МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6}, \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2 - 26x\right|^{\log_5 12} + 26x \geqslant x^2 + 13^{\log_5\left(26x - x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 12$, $BD = 13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $4 \leqslant x \leqslant 28$, $4 \leqslant y \leqslant 28$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8 - 6x}{3x - 2} \geqslant ax + b \geqslant 18x^2 - 51x + 28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3}; 2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY = \sqrt{3}$, $TX = \sqrt{2}$, $TZ = 2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 $\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17} \end{cases}$

Найти $tg\,\alpha$, если он определён и значений ≥ 3

из формулы известно:

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

т.е. $\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ 2\sin\left(\frac{4\alpha+4\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{4\beta}{2}\right) = -\frac{2}{17} \end{cases}$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta) = -\frac{1}{17} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \cos(2\beta) = \frac{1}{\sqrt{17}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha)\cos(2\beta) + \cos(2\alpha)\sin(2\beta) = \frac{1}{\sqrt{17}} \\ \cos(2\beta) = \frac{1}{\sqrt{17}} \end{cases}$$

синус и косинус двойного угла можно выразить через tg:

$$\sin(2\alpha) = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha} = \frac{2tg\alpha}{tg^2\alpha+1}$$

$$\cos(2\alpha) = \frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha} = \frac{1-tg^2\alpha}{tg^2\alpha+1}$$

$$\begin{cases} \frac{2tg\alpha}{tg^2\alpha+1}\cos(2\beta) + \frac{1-tg^2\alpha}{tg^2\alpha+1}\sin(2\beta) = \frac{1}{\sqrt{17}} \\ \cos(2\beta) = \frac{1}{\sqrt{17}} \end{cases}$$

$\sin^2(2\beta) + \cos^2(2\beta) = 1$ из основного тригонометрического тождества

т.е. $\sin^2(2\beta) = 1 - \frac{1}{17} = \frac{16}{17}$

т.е. $\left[\begin{array}{l} \sin(2\beta)=\frac{4}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\beta)=-\frac{4}{\sqrt{17}} \end{array}\right.$

т.е. $\left[\begin{array}{l} \sin(2\alpha)\frac{1}{\sqrt{17}}+\frac{4}{\sqrt{17}}\cos(2\alpha)=\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha)\frac{1}{\sqrt{17}}-\frac{4}{\sqrt{17}}\cos(2\alpha)=\frac{1}{\sqrt{17}} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \sin(2\alpha)+4\cos(2\alpha)=1 \\ \sin(2\alpha)-4\cos(2\alpha)=1 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \frac{2tg\alpha}{tg^2\alpha+1}+\frac{4(1-tg^2\alpha)}{tg^2\alpha+1}=1 \;\Big|\cdot(tg^2\alpha+1)\neq 0 \\ \frac{2tg\alpha}{tg^2\alpha+1}-\frac{4(1-tg^2\alpha)}{tg^2\alpha+1}=1 \;\Big|\cdot(tg^2\alpha+1) \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} 2tg\alpha+4-4tg^2\alpha=tg^2\alpha+1 \\ 2tg\alpha-4+4tg^2\alpha=tg^2\alpha+1 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} 5tg^2\alpha-2tg\alpha-3=0 \\ 3tg^2\alpha+2tg\alpha-5=0 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} (5tg\alpha+3)(tg\alpha-1)=0 \\ 3tg^2\alpha+5tg\alpha-3tg\alpha-5=0 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} (5tg\alpha+3)(tg\alpha-1)=0 \\ (tg\alpha-1)(3tg\alpha+5)=0 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} tg\alpha=1 \\ tg\alpha=-\frac{3}{5} \\ tg\alpha=-\frac{5}{3} \end{array}\right.$

$\boxed{\text{Ответ: } -\frac{5}{3},\ -\frac{3}{5},\ 1}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 $\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2-18x+y^2-12y=45 \end{cases}$ $\begin{cases} y-6x=\sqrt{(x-1)(y-6)} \\ 9x^2-18x+9+y^2-12y+36=90 \end{cases}$

ОДЗ: $(x-1)(y-6)\geq 0$

~~Пусть~~

$\begin{cases} y-6+6(1-x)=\sqrt{(x-1)(y-6)} \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \end{cases}$

Пусть $a=x-1$, $b=y-6$ | ОДЗ: для a и b: $ab\geq 0$

$\begin{cases} b-6a=\sqrt{ab} \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases}$ Возведём первое ~~нера~~ равенство в квадрат, т.е. заменим следствием, поэтому корни придётся проверить. (или $b\geq 6a$ можно дописать)

$\begin{cases} b^2-12ab+36a^2=ab \\ 9a^2+b^2=90 \\ b\geq 6a \end{cases}$, $\begin{cases} b^2-13ab+36a^2=0 \mid :a^2 \\ 9a^2+b^2=90 \\ b\geq 6a \end{cases}$

$a=0$ не корень, иначе $b=0$, т.е. $9a^2+b^2=0\neq 90$

$\begin{cases} \left(\frac{b}{a}\right)^2-13\left(\frac{b}{a}\right)+36=0 \\ 9a^2+b^2=90 \\ b\geq 6a \end{cases}$ $D=169-4\cdot 36=25$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \frac{b}{a}=\frac{13-\sqrt{25}}{2} \\ \frac{b}{a}=\frac{13+\sqrt{25}}{2} \end{array}\right. \\ 9a^2+b^2=90 \\ b\geq 6a \end{cases}$

Страница №4.

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \frac{b}{a} = 4 \\ \frac{b}{a} = 9 \end{array} \right. \\ 9a^2 + b^2 = 90, \\ b \geq 6a \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} b = 4a \\ b = 9a \end{array} \right. \\ 9a^2 + b^2 = 90 \\ b \geq 6a \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b = 4a \\ 25a^2 = 90 \end{cases} \\ \begin{cases} b = 9a \\ 90a^2 = 90 \end{cases} \end{array} \right. \\ b \geq 6a \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b = 4\sqrt{\frac{18}{5}} \\ a = \sqrt{\frac{18}{5}} \end{cases} \\ \begin{cases} b = -4\sqrt{\frac{18}{5}} \\ a = -\sqrt{\frac{18}{5}} \end{cases} \\ \begin{cases} b = 9 \\ a = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} b = -9 \\ a = -1 \end{cases} \end{array} \right. \\ b \geq 6a \end{cases}$$

Сделаем проверку (ОДЗ):

$ab \geq 0$ верно для всех

проверка, что $b \geq 6a$:

$4\sqrt{\frac{18}{5}} \geq 6\sqrt{\frac{18}{5}}$ неверно

$-4\sqrt{\frac{18}{5}} \geq -6\sqrt{\frac{18}{5}}$ верно

$9 \geq 6$ верно

$-9 \geq -6$ неверно

т.е. $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} b = 9 \\ a = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} b = -4\sqrt{\frac{18}{5}} \\ a = -\sqrt{\frac{18}{5}} \end{cases} \end{array} \right.$ перейдём к x и y

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - 1 = 1 \\ y - 6 = 9 \end{cases} \\ \begin{cases} y - 6 = -12\sqrt{\frac{2}{5}} \\ x - 1 = -3\sqrt{\frac{2}{5}} \end{cases} \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2 \\ y = 15 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1 - 3\sqrt{\frac{2}{5}} \\ y = +6 - 12\sqrt{\frac{2}{5}} \end{cases} \end{array} \right.$$

Ответ: $(2; 15)$ и $\left(1 - 3\sqrt{\frac{2}{5}}; 6 - 12\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 $|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

ОДЗ:

$\begin{cases} 26x-x^2>0 \\ x^2-26x\neq 0 \end{cases}$

т.е. $x(26-x)>0$

$\boxed{0<x<26}$

$|x^2-26x|^{\log_5 12} \geq x^2-26x+13^{\log_5(26x-x^2)}$

$(26x-x^2)^{\log_5 12} \geq -26x+x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

Пусть $26x-x^2=5^t$

(так можно, ибо $26x-x^2>0$)

$$5^{t\log_5 12} \geq -5^t+13^t$$

$$12^t+5^t \geq 13^t \quad |:13^t>0$$

поэтому знак не меняется

$$\left(\frac{12}{13}\right)^t+\left(\frac{5}{13}\right)^t \geq 1$$

введём функцию $f(t)=\left(\frac{12}{13}\right)^t+\left(\frac{5}{13}\right)^t$

она убывающая на $t\in R$, т.к $\left(\frac{12}{13}\right)^t$ и $\left(\frac{5}{13}\right)^t$ убывающие на R, т.к. показательная функция с основанием <1 убывающая.

Заметим, что при $t=2$

$$\left(\frac{12}{13}\right)^2+\left(\frac{5}{13}\right)^2=\frac{12^2+5^2}{13^2}=\frac{144+25}{169}=1$$

Значит неравенство верно при $t\leq 2$, а потом $f(t)<1$.

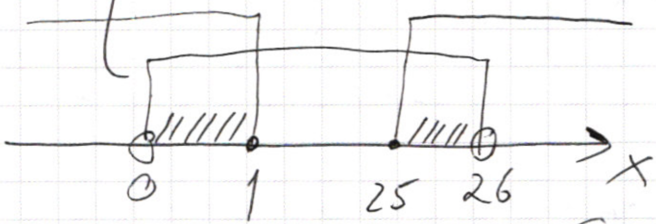
№3 Продолжение:

$5^t > 0$ по определению

Значит $26x - x^2 = 5^t$, где $t \le 2$,

так как 5^t возрастающая, то $0 < 26x - x^2 \le 25$

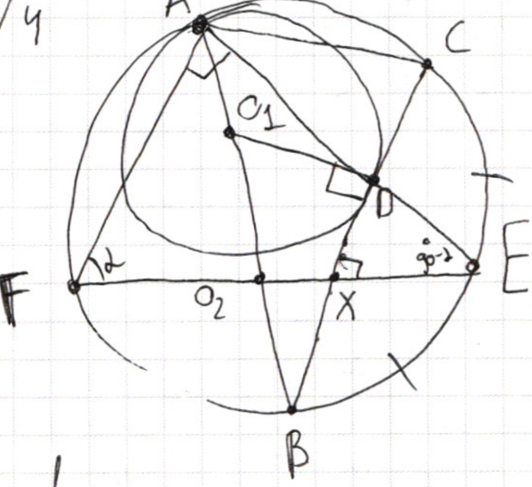
т.е. $\begin{cases} 0 < x < 26 \\ -x^2 + 26x - 25 \le 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 0 < x < 26 \\ (x-25)(x-1) \ge 0 \end{cases}$



т.е. $x \in (0;1] \cup [25;26)$

ответ: $x \in (0;1] \cup [25;26)$

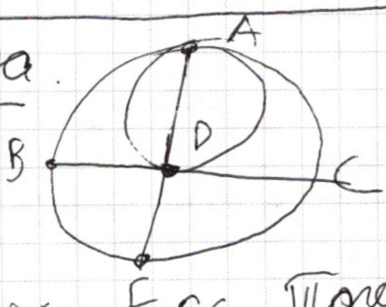
№4



Пусть O_1 – центр ω, O_2 – центр Ω, X – точка пересечения прямой EF с BC.

Докажем, что EF проходит через O_2. По лемме Архимеда E – середина дуги BC, поэтому E лежит на серединном перпендикуляре к BC, но и O_2 лежит, т.к. BC – хорда Ω.

Лемма Архимеда.



Две окружности касаются внутренним образом. Касательная к меньшей пересекает большую в точках B и C. Тогда AD пересекает Ω в

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4 Продолжение.

Тогда AD пересекает Ω в середине дуги BC. Лемма доказывается гомотетией с центром в точке A, переводящей ω в Ω, т.е. D в точку E, тогда BC // касательной в точке E

$CD = 12$, $BD = 13$. A, O_1, O_2 лежат на одной прямой, иначе не касаются. $O_1D \perp BC$, т.к. BC касательная, а D – точка касания.

Тогда $\triangle BO_2X$ и $\triangle BO_1D$ подобны по 2 углам т.к. $O_1D \parallel O_2X$.

Значит $\frac{BO_2}{BO_1} = \frac{BX}{BD}$

$BO_2 = r_2$
$AB = 2r_2$
$AO_1 = r_1$, где r_1 – радиус ω, r_2 – радиус Ω

$$\frac{r_2}{2r_2 - r_1} = \frac{\frac{BC}{2}}{BD}$$

$$\frac{r_2}{2r_2 - r_1} = \frac{BC}{2BD} = \frac{BD + DC}{2BD}$$

$BX = XC$, т.к. $EC = EB$, а $EX \perp BC$

$$\frac{r_2}{2r_2 - r_1} = \frac{25}{2 \cdot 13} = \frac{25}{26}$$

$$26r_2 = 50r_2 - 25r_1$$

$$25r_1 = 24r_2$$

$$\boxed{r_2 = \frac{25}{24} r_1}$$

Теперь запишем Th Пифагора для $\triangle O_1DB$

$O_1D^2 + DB^2 = O_1B^2$

$r_1^2 + 13^2 = (2r_2 - r_1)^2$

$r_1^2 + 13^2 = \left(\frac{25}{12} r_1 - r_1\right)^2$

$13^2 = \frac{13^2}{12^2} r_1^2 - r_1^2$

$13^2 \cdot 12^2 = (13^2 - 12^2) r_1^2$

$r_1 = \sqrt{\frac{13^2 \cdot 12^2}{25}} = \frac{13 \cdot 12}{5} = \frac{156}{5} = 31{,}2$

$r_2 = \frac{25}{24} r_1 = \cancel{\frac{156 \cdot 5}{24}} \frac{25}{24} \cdot \frac{13 \cdot 12}{5} = \frac{5 \cdot 13}{2} =$

$= \frac{65}{2} = 32{,}5$

Так как EF проходит через O_2, EF — диаметр, значит $\angle FAE = 90°$.

Пусть $\angle AFE = \alpha$. Тогда $\angle AEF = 90° - \alpha$,

$\angle XDE = 90° - \angle DEX = 90° - (90° - \alpha) = \alpha$

$\angle ADC = \angle XDE = \alpha$

$\angle AO_1D = 2\alpha$, т.к. AO_1D центральный, опирающийся на AD, $\angle ADC$ — угол между касательной и секущей AD.

т.е. $\angle BO_1D = 180° - \angle AO_1D = 180° - 2\alpha$; $\angle BDO_1 = 90°$

~~тогда~~ в $\triangle BO_1D$ $BD = 13$, $O_1D = r_1 = \frac{156}{5}$

т.е. $tg(\angle BO_1D) = \frac{BD}{O_1D} = \frac{13}{\frac{13 \cdot 12}{5}} = \frac{5}{12}$

$tg(180 - 2\alpha) = \frac{5}{12}$ $\quad tg(2\alpha) = -\frac{5}{12}$

$tg(-2\alpha) = \frac{5}{12}$ $\quad tg(2\alpha) = $ ——

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4 Продолжение:

$0 < 2\alpha < \pi$

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$tg(2\alpha) = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

т.е. $2tg\alpha = (1-tg^2\alpha)\left(-\frac{5}{12}\right)$

$\frac{5}{12}tg^2\alpha - 2tg\alpha - \frac{5}{12} = 0 \quad |\cdot 12$

$5tg^2\alpha - 24tg\alpha - 5 = 0$

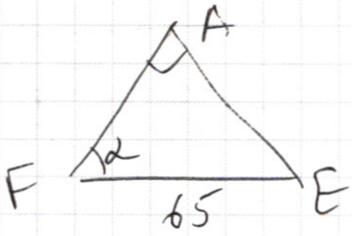
$\frac{D}{4} = 12^2 + 25 = 169$

$\left[\begin{array}{l} tg\alpha = \frac{12-13}{5} = -\frac{1}{5} \\ tg\alpha = \frac{12+13}{5} = 5 \end{array}\right.$ плохо

т.е. $\angle AFE = arctg\,5$

ΔAEF — прямоугольный, $\angle FAE = 90^\circ$, $FE = 2r_2 = 65$

т.е.



$S_{\Delta FAE} = \frac{1}{2}AF \cdot FE \cdot \sin\alpha =$

$= \frac{1}{2}(FE \cdot \cos\alpha) \cdot FE\sin\alpha =$

$= FE^2 \cdot \frac{1}{4}\sin 2\alpha =$

$= FE^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha} =$

$= 65^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2 \cdot 5}{1+25} = 65^2 \cdot \frac{5}{26 \cdot 2} = \frac{5^3 \cdot 13^2}{26 \cdot 2} = \frac{5^3 \cdot 13}{4}$

Ответ: $r_1 = 31{,}2 = \frac{156}{5}$, $r_2 = \frac{65}{2} = 32{,}5$, $\angle AFE = arctg5$,

$S_{\Delta FAE} = \cancel{\frac{125 \cdot 13}{4}} = \frac{125 \cdot 13}{4}$

№5 Возьмём $a = p$, $b = \frac{1}{p}$

тогда $f\left(p \cdot \frac{1}{p}\right) = f(p) + f\left(\frac{1}{p}\right)$

$f(1) = f(p) + f\left(\frac{1}{p}\right)$

возьмём $a = b = 1$

$f(1) = f(1) + f(1)$, т.е. $f(1) = 0$

Значит $f(p) = -f\left(\frac{1}{p}\right)$.

так как $f(ab) = f(a) + f(b)$, то

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = \sum_{m \vdots p} f(p) + \sum_{n \vdots q} f\left(\frac{1}{q}\right),$$

т.е. $f\left(\frac{m}{n}\right) = \sum_{m \vdots p} f(p) - \sum_{n \vdots q} f(q)$

(f от дроби равна сумме значений функции от простых делителей числителя за вычетом простых делителей знаменателя

Значит $f\left(\frac{x}{y}\right) = \sum_{x \vdots p} f(p) - \sum_{y \vdots q} f(q) =$

$= f(x) - f(y) < 0$

если $f(x) < f(y)$

Найдём f для любого натурального от 4 до 28.

Простые: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23;

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 $f(2)=\left[\frac{2}{4}\right]=0$; $f(3)=\left[\frac{3}{4}\right]=0$;

$f(5)=\left[\frac{5}{4}\right]=1$; $f(7)=\left[\frac{7}{4}\right]=1$;

$f(11)=\left[\frac{11}{4}\right]=2$; $f(13)=\left[\frac{13}{4}\right]=3$;

$f(17)=4$; $f(19)=4$ $f(23)=5$

т.к. $f(p)=\left[\frac{p}{4}\right]$. Найдем для

составных $f(4)=f(2)+f(2)=0$

$f(6)=f(2)+f(3)=0$

$f(8)=3f(2)=0$

$f(9)=f(3)+f(3)=0$

$f(10)=f(2)+f(5)=1$

$f(12)=f(2)+f(2)+f(3)=0$

$f(14)=f(2)+f(7)=1$

$f(15)=f(3)+f(5)=1$

$f(16)=0$

$f(18)=0$

$f(20)=f(2)+f(2)+f(5)=1$

$f(21)=f(3)+f(7)=1$

$f(22)=f(2)+f(11)=2$

$f(24)=0$

$f(25)=f(5)+f(5)=2$

$f(26)=f(2)+f(13)=3$

$f(27)=0$

$f(28)=f(2)+f(2)+f(7)=1$

№5 т.е. значение функции f

ноль у чисел: 4, 6, 9, 8, 12, 16, 18, 24, 27 (их 9)

единица у: 5, 7, 10, 14, 15, 20, 21, 28 (их 8)

двойка: 11, 22, 25 (их 3)

тройка: 13, 26 (их 2)

четверка 17, 19 (их 2)

пятерка: 23 (их 1

Теперь нужно взять (x, y) так, чтобы $f(x) < f(y)$,

т.е. 1) $f(x) = 0$

$9 \cdot \cancel{24} (8+3+2+2+1) = 9 \cdot 16 = 144$

взять x

способов взять y

2) $f(x) = 1$

$8 \cdot (3+2+2+1) = 8 \cdot 8 = 64$

способ взять x

способов взять y

3) $f(y) = 2$

$3 \cdot (2+2+1) = 3 \cdot 5 = 15$

4) $f(x) = 3$

$2 \cdot 3 = 6$

5) $f(x) = 4$

$2 \cdot 1 = 2$

6) $f(x) = 5$ нет подходящих y

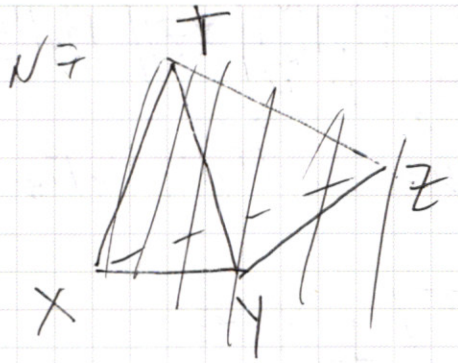
223

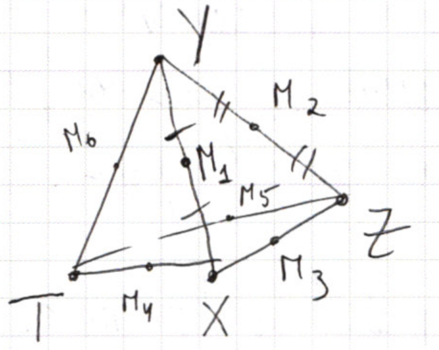
Итого: $144 + 64 + 15 + 6 + 2 = 208 + 15 + 8 = 231$

Ответ: 231

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7





Так как Y лежит на сфере с серединами всех её рёбер кроме ребра TY: Y, M_1, M_3, M_2 лежат в одной плоскости и на одной сфере, т.е. $YM_1M_3M_2$ — вписанный четырехугольник. (M_1 — середина XY, M_2 — YZ, M_3 — середина XZ)

Тогда заметим, что $YM_1M_3M_2$ — ~~прямоу~~ параллелограмм, так как M_2M_3 — средняя линия параллельная XY, т.е. и YM_1, а M_1M_3 — средняя линия $\triangle XYZ$ параллельная YZ, т.е. и YM_2.

Значит $YM_1M_3M_2$ — параллелограмм, вписанный в окружность. Тогда это может быть только прямоугольник (противолежащие углы равны из-за параллелограмма, а в сумме $180°$). Значит $\angle M_1YM_2 = 90°$. По теореме Пифагора для $\triangle M_1YM_2$ $M_1Y^2 + M_2Y^2 = M_1M_2^2$

№7 ~~При этом $M_1Y = \frac{1}{2}XY$~~

Дальше аналогично $M_1, M_2 M_4 M_5$ – прямоугольник, так как M_4 – середина TX, M_5 – середина TZ. Точки лежат в одной плоскости, т.к. $M_1M_2 \parallel XZ \parallel M_4M_5$ как средние линии и равны $M_1M_2 = M_4M_5$.
А еще лежат на одной сфере. Значит $M_1M_2M_4M_5$ – прямоугольник.

Тогда $M_1M_4 \perp M_4M_5$, т.е. $TY \perp XZ$

№6 $(a,b)-?$ $\forall x\ \left(\frac{2}{3};2\right]$

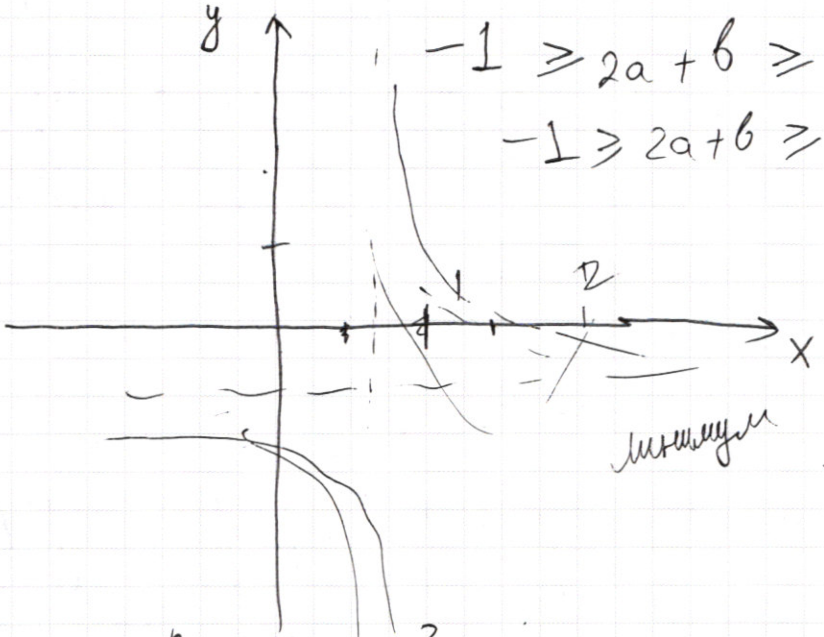
$$\frac{8-6x}{3x-2} \geqslant ax+b \geqslant 18x^2-51x+28$$

$$2 \geqslant a+b \geqslant -5$$

$$\frac{8-6x}{3x-2}=\frac{-6x+4+4}{3x-2}=-2+\frac{4}{3x-2}=-2+\frac{\frac{4}{3}}{x-\frac{2}{3}}$$

$$-1 \geqslant 2a+b \geqslant 72-102+28$$

$$-1 \geqslant 2a+b \geqslant -2 \qquad 102=6\cdot 17$$



минимум $\frac{17}{12}$

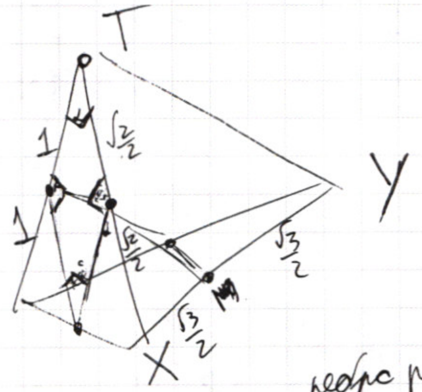
$$2ax+2b \geqslant 36x^2-102x+28$$

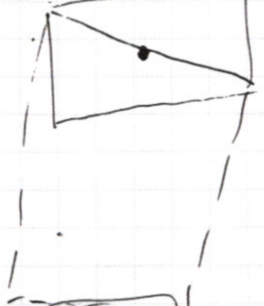
$$\left(6x-\frac{17}{2}\right)^2-\ldots$$

$$18\cdot\frac{4}{9}-51\cdot\frac{2}{3}+28=$$

$$=8-34+28=2$$

№7





ребро равно $2\sqrt{1+\frac{1}{2}}=2\sqrt{\frac{3}{2}}=\sqrt{6}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 f определена на +Q

$\forall a, b \quad f(ab) = f(a) + f(b) \qquad f(p) = \left[\frac{p}{4}\right] \ \forall p$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \qquad f(p_1 p_2 p_3) = f(p_1) + f(p_2 p_3) =$

$f(1) = 2f(1) \quad f(1) = 0 \qquad = f(p_1) + f(p_2) + f(p_3)$

$f(p \cdot \frac{1}{p}) = f(p) + f(\frac{1}{p})$

$\overset{\parallel}{0} \qquad f(p) = -f\left(\frac{1}{p}\right)$

$74+$

$f(1) = 0$, т.е. $f(p) = \left[\frac{p}{4}\right] \qquad f\left(\frac{1}{p}\right) = -\left[\frac{p}{4}\right]$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = \sum_{x \vdots p} f(p_x) - \sum_{y \vdots q} f(q)$

т.е. $\sum f(\text{делителей})x < \sum f(\text{делителей})$

$f(2) = 0$
$f(3) = 0$
$f(5) = 1$
$f(7) = 1$
$f(11) = 2$
$f(13) = 3$
$f(17) = 4$
$f(19) = 4$
$f(23) = 5$

$f(4) = 0$
$f(5) = 1$
$6 = 0$
$7 = 1$
$8 = 0$

нули

$\vdots 2$, $\vdots 3$ и все

2, 3, 4, 6, 9, 8, 12, 16,

2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 27

единицы

5, 7, 10, 14, 15, 20, 21, 28

двойки

11, 22, 25

пятерки

23

четверки

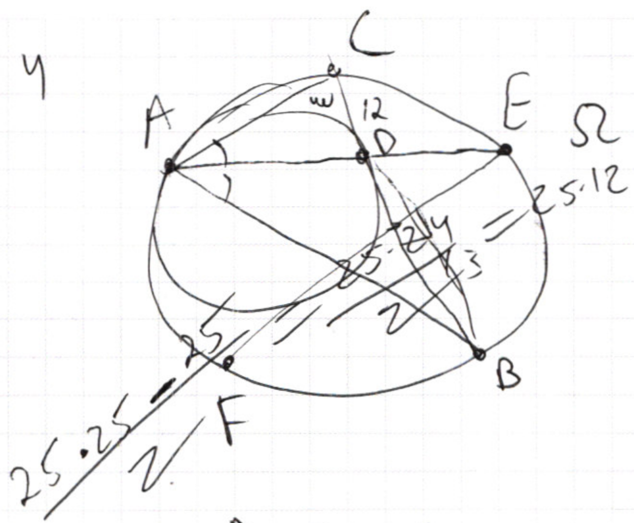
17, 19

тройки

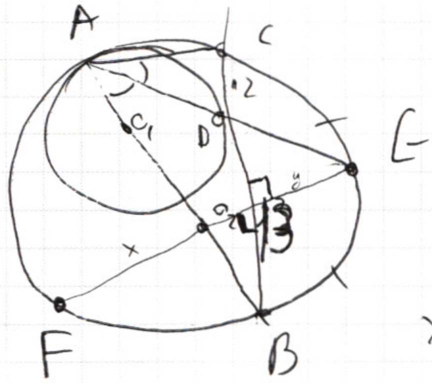
13, 26

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

N 4

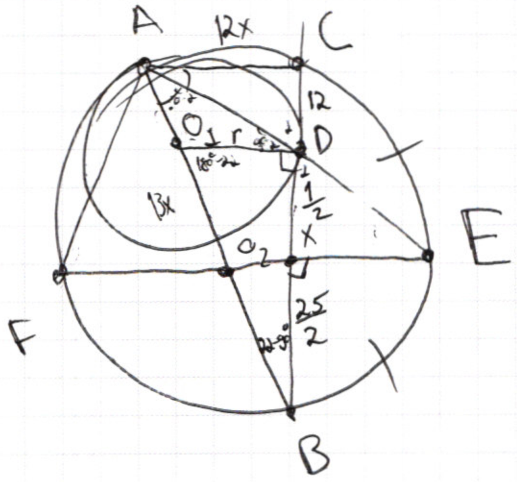


E проходит через O_2



$$\frac{x}{12}=\frac{13}{y}$$

$$xy=12\cdot 13$$



$$13-\frac{25}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{R-r}{R}=\frac{1}{25}$$

$$R=25R-25r$$

$$R=\frac{25}{24}r$$

$$13^2+r^2=(R-r)^2$$

$$13^2+r^2=\left(\frac{13}{12}r\right)^2$$

$$13^2=\frac{13^2}{12^2}r^2-r^2 \quad \Big|\cdot 12^2$$

$$13^2\cdot 12^2=r^2\left(5^2\right)$$

$$r=\sqrt{\frac{13\cdot 12}{5}}$$

$$R=\frac{25}{24}\sqrt{\frac{13\cdot 12}{5}}=\sqrt{\frac{125\cdot 13}{2\cdot 24}}$$

$\triangle AFE$ прямоугольный

гипотенуза $2R$

$$\cos(2\alpha-90^\circ)=\frac{CB}{AB}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 $|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

ОДЗ:

$x^2-26x\neq 0$

$x\neq 0$

$x\neq 26$

$26x-x^2>0$

$x(26-x)>0$

$\left[\begin{array}{l} x>0 \\ x<26 \end{array}\right.$

$|x^2-26x|^{\log_5 12} \geq (x^2-26x)+13^{\log_5(26x-x^2)}$

$t^{\log_5 12} \geq t+13^{\log_5 t}$

$t\left(t^{\log_5 12-1}-1\right) \geq 13^{\log_5 t}$

$t\left(t^{\log_5 \frac{12}{5}}-1\right) \geq 13^{\log_5 t}$

~~$x^2-26x=$~~

$26x-x^2=5^t$

$5^{t\log_5 12} \geq -5^t+13^t$

$5^t+5^{t\log_5 12} \geq 13^t$

$5^t+12^t \geq 13^t$ $\qquad 5^2+12^2=13^2$

$f(t)=5^t+12^t-13^t=0$

$e^{\ln a x}$

$e^{\ln a x}=\ln e=\ln a\cdot a^x$

~~$t\log_{13}5+t\log_{13}12=t$~~

~~$t(\log_{13}5+\log_{13}12-1)=0$~~

$f'(t)=\ln 5\cdot 5^t+\ln 12\cdot 12^t-\ln 13\cdot 13^t=0$

$\left(\frac{5}{13}\right)^t+\left(\frac{12}{13}\right)^t \geq 1$

$\downarrow$ убывающ $\quad \downarrow$ убывающ

т.е. $t\leq 2$

т.е. $26x-x^2\leq 25$ реш

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1
$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17} \end{cases}$$

$$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{17}$$

$$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}} \qquad \sin 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}} \text{ или } -\frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\left[\begin{aligned} &\sin 2\alpha \frac{1}{\sqrt{17}} + \frac{4}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ &\sin 2\alpha \frac{1}{\sqrt{17}} - \frac{4}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}} \end{aligned}\right.$$

$$\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = -1$$

$$\sin 2\alpha - 4\cos 2\alpha = -1$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha+1}$$

$$\frac{\cos^2-\sin^2\alpha}{\sin^2+\cos^2\alpha} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha+1}$$

$$\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha+1} + \frac{4-4\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha+1} = -1$$ дорешивается

№2
$$\begin{cases} y-6x = \sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases} \qquad \begin{cases} y-6x = \sqrt{(x-1)(y-6)} \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2 = 90 \end{cases}$$

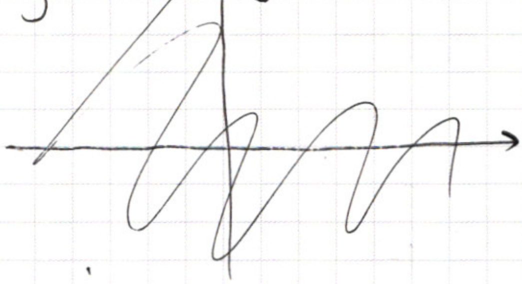
ОДЗ:
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 1 \\ y > 6 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 1 \\ y < 6 \end{cases} \\ x=1 \\ y=6 \end{array}\right.$$

$$9(x-1)^2 + 6(x-1)(y-6) + (y-6)^2 = 90 + (y-6x)^2 6$$

$$(3(x-1)+y-6)^2 = 90 + 6(y-6x)^2$$

$y-6x = \sqrt{(y-6)(x-1)}$ $y \geq 6x$

$y^2 - 12xy + 36x^2 = yx - 6x - y + 6$



$9(x-1)^2 + (y-6)^2$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 90 \\ ab = 6(y-6x)^2 \end{cases}$$

$(a+b)^2 - 2ab = 90$

$(a+b)^2 = 12(y-6x)^2 + 90$

$y - 6 + 6 - 6x = \sqrt{(y-6)(x-1)}$

$(y-6) + 6(1-x) = \sqrt{(y-6)(x-1)}$ $(y-6+x-1)^2$

b 6 a b a

$$\begin{cases} 9a^2 + b^2 = 90 \\ b - 6a = \sqrt{ab} \end{cases} \qquad \begin{cases} 9a^2 + b^2 = 90 \\ 36a^2 + b^2 - 12ab = ab \end{cases}$$

$\cancel{2ab = 36 \cdot 72a^2 + 12ab + b^2}$

$b = 0$

$a = \sqrt{10}$

плохо

$$\begin{cases} 9a^2 + b^2 = 90 \\ 36a^2 + b^2 - 13ab = 0 \Big| \cdot \frac{1}{b^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} 36t^2 + 11t + 1 = 0 \\ D = 169 - 4 \cdot 36 = 25 \end{cases}$$

$(y-6) + 6(1-x) = \sqrt{(y-6)(x-1)}$

$(y-6) \geq 6(x-1)$

$9(x-1)^2 + (y-6)^2 = 90$

$x = 1$ $y = 6$ плохо

$x > 1$ $y > 6$ т.е. одного знака

$x < 1$ $y < 6$