МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2 ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6},\\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5} \quad (2) \\ \sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \quad (1) \end{cases}$$

(1): $\sin 2\alpha(1+\cos 4\beta) + \cos 2\alpha \cdot \sin 4\beta = -\frac{2}{5}$

$\sin 2\alpha(1 + 2\cos^2 2\beta - 1) + \cos 2\alpha \cdot \sin 4\beta = -\frac{2}{5}$

$\sin 2\alpha \cdot 2\cos^2 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 4\beta = -\frac{2}{5}$ (4)

(2): $\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5} - \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta$ (3)

Подставляем (3) в (4):

$\left(-\frac{1}{\sqrt5} - \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta\right) \cdot 2\cos 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 4\beta = -\frac{2}{5}$

$-\frac{2}{\sqrt5}\cos 2\beta - \cos 2\alpha \cdot 2\cos 2\beta \cdot \sin 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 4\beta = -\frac{2}{5}$

$-\frac{2}{\sqrt5}\cos 2\beta - \cancel{\cos 2\alpha \cdot \sin 4\beta} + \cancel{\cos 2\alpha \cdot \sin 4\beta} = -\frac{2}{5}$

$-\frac{2}{\sqrt5}\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\cos^2 2\beta} = \pm\sqrt{1-\frac{1}{5}} = \pm\sqrt{\frac{4}{5}} =$

$= \pm\frac{2}{\sqrt5}$

(2): $\left[\begin{array}{l} \sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt5} + \cos 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt5} - \cos 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2\alpha + \cos 2\alpha \cdot 2 = -1 \\ \sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$x^2+36y^2-12x-36y-45=0$

$x^2-12x+36y^2-36y-45$

$9(4y^2-4y-5)$

3
$+26$
26
156
52
676

$\frac{D}{4}=36-36y^2+36y+45=-36y^2+36y+81=-9(4y^2-4y-9)$

$x\geq 12y$

$x^2-24xy+144y^2=2xy-12y-x+6$

$x^2 \cancel{-26xy} +x(1-26y)+144y^2+12y-6=0$

$-576y^2-48y+24$

$1-52y+676y^2 \cancel{+144y^2+12y-6=0}$

11
144
$\times 4$
576

~~$100y^2+4y+25=0$~~

$100y^2-100y+25=0$

$10y$

3
$+26$
26
156
52
676

11
144
$\times 4$
576

$u\geq 0$

$10x-x^2=u \Rightarrow x^2=10x-u$

$10x+(-u)^{\log_3 4}\geq 10x-u+5^{\log_3 u}$

$(-u)^{\log_3 4}\geq -u+5^{\log_3 u}$

$u+|u|^{\log_3 4}\geq 5^{\log_3 u}$

$\log_3(\ldots)$

~~$\log_3(u+|u|^{\log_3 4})\geq \log_3(5^{\log_3 u})$~~

$\log_5(5^{\log_3 u})=\log_3 u$

$\log_5(u+|u|^{\log_3 4})\geq \log_3 u$

$u\geq 0$

$u(1+u^{\log_3 4-1})\geq 5^{\log_3 u}$ $\quad u+|u|^{\log_3 4}\geq 5^{\log_3 u}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

Т.к. $tg\alpha$ существует: №1 продолжение

$$\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &\frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}+2\cdot\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}=-1\\ &\frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}-2\,\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}=-1\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &\frac{2tg\alpha+2-2tg^2\alpha+1+tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}=0\\ &\frac{2tg\alpha-2+2tg^2\alpha+1+tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}=0\end{aligned}\right.$$

$\Leftrightarrow$ ~~$2tg^2\alpha = tg^2\alpha$~~

Пусть $tg\,\alpha = n$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &\frac{-n^2+2n+3}{1+n^2}=0\\ &\frac{3n^2+2n-1}{1+n^2}=0\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &n^2-2n-3=0\ (5)\\ &3n^2+2n-1=0\ (6)\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &tg\alpha=3\\ &tg\alpha=-1\\ &tg=\frac{1}{3}\end{aligned}\right.$$

(5): $n^2-2n-3=0$

$(n-3)(n+1)=0$

$$\left[\begin{aligned} &n=3\\ &n=-1\end{aligned}\right.$$

(6): $3n^2+2n-1=0$

$\frac{D}{4}=1+3=4$

$$\left[\begin{aligned} &n=\frac{-1+2}{3}=\frac{1}{3}\\ &n=\frac{-1-2}{3}=-1\end{aligned}\right.$$

Ответ: $tg\,\alpha \in \{3; -1; \frac{1}{3}\}$.

№2

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}\\ x^2+36y^2-12x-36y=45\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 12y\\ x^2-24yx+144y^2=2xy-12y-x+6\\ x^2+36y^2-12x-36y=45\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant 12y\\ x^2+x(1-26y)+144y^2+12y-6=0\ (1)\\ x^2+36y^2-12x-36y=45\ (2)\end{cases}$$

☐ черновик ☑ чистовик Страница №2

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin 2\alpha(\cos 4\beta + 1) = \sin 2\alpha \cdot (2\cos^2 2\beta - 1 + 1) = \sin 2\alpha \cdot 2 \cdot \cos^2 2\beta$

$\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5} - \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta$

$\cos 2\alpha \cdot \sin 4\beta + \left(-\frac{1}{\sqrt5} - \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta\right) \cdot 2\cos^2 2\beta = -\frac{2}{5}$

$\cos 2\alpha + \sin 4\beta - \frac{2\cos 2\beta}{\sqrt5} - 2\cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta \cdot \cos 2\beta = -\frac{2}{5}$

$\cancel{\cos 2\alpha \cdot \sin 4\beta} - \frac{2\cos 2\beta}{\sqrt5} - \cancel{\cos 2\alpha \cdot \sin 4\beta} = -\frac{2}{5}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha = 2(2\,tg\,\alpha) \cdot \cos^2\alpha = \frac{2\,tg\,\alpha}{1 + tg^2\alpha}$

$\cos 2\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

~~$\cos\beta =$~~

$2\cos^2\beta - 1 = \cos 2\beta$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = (1 - tg^2\alpha) \cdot \cos^2\alpha = \frac{1 - tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha}$

$\cos^2\beta = \frac{\cos 2\beta + 1}{2}$

$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - tg^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$

$\cos^2\beta = \frac{\frac{1}{\sqrt5} + 1}{2} = \frac{1+\sqrt5}{2\sqrt5}$

$\cos^2\alpha(1 + tg^2\alpha) = 1$

$\cos^2\alpha = \frac{1}{1 + tg^2\alpha}$

$2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cancel{+ 2 - 4\cos\sin^2\alpha = 1} + 4\cos^2\alpha - 2 = -1$

~~$2\cos\alpha(\sin\alpha + 2\cos\alpha) = 1$~~

$t(1 + t^{\log_3 4 - 1}) \geq 5^{\log_3 t}$

$4\cos^2\alpha + 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha - 1 = 0$

$1 + t^{\log_3 \frac{4}{3}} \geq \frac{5^{\log_3 t}}{3^{\log_3 t}} = \left(\frac{5}{3}\right)^{\log_3 t}$

~~$\sin(\alpha$~~ $\quad 6 - 6 - 6 + 6$

62 85 121

206

~~$\log_5 \log_3 t$~~

$\log_{\frac{5}{3}}(1 + t^{\log_3 \frac{4}{3}}) = \log_3 t$

87 − 24 = 57

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 продолжение

(1): $x^2+x(1-26y)+144y^2+72y-6=0$

$D=1-52y+676y^2-576y^2-48y+24=100y^2-100y+25=$
$=(10y-5)^2$

$x=\dfrac{26y-1\pm|10y-5|}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{26y-1+10y-5}{2} \\ x=\dfrac{26y-1-10y+5}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{36y-6}{2} \\ x=\dfrac{16y+4}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=18y-3 \\ x=8y+2\end{array}\right.$

$18y-3\geq 12y$ $\qquad$ $8y+2\geq 12y$

$6y\geq 3 \Rightarrow y\geq \frac{1}{2}$ $\qquad$ $4y\leq 2 \Rightarrow y\leq \frac{1}{2}$

$\Downarrow$

$y=\frac{1}{2}$ – единственно возможное решение

$\left[\begin{array}{l} x=18\cdot\frac{1}{2}-3=9-3=6 \\ x=8\cdot\frac{1}{2}+2=4+2=6\end{array}\right.$

Подставим $x=6$, $y=\frac{1}{2}$ во (2):

$6^2+36\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-12\cdot 6-36\cdot\frac{1}{2}=45$

$36+36\cdot\frac{1}{4}-72-18=45$

$36+9-90=45$

$-45\neq 45$ – неверно $\Rightarrow$ решений нет

Ответ: $x,y\in\varnothing$.

№ 5

$$f\left(\frac{x}{y}\right)=f\left(\frac{x}{y}\right)+f(y)-f(y)=f\left(\frac{x}{y}\cdot y\right)-f(y)=f(x)-f(y)$$

$f\left(\frac{x}{y}\right)<0 \Rightarrow f(x)-f(y)<0 \Rightarrow f(x)<f(y)$ n-кол-во пар

$f(1)=0$ $(f(1\cdot a)=f(1)+f(a) \Rightarrow f(1)=0)$

$f(2)=0$

$f(3)=0$

$f(4)=f(2)+f(2)=0$

$f(5)=1$

$f(6)=f(2)+f(3)=0$

$f(7)=1$

$f(8)=f(4)+f(2)=0$

$f(9)=0$

$f(10)=1$

$f(11)=2$

$f(12)=0$

$f(13)=3$

$f(14)=1$

$f(15)=1$

$f(16)=0$

$f(17)=4$

$f(18)=0$

$f(19)=4$

$f(20)=1$

$f(21)=1$

$f(22)=2$

$f(23)=5$

$f(24)=0$

$f(25)=\cancel{1}2$

$\Rightarrow$ при $f(y)=4$ $(y\in\{17;19\})$ $n_1=21\cdot 2=42$

при $f(y)=3$ $n_2=20\cdot 1=20$

при $f(y)=5$ $n_3=23\cdot 1=23$

при $f(y)=2$ $n_4=\cancel{17\cdot 2=34}$ $17\cdot 3=51$

при $f(y)=1$ $n_5=10\cdot 7=70$

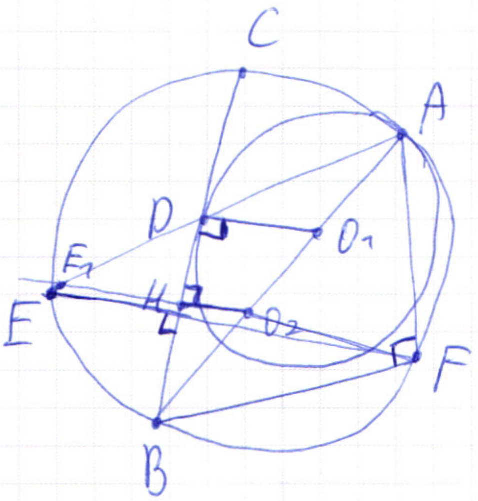
при $f(y)=0$ $n_6=0$

$n=n_1+n_2+\ldots+n_6=42+20+23+51+70+0=42+43+121=$

$=85+121=206$

Ответ: $n=206$

№4



O_1 – центр ω; r – радиус ω

O_2 – центр Ω; R – радиус Ω

AB – диаметр Ω; A – точка касания ω и Ω $\Rightarrow$ ~~...~~ $AB \cap \omega$ по диаметру $\Rightarrow$ $\Rightarrow O_1 \in AB$.

1. Опустим $O_2H \perp BC$.

O_2 – центр ω, $O_2H \perp BC \Rightarrow BH = HC = \frac{BC}{2} = \frac{\frac{15}{2}+\frac{17}{2}}{2} = \frac{32}{4} = 8$

2. $\triangle BHO_2 \sim \triangle BDO_1$:

$$\frac{O_2H}{DO_1} = \frac{BO_2}{BO_1} = \frac{BH}{BD} = \frac{8}{\frac{17}{2}} = \frac{16}{17}$$

3. $BO_2 = \frac{16}{17}BO_1 \Rightarrow O_2O_1 = BO_1 - BO_2 = \frac{1}{17}BO_1$

4. $BO_2 = O_2A = \frac{16}{17}BO_1$

5. $O_1A = \cancel{O_2B}\ O_2A - O_2O_1 = \frac{16}{17}BO_1 - \frac{1}{17}BO_1 = \frac{15}{17}BO_1 = DO_1$

6. По теореме Пифагора в $\triangle DO_1B$:

$$DO_1^2 + BD^2 = BO_1^2$$

$$\left(\frac{17}{2}\right)^2 + \left(\frac{15}{17}BO_1\right)^2 = BO_1^2$$

$$\frac{17^2}{2^2} = BO_1^2\left(1 - \frac{225}{289}\right) = BO_1^2 \cdot \frac{64}{289} = BO_1^2 \cdot \frac{8^2}{17^2}$$

$$BO_1^2 = \frac{17^2 \cdot 17^2}{2^2 \cdot 8^2} \Rightarrow BO_1 = \frac{17^2}{2 \cdot 8} = \frac{17^2}{16}$$

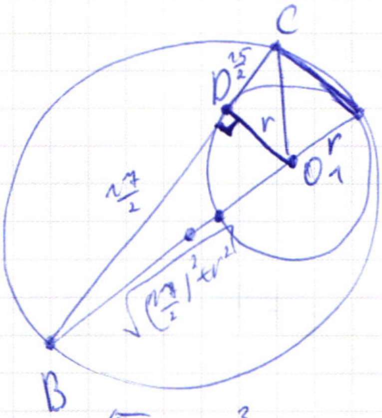
7. $AO_1 = r = \frac{15}{17}BO_1 = \frac{15}{17} \cdot \frac{17^2}{16} = \frac{15 \cdot 17}{16} = \frac{255}{16}$

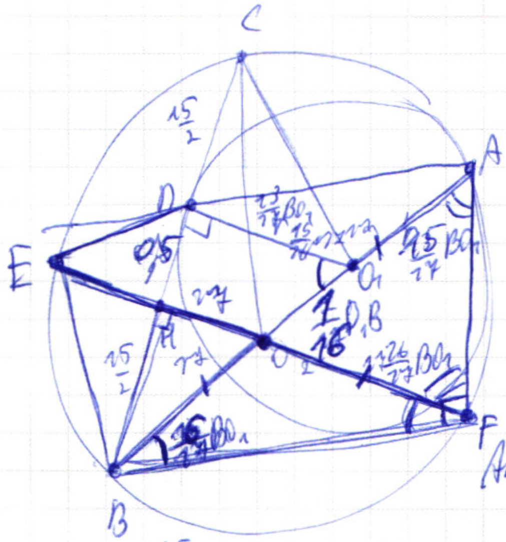
8. $O_2A = R = \frac{16}{17}O_1B = \frac{16}{17} \cdot \frac{17^2}{16} = 17$

9. Продлим O_2H до пересечения с AE в т. E_1

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$AB = 34$

$\frac{8}{\frac{15}{2}} = \frac{16}{15}$

$\frac{15}{16}BO_1$

$\frac{2}{16}BO_1$

$\frac{\frac{15}{2}}{\frac{17}{2}} r = OH = \frac{15}{17}r$

$\frac{2}{17}O_1B + r = R$

$r = \frac{13}{17}BO_1$

$\left(\frac{17}{2}\right)^2 + \left(\frac{13}{17}BO_1\right)^2 = BO_1^2$ AE=

$\frac{289}{4} + \frac{169 BO_1^2}{289} = BO_1^2$

$BO_1^2 \cdot \frac{120}{289} = \frac{17^2}{4}$

$BO_1^2 = \frac{17^2 \cdot 17^2}{120 \cdot 4}$

$BO_1 = \frac{17^2}{\sqrt{120}\cdot 2} = \frac{289}{2\cdot 2\sqrt{5\cdot3\cdot2}} = \frac{289}{4\sqrt{30}}$

$120 = 5\cdot 24 = \cancel{5\cdot3\cdot2}\ 5\cdot3\cdot8$

$\frac{2}{17}BO_1 = \frac{2}{17}\cdot\frac{17^2}{4\sqrt{30}} = \frac{17}{2\sqrt{30}}$

$R = \frac{15}{17}BO_1 = \frac{17\cdot15}{4\sqrt{30}}$

$DA = \frac{15\sqrt{17}}{2}$

$ED = \frac{\sqrt{17}}{2}$

$AE = \frac{16}{2}\sqrt{17} = 8\sqrt{17} = BF$

$\angle\alpha = \arcsin\frac{8\sqrt{17}}{34} = \frac{4\sqrt{17}}{17} = \frac{4}{\sqrt{17}}$

17 · 8 = 136; 25 · 17 = 255; 16 · 17 = 272; 17 · 17 = 289; 289 − 169 = 120

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4 продолжение 1

10. $\cos\angle DO_1B = \frac{DO_1}{BO_1} = \frac{\frac{15}{17}BO_1}{BO_1} = \frac{15}{17}$

11. $\cos\angle DO_1A = \cos(180^\circ - \angle DO_1B) = -\cos\angle DO_1B = -\frac{15}{17}$

12. По теореме косинусов в $\triangle DO_1A$:

$DA^2 = r^2 + r^2 - 2\cos\angle DO_1A \cdot r^2 = 2r^2 + 2r^2 \cdot \frac{15}{17}$

$DA = r\sqrt{2 + 2\cdot\frac{15}{17}} = r\sqrt{\frac{34+30}{17}} = \frac{8r}{\sqrt{17}} = \frac{8\cdot 15\cdot 17}{16\cdot\sqrt{17}} = \frac{8\cdot 15\cdot\sqrt{17}}{16} = \frac{15\sqrt{17}}{2}$

13. Из подобия $\triangle O_1DA$ и $\triangle O_2E_1A$:

$\frac{O_2A}{O_1A} = \frac{E_1A}{DA} = \frac{\frac{16}{17}BO_1}{\frac{15}{17}BO_1} = \frac{16}{15} \Rightarrow E_1D = \frac{1}{15}DA$

14. $ED\cdot DA = CD\cdot BD$ (по теореме о перес. хордах).

$ED\cdot DA = \cancel{\frac{17}{16}} \frac{17}{2}\cdot\frac{15}{2}$

$ED = \frac{\frac{17\cdot 15}{4}}{DA} = \frac{17\cdot 15}{4\cdot\frac{8r}{\sqrt{17}}} = \frac{17\cdot 15\cdot\sqrt{17}}{32\cdot r} = \frac{17\sqrt{17}\cdot 15}{32\cdot\frac{15\cdot 17}{16}} = \frac{\sqrt{17}}{2} =$

$= \frac{\sqrt{17}}{2}\cdot\frac{15}{15} = \frac{DA}{15} = E_1D \Rightarrow$ т. E_1 и E совпадают $\Rightarrow O_2 \in EF$.

15. $AO_2 = O_2F = O_2B = O_2E = R \Rightarrow$ диагонали $AFBE$ пересекаются в т. O_2 и делятся пополам $\xRightarrow{\text{по признаку}}$ $AFBE$ – параллелограмм,

$2R = AB = EF \xRightarrow{\text{по призн}}$ $AFBE$ – прямоугольник $\xRightarrow{\text{по св-ву}}$ $AE = BF = AD + DE = \frac{15\sqrt{17}}{2} +$

$+ \frac{\sqrt{17}}{2} = 8\sqrt{17}$

16. $\angle AFB$ опирается на диаметр $\Rightarrow \angle AFB = 90^\circ$

~~17. FO_2 – медиана прямоугольного $\triangle \Rightarrow FO_2 = \frac{AB}{2} = R$~~

№4 ~~продолжение~~ 2

~~17. FO_2 – медиана прямоуг △FBA $\overset{\text{по}}{\underset{\text{в-ву}}{\Rightarrow}}$ FO_2 =~~

17. $FO_2 = R = O_2A \overset{\text{по}}{\underset{\text{опр}}{\Rightarrow}} \triangle AO_2F$ – равнобедр $\overset{\text{по}}{\underset{\text{в-ву}}{\Rightarrow}} \angle O_2AF = \angle O_2FA = \angle EFA$

18. $\angle BAF = \arcsin\frac{BF}{AB} = \arcsin\frac{8\sqrt{17}}{2\cdot17} = \arcsin\frac{4\sqrt{17}}{17} = \angle AFE$

19. $\cos\angle AFE = \sqrt{1-\sin^2\angle AFE} = \sqrt{1-\frac{4^2}{(\sqrt{17})^2}} = \sqrt{1-\frac{16}{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$

20. $tg\angle AFE = \frac{\sin\angle AFE}{\cos\angle AFE} = \frac{\frac{4}{\sqrt{17}}}{\frac{1}{\sqrt{17}}} = 4 \Rightarrow \angle AFE = arctg\,4$

21. $AF = \frac{AE}{tg\angle AFE} = \frac{8\sqrt{17}}{4} = 2\sqrt{17}$

22. $S_{AFE} = \frac{1}{2}\cdot AE\cdot AF = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{17}\cdot 8\sqrt{17} = 17\cdot 8 =$
$= 136$

Ответ: $S_{AFE} = 136$, ~~$\angle AFE = arctg\,4$~~, $\angle AFE = arctg\,4$, $R_\Omega = 17$, $r_\omega = \frac{255}{16}$.

№3

$10x + |x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)}$

Замена переменной:

$t = 10x - x^2,\ t > 0$

$t + |t|^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$ $\qquad |t| = t$, т.к. $t > 0$

$t + t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$

$t(1 + t^{\log_3 4 - 1}) \geq 5^{\log_3 t}$

$1 + t^{\log_3\left(\frac{4}{3}\right)} \geq \frac{5^{\log_3 t}}{3^{\log_3 t}}$

$1 + t^{\log_3\left(\frac{4}{3}\right)} \geq \left(\frac{5}{3}\right)^{\log_3 t}$

№6

$$\frac{16x-16}{4x-5}=f(x)$$

$g(x)=ax+b$

веtви вниз.

$k(x)=-32x^2+36x-3$ $\quad x_в=\frac{-36}{-32\cdot 2}=\frac{18}{32}=\frac{9}{16}$ $\quad y_в=-32\cdot\frac{9^2}{16^2}+36\cdot\frac{9}{16}-3=$

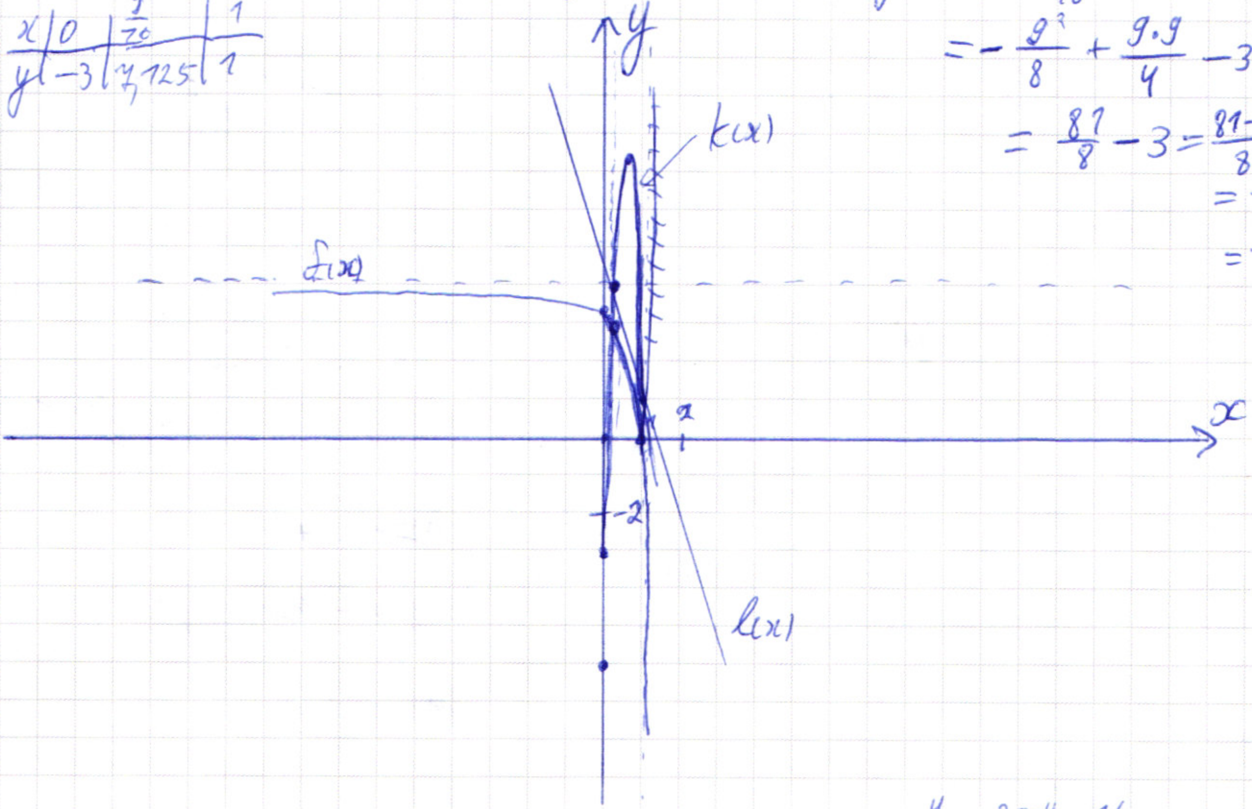
$=-\frac{9^2}{8}+\frac{9\cdot 9}{4}-3=$

$=\frac{81}{8}-3=\frac{81-24}{8}=$

$=\frac{57}{8}=$

$=7{,}125$

x	0	$\frac{9}{16}$	1
y	-3	$7{,}125$	1



$$f(x)=\frac{16x-16}{4x-5}=4+\frac{4}{4x-5}$$

x	1	0
y	0	$3{,}2$

$4-\frac{4}{5}=\frac{20-4}{5}=\frac{16}{5}=3{,}2$

Ассимптоты: $x=\frac{5}{4}$

$y=4$

$f'(x)=-\frac{4\cdot 4}{(4x-5)^2}<0 \Rightarrow f \searrow$ при $x\in D(f)$.

$$f\left(\frac{1}{4}\right)=4+\frac{4}{4\cdot\frac{1}{4}-5}=4+\frac{4}{1-5}=4-1=3$$

$$k\left(\frac{1}{4}\right)=-32\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2+36\cdot\frac{1}{4}-3=-32\cdot\frac{1}{16}+9-3=-2+9-3=4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g(1)\in[0;1] \\ g\left(\frac{1}{4}\right)\in[3;4] \\ g(x)>f(x)\end{cases} \left.\right\} (g(x)<k(x))$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

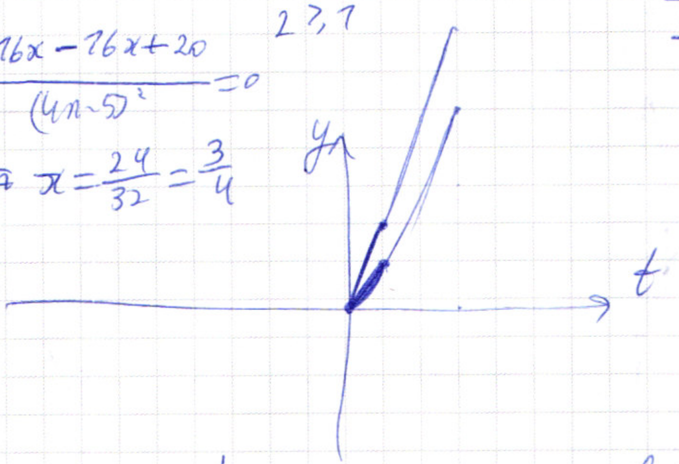
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$t=1: \quad 1+1 \geq 5^0 = 1$

$\frac{4-16x-16x+20}{(4x-5)^2}=0 \quad 2 \geq 1$

$x=\frac{24}{32}=\frac{3}{4}$



$t=3: \quad 3+4 \quad 5^{\log_3 3}$

$7 \quad 5$

$f(t)=t+t^{\log_3 4}$

$g(t)=5^{\log_3 t}$

$f'(t)=1+\log_3 4\cdot t^{\log_3\left(\frac{4}{3}\right)} >0 \Rightarrow \nearrow$

$\log_3 4\cdot t^{\log_3\frac{4}{3}}=-1$

$\uparrow_{>0} \quad \uparrow_{>0} \quad \Rightarrow$

$g'(x)=a^x=\ln a\cdot a^x=\ln 5\cdot 5^{\log_3 t}\cdot\frac{1}{\ln 3}$

$9+16 \quad 5^2$

$25 \quad 25$

$t=3\sqrt{3}: \quad 3\sqrt{3}+64^{3,5} \quad 5^{3,5}$

$3\sqrt{3}+8 \quad 5\sqrt{5}$

$$\begin{array}{r|l} 57 & 8 \\ 56 & 7{,}125 \\ 10 & \\ 8 & \\ 20 & \\ 16 & \\ 40 & \end{array}$$

$-\frac{16}{(4x-5)^2}=a$

$\frac{4}{4x-5}+4=ax+\ldots$

$x=\frac{1}{4}$

$y=4$

$-\frac{16}{(4x-5)^2}\cdot\left(x-\frac{1}{4}\right)$

$\frac{7}{4}a+b=4 \quad \frac{4-16x-}{(4x-5)^2}$

$b=-\frac{7}{4}a+4$

$ax+\frac{7}{4}a-4=y$

$a=\frac{16}{(4x-5)^2}$

$ax+\frac{7}{4}a-4=4+\frac{4}{4x-5}$

$16\frac{x+\frac{7}{4}}{(4x-5)^2}=8+\frac{4}{4x-5}$

$-8x^2+20x-11=0$

$8x^2-20x+11=0$

$\frac{D}{4}=100-88=12$

$x=\frac{20\pm2\sqrt{3}}{8}$

$16x+4-8(4x-5)^2-4(4x-5)=0$

$16x+4-8(16x^2-40x+25)-16x+20=0$

$16x+4-128x^2+320x-200-16x+20=0$

$-128x^2+320x-176=0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6 продолжение 2

~~Условие касания f(x) и g(x):~~

Рассмотрим ~~При $x=\frac{7}{4}$, $y=4$~~ условие касания f(x) и g(x) при прохождении g(x) через $(\frac{7}{4}; 4)$.

$$\begin{cases} \frac{-16}{(4x-5)^2}=a & \frac{7}{4}a+b=4 \Rightarrow b=4-\frac{7}{4}a \\ 4+\frac{4}{4x-5}=ax+4-\frac{7}{4}a \end{cases}$$

$$a=\frac{-16}{(4x-5)^2}$$

$$\frac{4}{4x-5}=\frac{-16}{(4x-5)^2}\cdot\left(x-\frac{7}{4}\right)$$

$$\frac{-16x+4\cdot 7-4(4x-5)}{(4x-5)^2}=0$$

$$\frac{-16x+28-16x+20}{(4x-5)^2}=0$$

$$\frac{32x-24}{(4x-5)^2}=0 \Rightarrow x=\frac{24}{32}=\frac{3}{4} \Rightarrow a=-\frac{16}{(4x-5)^2}=-\frac{16}{(4\cdot\frac{3}{4}-5)^2}=$$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№6 продолжение 2

$\ominus -\frac{16}{(3-5)^2} = -\frac{16}{2^2} = -4$

$b = 4 - \frac{1}{4}a = 4 + \frac{1}{4} \cdot 4 = 4 + 1 = 5$

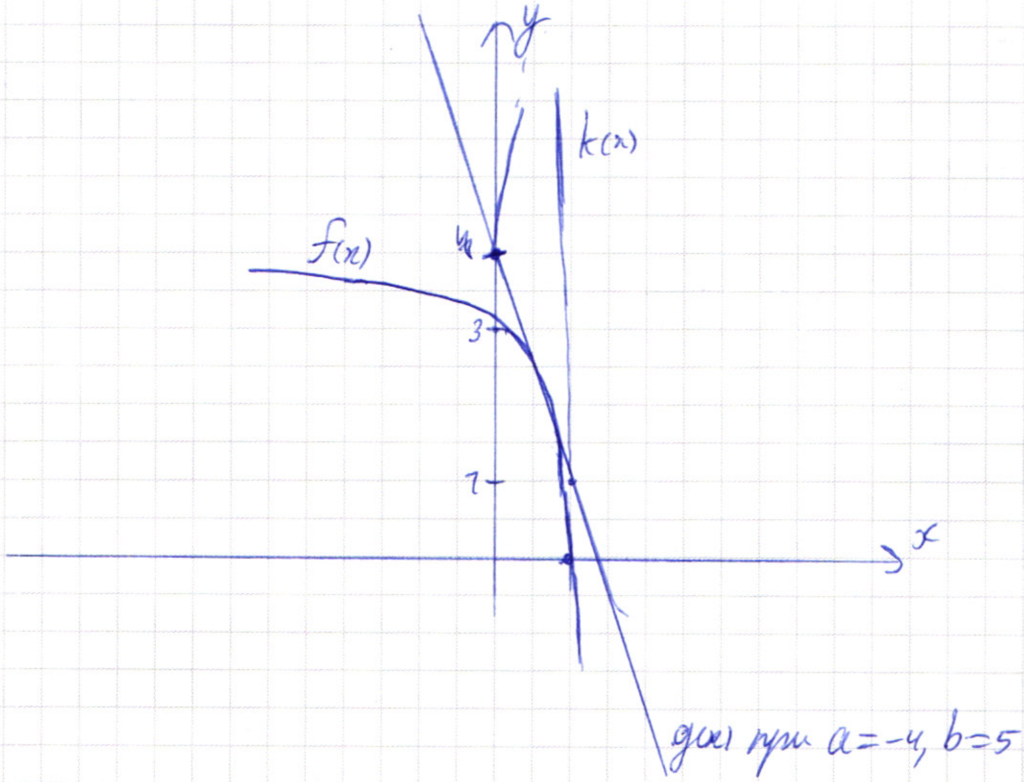
$\Rightarrow y = -4x + 5 = l(x)$ $\quad x = \frac{1}{4}: y = -1 + 5 = 4$

$\quad x = 1: y = -4 + 5 = 1$

$\left.\begin{matrix} (\frac{1}{4}; 3) \in l(x) \\ (1; 1) \in l(x) \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ при касании $g(x)$ и $f(x)$, $g(x)$ проходит через обе границы (через точки $(\frac{1}{4}; 3)$ и $(1; 1)$) $\Rightarrow$ лишь при касании $f(x)$ и $g(x)$: $g(x) \geq f(x)$ при $x \in [\frac{1}{4}; 1]$ и при этом $\underbrace{g(x) \leq k(x)}_{\text{при } x \in [\frac{1}{4}; 1]} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ эта единственная пара a и b.

Ответ: $a = -4$, $b = 5$.



$x=\frac{1}{4}$: $\frac{4-16}{1-5} \le a\cdot\frac{1}{4}+b \le -32\cdot\frac{1}{16}+36\cdot\frac{1}{4}-3-$

$-2+9-3$

$3 \le \frac{a}{4}+b \le 4$

$\frac{15}{16}$ $\frac{AD}{DE}$

$\frac{-12}{-4}$ 3 $b \ge 3-\frac{a}{4}$

$b \le 4-\frac{a}{4}$

$AD\cdot DE=\frac{15\cdot 17}{4}$

~~$\sin DO_1B=$~~

$\cos DO_1B=\frac{\frac{15}{17}BO_1}{\frac{16}{17}BO_1}=\frac{15}{17}$

$x=1$: $0 \le ax+b \le -32+36-3$

$0 \le a+b \le 1$

$-\frac{15}{17}$

$b \ge -a$

$b \le 1-a$

$-a \le 4-\frac{a}{4}$ $1-a \ge 3-\frac{a}{4}$

$\left(\frac{15}{17}BO_1\right)^2+\left(\frac{15}{17}BO_1\right)^2+\left(\frac{15}{17}BO_1\right)^2 \cdot 2\frac{15}{17}$ $\frac{3a}{4} \ge -4$ $\frac{3a}{4} \le -2$

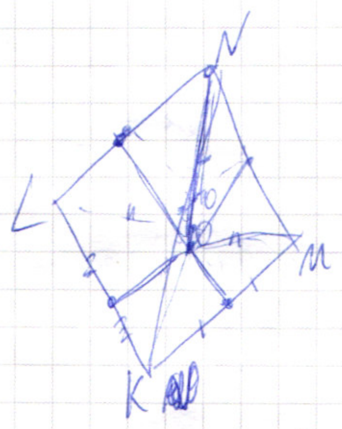
$=AD$ $a \ge -\frac{16}{3}$ $a \le -\frac{8}{3}$

$n+|n|^{\log_3 4} \ge 5^{\log_3 n}$ $4r=\frac{15\cdot 17}{4}$ $r=\frac{15\cdot 17}{16}$

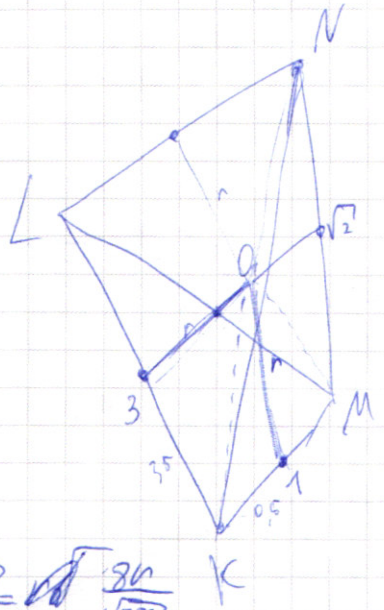
$n+n^{\log_3 4} \ge 5^{\log_3 n}$

$\frac{8r}{\sqrt{17}}\cdot ED=4r$

$ED=\frac{\sqrt{17}}{2}$



30+34



$\frac{AD}{ED}=\frac{8\cdot\frac{15\cdot 17}{16}}{\sqrt{17}\cdot\frac{\sqrt{17}}{2}}=$

$=15$

$2r^2+2r^2\cdot\frac{15}{17}=AD^2$

$AD=r\sqrt{2+2\cdot\frac{15}{17}}=r\sqrt{\frac{34+30}{17}}=\frac{8r}{\sqrt{17}}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

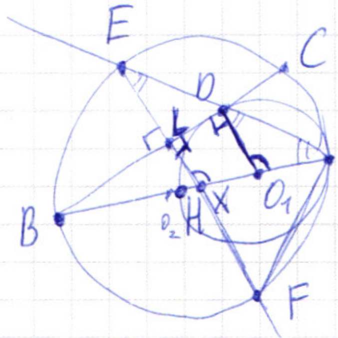
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



S_{AEF} - ?

$\angle AFE$ - ?

r_1, r_2 - ?

$CD = \frac{15}{2}$ $BD = \frac{17}{2}$

$EX = XA$

$\frac{AD}{AE} = \frac{r}{AX} \Rightarrow AD = \frac{r}{AX} \cdot AE$

$AD \cdot DE = AD \cdot (AE - AD) =$

$CD \cdot BD = AD \cdot DE = \frac{15 \cdot 17}{4} =$

$r^2 + \frac{17^2}{4} - r^2 = \frac{17^2}{4}$

$BH \cdot BA = BD^2 = \frac{17^2}{4}$

$BO_1^2 = r^2 + \frac{17^2}{4}$

$BH \cdot (BH + 2r) = \frac{17^2}{4}$

$BO_1 - r = BH$

$AB = 2R$

$\left(\sqrt{r^2 + \frac{17^2}{4}} - r\right) \cdot \left(\sqrt{r^2 + \frac{17^2}{4}} + r\right) = \frac{17^2}{4}$

$\frac{16(x-1)}{4x-5} \le ax + b \le -32x^2 + 36x - 3$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$x = \frac{1}{4}$ $\frac{16 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)}{1-5} \le ax + b \le$

$f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$

$16x - \cancel{16} + 128x^3 - 144x^2 + 12x - 160x^2 + 28x + 180x + 15$

$f(2) = 0$ $f(1) = 0$

$f(3) = 0$ $f(1 \cdot a) = f(1) + f(a) \Rightarrow f(1) = 0$

$\frac{128x^3 - 304x^2 + 208x - 1}{4x-5} \le 0$

$f(5) = 1$ $f(4) = f(2) + f(2) = 0$

$f(7) = 1$ $f(6) = f(3) + f(2) = 0$

$f(11) = 2$ $f(25) = 2$

$f(10) = f(2) + f(5)$

$f\left(\frac{10}{2}\right) = f(10) - f(2)$

$f\left(\frac{a}{b}\right) = f(a) - f(b)$

~~$f\left(\frac{a}{b}\right) + f(b) -$~~

$\begin{array}{r} 289 \\ -225 \\ \hline 64 \end{array}$ $\begin{array}{r} 170 \\ +85 \\ \hline 255 \end{array}$

$\begin{array}{r} 15 \\ \times 17 \\ \hline 105 \\ 15 \\ \hline 255 \end{array}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)