МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №2

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y-2x=\sqrt{(x-1)(3y-2)} \\ 3x^2-6x+3+3y^2-4y+\frac{4}{3}=4+3+\frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (3y-2)-2(x-1)=\sqrt{(x-1)(3y-2)} \\ (\sqrt{3}x-\sqrt{3})^2+(\sqrt{3}y-\frac{2}{\sqrt{3}})^2=\frac{25}{3} \end{cases}$$

Пусть $z=x-1$, $w=y-\frac{2}{3}$, тогда

$$\begin{cases} 3w-2z=\sqrt{z\cdot 3w} \\ z^2+w^2=\frac{25}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9w^2-15wz+4z^2=0 \\ z^2+w^2=\frac{25}{9} \\ 3w-2z\geqslant 0 \\ wz\geqslant 0 \end{cases}$$

Решим первое уравнение полученной системы как квадратное относительно w.

$D=225z^2-144z^2=81z^2 \qquad w=\frac{15z\pm 9z}{18}=\left[\begin{array}{l}\frac{4}{3}z \\ \frac{z}{3}\end{array}\right.$

1) $w=\frac{4}{3}z \qquad z^2+\frac{16}{9}z^2=\frac{25}{9} \qquad \frac{25z^2}{9}=\frac{25}{9}$

1.1) $z=1 \quad w=\frac{4}{3}$ подходит

1.2) $z=-1 \quad w=-\frac{4}{3}$ не подходит по 3-му ур-ю системы

2) $w=\frac{z}{3} \qquad z^2+\frac{z^2}{9}=\frac{25}{9} \qquad 10z^2=25 \qquad z^2=\frac{5}{2}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

2.1) $z=+\sqrt{\frac{5}{2}}$ $w=\frac{\sqrt{\frac{5}{2}}}{3}$ не подходит по 3-му ур-ю системы

2.2) $z=-\sqrt{\frac{5}{2}}$ $w=\frac{-\sqrt{\frac{5}{2}}}{3}$ подходит

1) $z=1$ $w=\frac{4}{3}$ $x=2$ $y=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}=2$

2) $z=-\sqrt{\frac{5}{2}}$ $w=-\frac{\sqrt{\frac{5}{2}}}{3}$ $y=\frac{2-\sqrt{\frac{5}{2}}}{3}$ $x=1-\sqrt{\frac{5}{2}}$

Ответ: $(2;2)$; $\left(1-\sqrt{\frac{5}{2}};\ \frac{2-\sqrt{\frac{5}{2}}}{3}\right)$

Задание 1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha)=-\frac{8}{17} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}} \\ 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta)=-\frac{8}{17} \end{cases}$$

$\frac{-2}{\sqrt{17}}\cos(2\beta)=-\frac{8}{17}$ $\cos(2\beta)=\frac{4}{\sqrt{17}}$ $\sin(2\beta)=\pm\sqrt{1-\frac{16}{17}}=\pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin 2\alpha\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

1) $\sin(2\beta)=\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\frac{4\sin 2\alpha}{\sqrt{17}}+\frac{\cos 2\alpha}{\sqrt{17}}=-\frac{1}{\sqrt{17}}$ ~~$8\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha\sin^2\alpha+$~~

$8\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=0$

$\cos^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha=0$ $\cos^2\alpha(1+4\,tg\alpha)=0$

$tg\alpha=-\frac{1}{4}$ $(\cos\alpha\neq 0)$

2) $\sin(2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\frac{4\sin 2\alpha-\cos 2\alpha}{\sqrt{17}}=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$8\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=0$

$\sin^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha=0$ $\sin\alpha(\sin\alpha+4\cos\alpha)=0$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание 1 (продолжение)

$\cos\alpha \neq 0 \quad \operatorname{tg}\alpha(\operatorname{tg}\alpha + 4) = 0 \quad \operatorname{tg}\alpha = 0$

$\operatorname{tg}\alpha = -4$

Ответ: $-4; -\frac{1}{4}; 0$

Задание 5

$f(ab) = f(a) + f(b) \quad f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

$f(2) = f(3) = 0 \quad f(5) = f(7) = 1$

$f(1\cdot p) = f(1) + f(p), \Rightarrow f(1) = 0$

Пусть k — какое-то положительное число

$f(k\cdot k) = f(k^2) = f(k) + f(k) = 2f(k)$

$f(k) = f\left(\frac{1}{k}\cdot k^2\right) = f\left(\frac{1}{k}\right) + f(k^2) = f\left(\frac{1}{k}\right) + 2f(k), \Rightarrow$

$f\left(\frac{1}{k}\right) = -f(k)$

$3 \le x \le 27 \qquad 3 \le y \le 27$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \quad f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0 \quad f(x) - f(y) < 0$

$f(y) > f(x)$

значения f	соответствующие аргументы	Количество
0	3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 27	10
1	5, 7, 10, 14, 15, 20, 21	7
2	11, 22, 25	3
3	13, 26	2
4	17, 19	2
5	23	1

$f(y) > f(x)$ Переберем значение $f(y)$, посмотрим какие $f(x)$ и сколько может соответств.

Задание 5 (продолжение)

1) $f(y)=0$ — 0 вариантов

2) $f(y)=1$ — $7\cdot10=70$ вар.

3) $f(y)=2$ — $3\cdot10+3\cdot7=51$ вар.

4) $f(y)=3$ — $2\cdot10+2\cdot7+2\cdot3=20+14+6=40$ вар.

5) $f(y)=4$ — $2\cdot10+2\cdot7+2\cdot3+2\cdot2=44$ вар.

6) $f(y)=5$ — $\cancel{1}\cdot10+1\cdot7+1\cdot3+1\cdot2+1\cdot2\cancel{+1\cdot1}=$

$=10+7+3+2+2=24$ вар.

Всего вариантов: $0+70+51+40+44+24=$

$=121+84+24=225$

Ответ: 225 пар

Задача 3

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2 \qquad x^2+6x\geq0$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+(x^2+6x)\geq|x^2+6x|^{\log_4 5}$

Пусть $t=x^2+6x$, $t\geq0$

$3^{\log_4 t}+t\geq t^{\log_4 5}$ ($t\geq0$, => модуль можно убрать)

Если $t=16$, то $3^2+16=16^{\log_4 5}$ $\quad 9+16=(4\cdot4)^{\log_4 5}$

$25=25$ — правда, => при $t=16$ выполняется равенство. $\quad x^2+6x\in[0;16]$

Ответ:

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y-2x=\sqrt{(x-1)(3y-2)} \\ 3x^2-6x+3+3y^2-4y+\frac{4}{3}=4+3+\frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (3y-2)-2(x-1)=\sqrt{(x-1)(3y-2)} \\ (\sqrt{3}x-\sqrt{3})^2+\left(\sqrt{3}y-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{25}{3} \end{cases}$$

Пусть $z=x-1$, $w=y-\frac{2}{3}$, тогда

$$\begin{cases} 3w-2z=\sqrt{z\cdot 3w} \\ z^2+w^2=\frac{25}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9w^2-12wz+4z^2=3wz \\ z^2+w^2=\frac{25}{9} \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times\ 4 \\ \hline 144 \end{array}$$

~~$w^2=\frac{25}{9}-z^2$~~ ~~$25-9z^2-12z\left(\frac{25}{9}-z^2\right)+4z^2$~~

$9w^2-15zw+4z^2=0$ ~~$D=225z^2$~~

$4\cdot 9\cdot 4z^2=144z^2$

~~$25-9z^2-15z\cdot\sqrt{\ }$~~

$D=225z^2-144z^2=81z^2$

$$w=\frac{15z\pm 9z}{18}=\left[\begin{array}{l} \frac{24z}{18}=\frac{4}{3}z \\ \frac{6z}{18}=\frac{z}{3} \end{array}\right.$$

1) $w=\frac{4}{3}z$ $z^2+w^2=\frac{25}{9}$ $\frac{9z^2+16z^2}{9}=\frac{25}{9}$, $\Rightarrow \frac{25}{9}z^2=\frac{25}{9}$

~~$z=\pm 1$ $w=4$~~

1.1)	$z=1$	$w=\frac{4}{3}$		✓
1.2)	$z=-1$	$w=-\frac{4}{3}$	$-4+2<0$	X

2) $w=\frac{z}{3}$ $z^2+\frac{z^2}{9}=\frac{25}{9}$ $\frac{10z^2}{9}=\frac{25}{9}$ $z^2=\frac{25}{10}=\frac{5}{2}$

2.1)	$z=+\sqrt{\frac{5}{2}}$	$w=\frac{\sqrt{\frac{5}{2}}}{3}$	X
2.2)	$z=-\sqrt{\frac{5}{2}}$	$w=-\frac{\sqrt{\frac{5}{2}}}{3}$	✓

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin(2\alpha) = -\frac{8}{17} \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta) = -\frac{8}{17} \end{cases}$$

$\frac{-2}{\sqrt{17}}\cdot\cos(2\beta) = -\frac{8}{17}$ $\quad\cos(2\beta) = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\beta) = \pm\sqrt{1-\frac{16}{17}} = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

1) $\sin(2\beta) > 0$

$\boxed{\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}}$

$\frac{4\sin 2\alpha}{\sqrt{17}} + \frac{\cos 2\alpha}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$\cancel{17}$ $\cancel{(2+6)8\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = -1}$

$\cancel{(\cos\alpha - \sin\alpha)^2 = -1 + 6\sin\alpha\cos\alpha}$

$3\sin 2\alpha$

$8\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha - \cancel{\sin^2\alpha} + \cos^2\alpha + \cancel{\sin^2\alpha} = 0$

$2\cos^2\alpha + 8\sin\alpha\cos\alpha = 0$

$\cos\alpha(\cos\alpha + 4\sin\alpha) = 0$

$\cos^2\alpha(1 + 4\,tg\alpha) = 0$ $\quad tg\alpha = -\frac{1}{4}$

2) $\sin(2\beta) < 0$

$\frac{4\sin 2\alpha - \cos 2\alpha}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$8\sin\alpha\cos\alpha - \cancel{\cos^2\alpha} + \sin^2\alpha + \sin^2\alpha + \cancel{\cos^2\alpha}$

$2\sin^2\alpha + 8\sin\alpha\cos\alpha = 0$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}(\cancel{tg}\,\alpha + 4\cancel{\cos\alpha}) = 0$

$\sin\alpha = 0 \Rightarrow tg\alpha = 0$

$\cancel{tg\alpha = 4}$ $tg\alpha = -4$

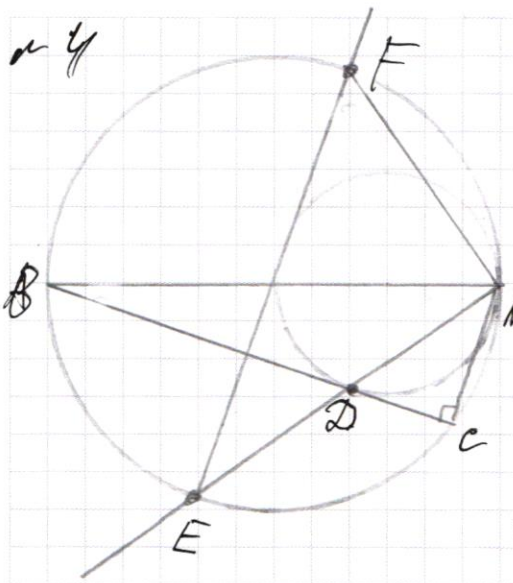
$x^2 + 6x + 9 = 9$

$(x-3)^2 = 3^2$

$y = 64$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4



$CD = \frac{5}{2}$ $BD = \frac{13}{2}$

$BC = 9$

$BD \cdot DC = ED \cdot DA$

$t = \frac{7}{16}$

$\frac{1}{9} + \frac{7}{16} = \frac{1}{5 \cdot 5}$

$f(1) = f(2) = \cancel{0}$
$= f(3) = 0$

№5

$f(ab) = f(a) + f(b)$ $f(p) = [\frac{p}{4}]$

$3 \le x \le 27$ $3 \le y \le 27$

$\cancel{f(1)}$ $\cancel{x=2}$

$\frac{x}{y}$ – простое $\frac{6}{3}$,

$f(1p) = f(p) + f(1) = \cancel{f(p)}$, => $f(1) = 0$

$f(2p) = [\frac{p}{4}] + f(2)$

$f(x) = f(xp) - [\frac{p}{4}]$

$f(1) = f(p) - [\frac{p}{4}] = 0$

Пусть $p = 2$

$f(1) = f(2) - [\frac{2}{4}] =$
$= \cancel{[\frac{2}{4}]}\ 0$

f(

№5

$f(ab) = f(a) + f(b) \qquad f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

$\cancel{f(1)} = f(2) = f(3) = 0$

$\cancel{f(1)} \quad f(2\cdot 1) = f(2) + f(1) \qquad f(1) = 0$

$f(4) = f(2) + f(2) = 0$

$f(5) = \cancel{1} \qquad f(6) = f(2) + f(3) = 0$

$f(7) = 1 \qquad f(8) = f(2) + f(4) = 0$

$f(9) = f(3) + f(3) = 0 \qquad f(10) = 1$

$f\left(\frac{x}{4}\right) < 0 \qquad f(x) + f\left(\frac{1}{4}\right) < 0$

$f\left(\frac{2}{3}\right) = 0 \quad f\left(\frac{4}{3}\right) = f(4) + f\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right)$

$f(a^2) = 2f(a)$

$f(1) = f\left(\frac{1}{3}\cdot 3\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) + f(3) \Rightarrow f\left(\frac{1}{3}\right) = 0$

$f(1) = f\left(\frac{1}{x}\cdot x\right) = f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x)$

$f\left(\frac{1}{x}\right) = f(1) - f(x)$

$\cancel{f(1)} \quad f(c) = f(1\cdot c) = f(1) + f(c) = f(c) =$
$= f\left(\frac{1}{c}\cdot c^2\right) = f\left(\frac{1}{c}\right) + f(c^2) = f\left(\frac{1}{c}\right) + 2f(c)$

$\cancel{f\left(\frac{1}{c}\right) = -f(c)}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3y-2x=\sqrt{(x-1)(3y-2)} \\ (x-1)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=\left(\frac{5}{3}\right)^2 \end{cases} \longrightarrow$$

$x(3y-2)-(3y-2)=\cancel{0}$ $(x-1)(3y-2)$

$\cancel{2x^2+x^2-6x+9+2y^2+y^2-4y+4=4+9+4}$

$(\sqrt{3}x)^2-\underset{2\sqrt{3}\sqrt{3}}{\underset{\shortparallel}{6x}}+(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3}y)^2-\underset{2\sqrt{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}}{\underset{\shortparallel}{4y}}+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2=$

$3x^2-6x+3+3y^2-4y+\frac{4}{3}=4+3+\frac{4}{3}=7+\frac{4}{3}=\frac{21+4}{3}=\frac{25}{3}$

$(\sqrt{3}x)^2-2\cdot\sqrt{3}x\cdot\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3}y)^2-2\sqrt{3}y\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2$

$(\sqrt{3}x-\sqrt{3})^2+\left(\sqrt{3}y-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{25}{3}$

$3(x-1)^2+3\left(y-\frac{3}{3}\right)^2=\frac{25}{3}$

$(x-1)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{25}{9}=\left(\frac{5}{3}\right)^2$

$\underbrace{3y-2}_{3w}=\underbrace{2x+2}_{-2z}$

$\sqrt{3}y-\frac{2}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}\left(y-\frac{2}{3}\right)$

$3\left(y-\frac{2}{3}\right)^2$

~~$y-\frac{2}{3}x=\sqrt{(x-1)(}$~~

Пусть $z=x-1$, тогда $w=y-\frac{2}{3}$

$$\begin{cases} 3w-2z=\sqrt{z\cdot 3w} \\ z^2+w^2=\left(\frac{5}{3}\right)^2 \end{cases}$$

$9w^2-12wz+4z^2=3wz$

$9w^2-15wz+4z^2=0$

$5w^2-15wz+4\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^2=0$

$5w(w-3wz)+\frac{4\cdot5\cdot5}{3\cdot3}=0$

☒ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

1) ~~#~~ $z=1$ $\quad w=\frac{4}{3}$ $\quad x=2$ $\quad y=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}=\frac{6}{3}=2$

2) $z=-\sqrt{\frac{5}{2}}$. $\quad w=\frac{-\sqrt{\frac{5}{2}}}{3}$ $\quad x=1-\sqrt{\frac{5}{2}}$

$y=\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{\frac{5}{2}}}{3}=\frac{2-\sqrt{\frac{5}{2}}}{3}$

$f \in [3;27]$

$f(x)-f(y)<0$

$f(y)>f(x)$

$f(t)=0$ — 10 случаев

$f(t)=1$ — 7 случаев

$f(t)=2$ — 3 случая

$f(t)=3$ — 2 случая

$f(t)=4$ — 2 случая

$f(t)=5$ — 1 случай

1) $f(y)=0$ — 0 случ

2) $f(y)=1$ — ~~70~~ случаев

3) $f(y)=2$ — ~~210~~ случ

$30+21=51$

4) $f(y)=3$

№3

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$

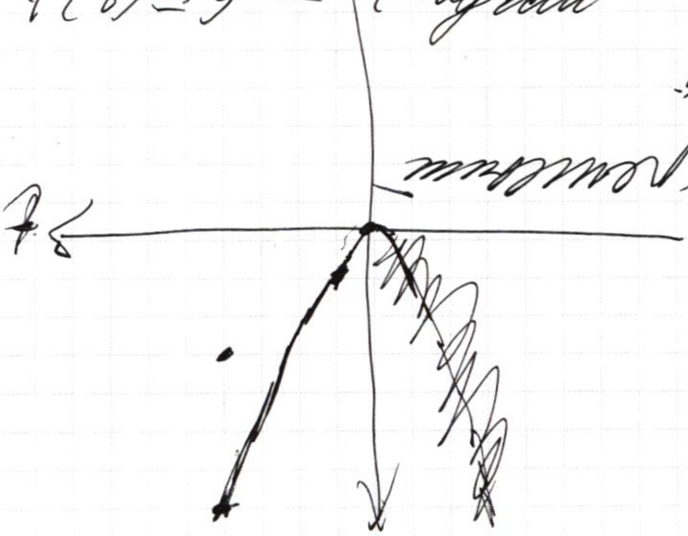
~~$3^{\log_4}$~~

$3^{\log_4(x^2+6x)}+(x^2+6x) \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}$

$t=x^2+6x$

$3^{\log_4 t}+t \geq |t|^{\log_4 5}$

$t>0$



у ур-я не более 2-х решений

$t=1$ $\quad 3^{\log_4 1}+1 \geq 1^{\log_4 5}$

~~$1+1 \geq 1$~~

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$f(ab)=f(a)+f(b)$ $\quad f(p)=\left[\frac{p}{4}\right]$

$f(2)=f(3)=0$ $\quad f(5)=f(7)=1$ $\quad \cancel{f(k)}$

$f(1\cdot p)=f(1)+f(p)$ $\Rightarrow$ $f(1)=0$

Пусть k — какое-то положительное число

$\cancel{f(1)=f\left(\frac{1}{c}\cdot c\right)}$ $\quad f(k)=f(1\cdot k)=f(1)+f(k)=f(k)$

$=f\left(\frac{1}{k}\cdot k^2\right)=f\left(\frac{1}{k}\right)+f(k^2)=f\left(\frac{1}{k}\right)+2f(k)$

$f(k\cdot k)=f(k^2)=f(k)+f(k)=2f(k)$

$\Rightarrow$ $\cancel{f\left(\frac{1}{k}\right)}$ $\quad f(k)=f\left(\frac{1}{k}\right)+2f(k)$

$f\left(\frac{1}{k}\right)=-f(k)$

$\cancel{f\left(\frac{t}{k}\right.}$ $\quad f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)=f(x)-f(y)$

$f(1)=f(2)=f(3)=0$ $\quad f(4)=0$ $\quad f(5)=1$ $\quad f(6)=0$ $\quad f(7)=1$

$f(8)=0=f(9)$ $\quad f(10)=1$ $\quad f(11)=2$ $\quad f(12)=0$

$f(13)=3$ $\quad f(14)=1$ $\quad f(15)=1$ $\quad f(16)=0$

$f(17)=4$ $\quad f(18)=0$ $\quad f(19)=4$ $\quad f(20)=1$

$f(21)=1$ $\quad f(22)=2$ $\quad f(23)=5$ $\quad f(24)=0$

$f(25)=2$ $\quad f(26)=3$ $\quad f(27)=0$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№ 8

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geq 8x^2-34x+30$$

$$2(4x^2-17x+15) \quad D=289-240=49$$

$$\frac{4x-3}{4x-4} \geq 4(x-3)\left(x-\frac{5}{4}\right) \quad x=\frac{17\pm7}{8}=\left[\begin{array}{l}3\\ \frac{5}{4}\end{array}\right.$$

$$\frac{4x-3}{4x-4} \geq \frac{(4x-12)(4x-5)}{4}$$

$$t=4x-3 \quad \frac{t}{t-1} \geq \frac{(t-9)(t-2)}{4}$$

$$4t \geq (t-1)(t-9)(t-2)$$

$$\cancel{4t \geq t^3}$$

$$4t \geq (t^2-10t+9)(t-2)$$

$$4t \geq t^3-12t^2+29t-18$$

$$t^3-12t^2+25t-18 \leq 0$$

$$1-12+25-18=26-28$$

$$\cancel{-1-12-25}$$

$$8-48+50-18=20-18$$

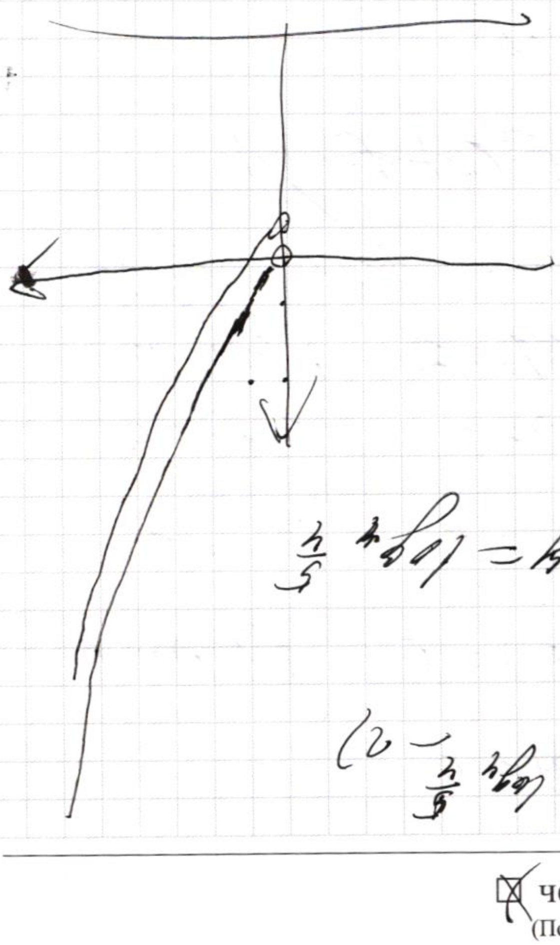
$$216-432+150-18$$

$$366-432-18=$$

$$=334-400-18$$

$$36 \cdot 12 = 432$$

$$25 \cdot 2 \cdot 3 = 50 \cdot 3 = 150$$



☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$

$x_0 = \frac{34}{16} = \frac{17}{8}$

$\frac{x\,34}{102}$ $D = 36$ $x(x+6)$ $x=0$ $x=-6$

$f(x)=8x^2-34x+30$

$f(2)=32-78+30=62-78=$

$f(1)=8-34+30=8-4=4$

$f(3)=8\cdot9-17\cdot2\cdot3+30=72-102+30=0$

$(\sqrt{8}x)^2 - 2\cdot(\sqrt{8}x)\cdot\frac{17}{\sqrt{8}} +$

$f(b)=$

$f(b)=0$ — 10 штук

$b\in[3;27]$

5: 23

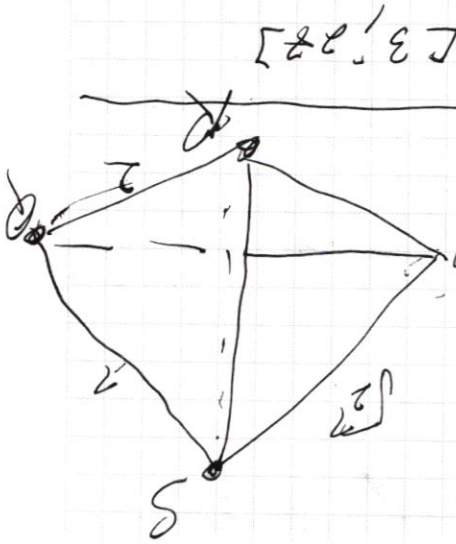
4: 17, 19

3: 13, 26

2: 11, 22, 25

2: 5, 7, 10, 14, 15, 20, 21.

0: 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 27



№1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin(2\alpha+4\beta) + \sin(2\alpha) = -\frac{8}{17}$

$\cancel{\sin\alpha + \sin\beta = -2(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))}$

$\cancel{1 = -2\left(\cos 0^\circ - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = -2\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right) = -1}$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$1 = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin(2\alpha) = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta)$

$\frac{4\alpha+4\beta}{2} = 2\alpha+2\beta$ $\quad -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cancel{+\frac{2}{\sqrt{17}}\cos(2\beta) = +\frac{8}{17}}$ $\quad \frac{-2}{\sqrt{17}}\boxed{\cos(2\beta)} = -\frac{8}{17}$

$\cancel{2\beta = \pm\arccos\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right) + 2\pi n, n\in\mathbb{Z}}$ $\quad \cos(2\beta) = \frac{8}{17}\cdot\frac{\sqrt{17}}{2} =$

$= \frac{4\sqrt{17}}{17} = \boxed{\frac{4}{\sqrt{17}}}$

$\sin(2(\alpha+\beta)) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

sin $\quad \sin(2\beta) = \pm\sqrt{1-\frac{16}{17}} = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cancel{2\sin(\alpha+\beta)}$

$\cancel{2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = 0$

$\pm$ 1) $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \frac{4\sin 2\alpha}{\sqrt{17}} + \frac{\sin 2\beta\cos 2\alpha}{\sqrt{17}} =$

$=$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)