 2\alpha +$

$+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$2\sin 2\alpha \cos^2 2\beta \; \cancel{-\sin 2\alpha} + 2\sin 2\beta \cos 2\beta \cos\alpha = -\frac{8}{17}$

$2\cos 2\beta(\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha)$

$\sin 2B = \frac{17-16}{17} = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$2\cos 2\beta \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{8}{17}$

$\frac{4}{\sqrt{17}}$

$2\cos 2\beta = \frac{8\sqrt{17}}{17}$

$\cos 2\beta = \frac{4\sqrt{17}}{17}.$

$\sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} + \frac{4}{\sqrt{17}} \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}.$

$\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = -1.$

$\sin 2\alpha + 4\sqrt{1-\sin^2 2\alpha} = -1.$

$\cancel{-1-\sin 2\alpha \geq 0}$ $\quad -1-\sin 2\alpha \geq 0.$

$\sin 2\alpha$ $\quad \sin 2\alpha = -1.$

$2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{1}{2}.$

$\sin^2\alpha \cdot (1-\sin^2\alpha) = \frac{1}{4}.$

$a(1-a) = \frac{1}{4}.$

$a - a^2 = \frac{1}{4}$

$a^2 + \frac{1}{4} - a = 0.$ $\quad \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

$4a^2 - 4a + 1 = 0$ $\quad 1).\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}.$

$16 - 16 = 0$

$\frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$

$\cancel{\sin}$ $\quad 1 - \sin^2 2\beta = \frac{16}{17}.$

$\sin^2 2\beta = \frac{1}{17}$

$\frac{32}{34} = \frac{16}{17}$

$\pm\sqrt{\frac{1}{17}}$

$\frac{1}{17}$

$\frac{-\sqrt{13}+\sqrt{2}+4}{\sqrt{15}\sqrt{17}} = -1$

$-\frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{15}}} + \frac{4}{\sqrt{17}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{15}} =$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4. \end{cases}$$

$\cancel{39x9}$

$\frac{39}{4}-81\cdot 16$

$3^{\log_4 a}+a\geq 16^{\log_4 5}$

$a>0.$

$a>1.$ $\quad 3^4+16\geq 16^1$

$a<1$

$\frac{1}{a}$

$39 \times 39 = 1521$; $1521-1296=225$

$81 \times 16 = 1296$

$\frac{15}{4}.$

$\frac{5}{2\cdot 15}\cdot 4=\frac{2}{3}.$

$a\,\mathrm{arcctg}\,\frac{2}{3}.$

3)

$x^2+6x>0.$

$x(x+6)$ $\quad (-\infty;-6)\cup(0;+\infty)$

$a\,\mathrm{arcctg}\,\frac{3}{2}$

$\frac{39}{4}\cdot\frac{9}{2}\cdot 2=\frac{39\cdot 9}{16}=\frac{351}{16}.$

$\frac{351}{16}=y^2+9$

$\frac{39}{8}+\frac{65}{24}$

$2R^2+2\cos 2t\cdot R^2$

$\frac{3\cdot 39+65}{24}=$

$2R^2(1+\cos 2t)=y^2$

$=\frac{182}{24}=\frac{91}{12}$

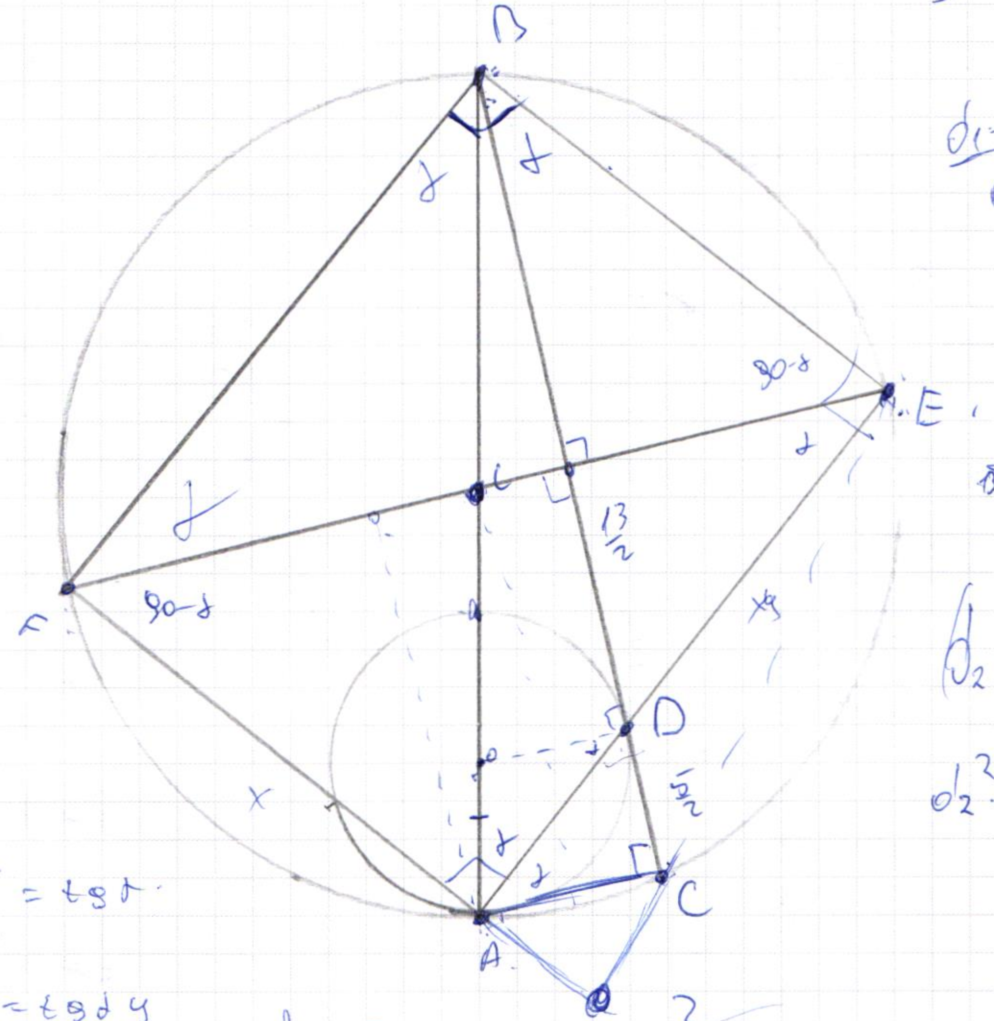
$\cos 2t=\frac{y^2}{2R^2}-1.$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$\frac{39}{4}+$

9.



$\frac{d_1+r_2}{d_1} = \frac{13}{2\cdot 9}$

~~$18d_1 = 18d_1+18r_1$~~

$(d_2-d_1)d_2 = \frac{169}{4}$

$d_2^2 - d_1 d_2 = \frac{169}{4}$

$\frac{x}{y} = tg\,\gamma$

$x = tg\,\gamma\, y$

~~$\frac{4,5-9}{2} = 4,5$~~

$\frac{4,5}{x} = \frac{AE}{EF}$

$4,5 = \frac{AE}{EF}\cdot x$

$4,5 = \cos\gamma\cdot x$

$d_2 = \frac{5}{9}\cdot\frac{13\cdot 3}{4} = \frac{5\cdot 13}{12}$

$d_1 = \frac{13\cdot 3}{4}$ $\quad d_1^2 = \frac{169\cdot 9}{16}$

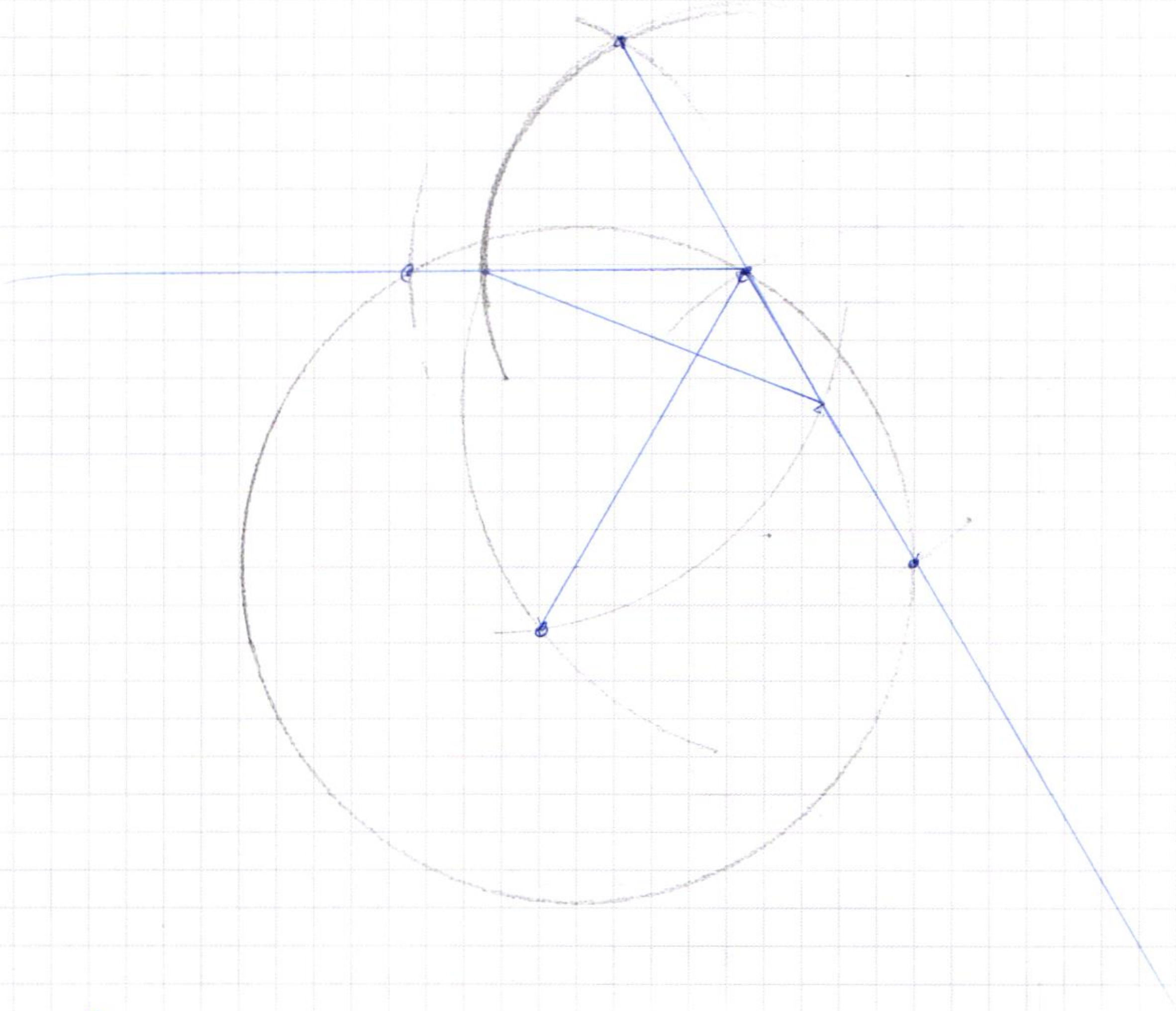
$18r_2 = 5d_1$

$9d_2 = 5d_1$

$d_1^2 - \frac{5}{9}d_1^2 = \frac{169}{4}$

$9d_1^2 - 5d_1^2 = \frac{169\cdot 9}{4}$

$4d_1^2 = 169\cdot$



$2+7-2\cdot2\cdot7\cos t=1.$

$7\cos t=+2$

$\cos t=\frac{2}{7}$

$2k \quad k \quad \sqrt{7}k.$

$\frac{\sqrt{21}}{3}k=.$

$\frac{2}{\sqrt{7}}$

$\frac{\sqrt{7}}{2}$

$-\frac{7}{4}+\cancel{4-2\cdot\frac{2}{\sqrt{7}}\cdot\frac{\sqrt{7}}{2}\cdot2}$

$\frac{\sqrt{7}}{2}$

$\frac{7}{4}+4-2\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{\sqrt{7}}{2}\cdot2=$

$\frac{7}{4}+\frac{4\sqrt{7}}{7}=\sqrt{\frac{49+16k}{28}}.$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$PQ \perp (ASQR)$. $PQ = 1$; $PR = \sqrt{5}$

$\sqrt{7}$

$4 \quad 2\sqrt{5}$

$\operatorname{arctg} = 2$. $\cancel{\cos} \operatorname{arctg} 2$

$\sin t = \frac{2}{\cancel{\operatorname{arccos} 2}}$

$1 + 5 - 2\sqrt{5}\cos t = 4$.

$-\sqrt{5}\cos t = -1$

$\cos t = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\cancel{x^2 + \sqrt{5}}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)