МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

$\log_{12}(x+y)$

11 класс $\log_{12}(5^2+12^2)=\log_{12}13^2$

ВАРИАНТ 1

$5^2+12^2=13^2$

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

$\cancel{\log_{12}5^2+\log_{12}}$

$\log_{12}13=\dfrac{\log_{12}(5^2+12^2)}{2}$

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

$\log_2 64=28$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2},\\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

$\log_2\frac{1}{2}=-1$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$-\frac{121}{2}+\frac{330}{4}-12$

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant\left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

$d\cos\cdot D\,d\cos$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

$=-\frac{9}{2}+\frac{45}{2}-17$

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

$d\cos(D\,d)\cos = -8\cdot\frac{9}{16}+\frac{30}{4}-17=$

$=17\cdot 8$

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$D(D-d)=17\cdot 17\quad -32+60-17$

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

$12^a-13^a=5^a$

$=11$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

$-\frac{121}{2}+\frac{330}{4}-12\quad -8+30-17=$

$=5$

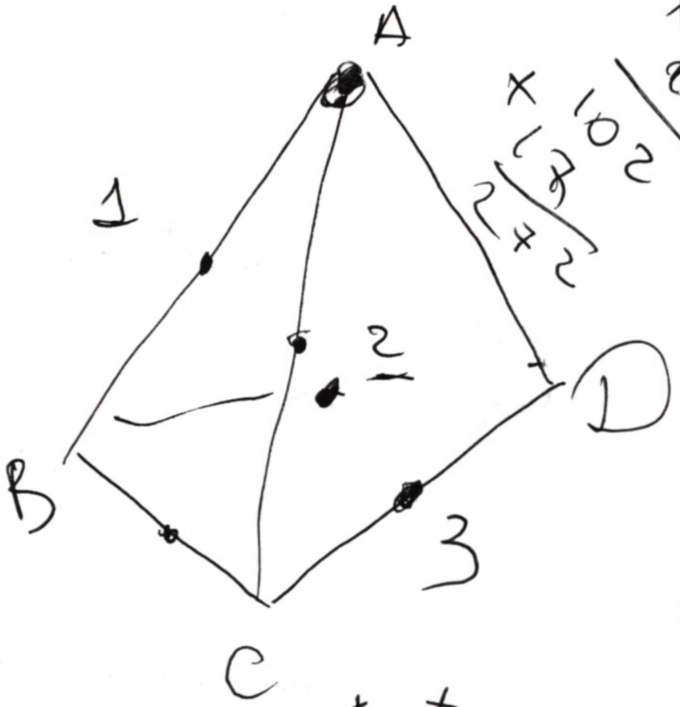
7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

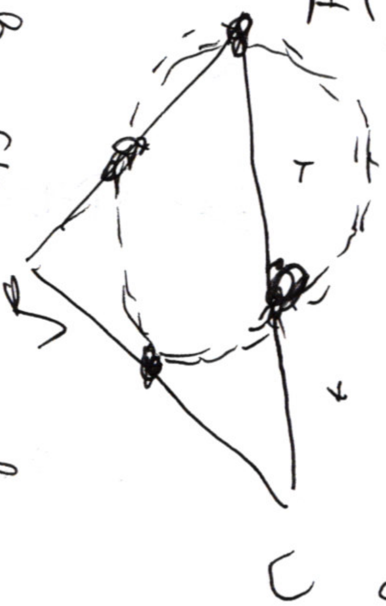
$\frac{1}{5^2}+\frac{1}{12^2}=2-\sqrt{\frac{7}{2}}\vee 2-2\sqrt{\frac{7}{2}}$

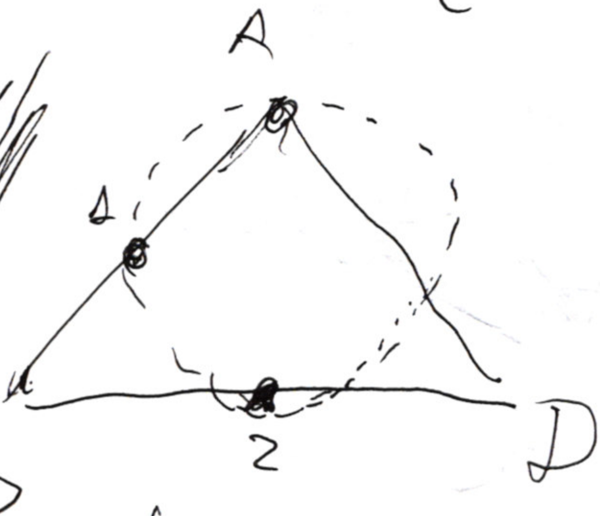
$-72+90-17$

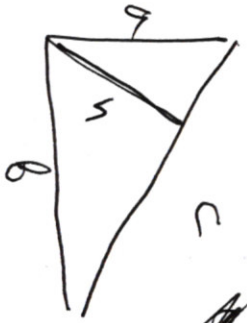
$=1$

$=\frac{13^2}{12^2\cdot 5^2}\vee\frac{1}{13^2}$

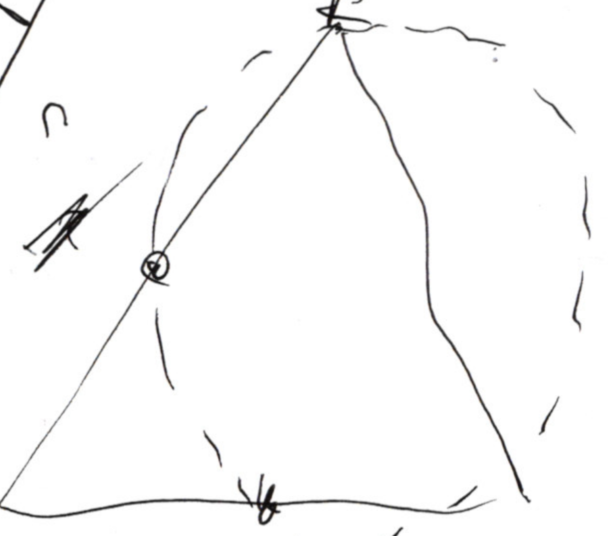


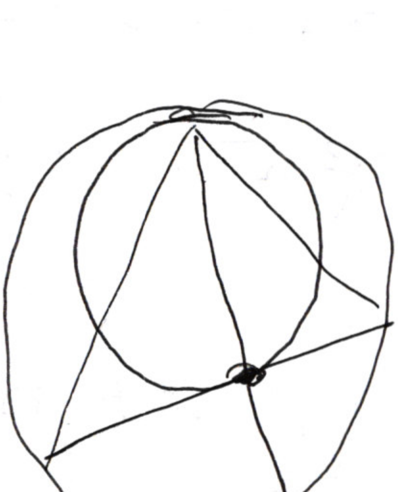


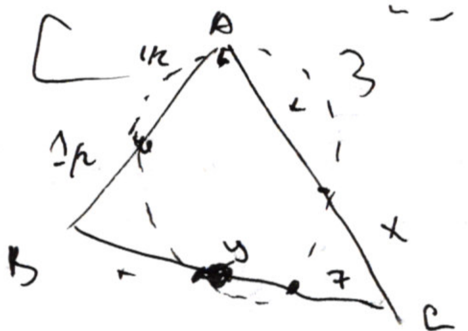




$2x^2 =$







$2x^2 = z(y+z)$

$1/2 = x(x+y)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} & (1) \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5} & (2) \end{cases}$$

$\boxed{\cos\alpha \neq 0 \text{, т.к. } tg\alpha \text{ сущ.}}$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

воспользовался суммой синусов

$$2 \cdot \frac{-1}{\sqrt{5}} \cos 2\beta = -\frac{4}{5}$$

$$\cos 2\beta = \frac{4\sqrt{5}}{10}; \quad \cos 2\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$$

(осн. триг. тожд.)

Раскроем (1) по известной формуле:

$$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = \frac{-1}{\sqrt{5}};$$

Подставим знач. для β:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{2}{\sqrt{5}}\sin 2\alpha + \frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}}\sin 2\alpha - \frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{array}\right., \quad \left[\begin{array}{ll} 2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1 & (3) \\ 2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1 & (4) \end{array}\right.$$

(3): $4\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = -1 \quad |:\cos^2\alpha$

$$4tg\alpha + 1 - tg^2\alpha = -\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

из осн. триг. тожд.

$$4tg\alpha + 1 - \cancel{tg^2\alpha} = -1 - \cancel{tg^2\alpha}$$

$$tg\alpha = -1/2$$

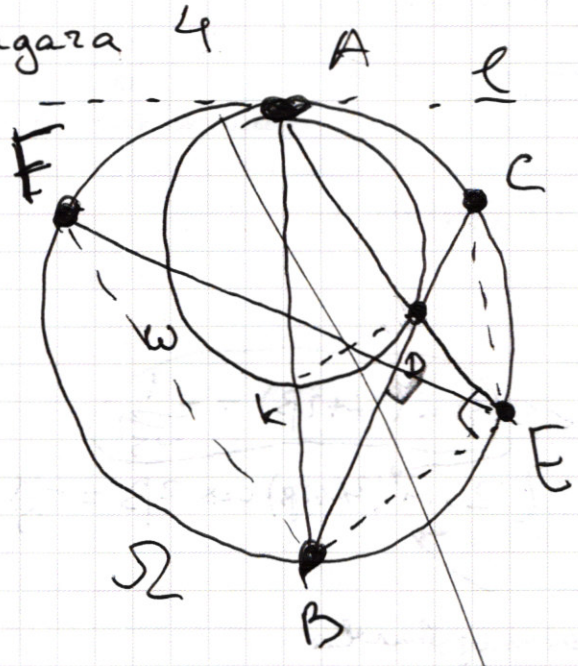
(4): $4\sin\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = -1 \quad |:\cos^2\alpha$

$$4tg\alpha - 1 + tg^2\alpha = -1 - tg^2\alpha$$

$$2tg^2\alpha + 4tg\alpha = 0; \quad \left[\begin{array}{l} tg\alpha = 0 \\ tg\alpha = -2 \end{array}\right.$$

Ответ: $-2; -\frac{1}{2}; 0$

Задача 4



$BD = 17$

$CD = 8$

1) Пусть D — диаметр Ω

d — диаметр ω

тогда по св-ву касательной и секущей из т. B:

$BD^2 = D\cdot(D-d)$ (1)

(Ведь AB содержит диаметр ω, т.к. $AB \perp l$, где l — общая касательная ω и Ω)

2) Пусть $AB \cap \omega = k$

тогда $\triangle ADk \sim \triangle AEB$

(по 2 углам: $\angle BAE$ — общий, $\angle kDA = \angle BEA = 90^\circ$ на диаметр)

$\Downarrow$

$$\frac{AD}{d} = \frac{AE}{D} \quad (2)$$

3) По св-ву пересекающихся хорд $AD\cdot DE = BD\cdot CD$ (3)

4) Очевидно что $AD + DE = AE$

$DE = AE - AD$

$$\begin{cases} BD^2 = D(D-d) \\ \frac{AD}{d} = \frac{AE}{D};\ AD = \frac{d}{D}\cdot AE \\ AD\cdot DE = BD\cdot CD \end{cases}$$

$$\frac{d}{D}\cdot AE\cdot\left(AE - \frac{d}{D}AE\right) = 8\cdot 17$$

$$\begin{cases} AE^2\cdot\frac{d}{D}\cdot\frac{D-d}{D} = 8\cdot 17 \quad (*) \\ D(D-d) = 17^2 \end{cases}$$

$$AE^2 = \frac{D^2\cdot 8\cdot 17}{d(D-d)}$$

$$\cos^2\angle ABE = \frac{AE^2}{D^2} = \frac{17\cdot 8}{d(D-d)} = \frac{17\cdot 8\cdot D}{d\cdot 17^2}$$

$$\cos^2\angle ABE = \frac{8\cdot D}{17d} = \cos^2 EFA$$ ($\angle EFA = \angle ABE$ опир. на $A\overset{\frown}{CE}$)

$\Downarrow$

$\sin^2\angle ABE = \frac{9D}{17d}$; $\sin\angle ABE = \sqrt{\frac{9D}{17d}}$ ($\angle ABE < 90^\circ \Rightarrow \sin\angle ABE > 0$)

Задача 3

из ОДЗ:
$x^2+18x>0$

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}-18x$$

Замена $x^2+18x=t,\ t>0$

$$t^{\log_{12}5}+t \geq t^{\log_{12}13}.$$

$$t^{\log_{12}5}+t^{\log_{12}12} \geq t^{\log_{12}13}$$

$$5^{\log_{12}t}+12^{\log_{12}t} \geq 13^{\log_{12}t}.$$ Замена: $\log_{12}t=a$

$5^a+12^a \geq 13^a$. Заметим, что при $a=2$ реализуется равенство, затем правая часть больше левой из св-ву показательной функции.

$a\in(-\infty;2] \Leftrightarrow t\in(0;144]$, $144 = 12^2$

$$0 \overset{(1)}{<} x^2+18x \overset{(2)}{\leq} 144$$

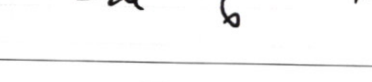
(1) $x^2+18x>0$, $x(x+18)>0$

$x\in(-\infty;-18)\cup(0;+\infty)$

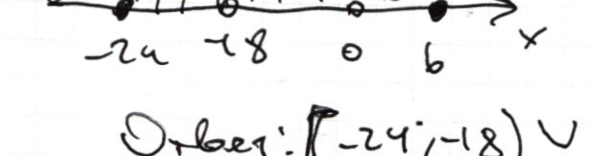
(2) $x^2+18x-144\leq 0$

$(x+24)(x-6)\leq 0$

Воспользуемся методом интервалов:



Объединим ответ:



Ответ: $[-24;-18)\cup(0;6]$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~sin 2α cos 2β +~~ $\qquad \sin(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(x+y) = -\frac{1}{\sqrt5}$; $\quad \sin(x+2y) + \sin x = -\frac{4}{5}$

$\begin{cases} \sin x\cos y + \cos x \sin y = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin x \cos 2y + \cos x \sin 2y + \sin x = -\frac{4}{5} \end{cases}$

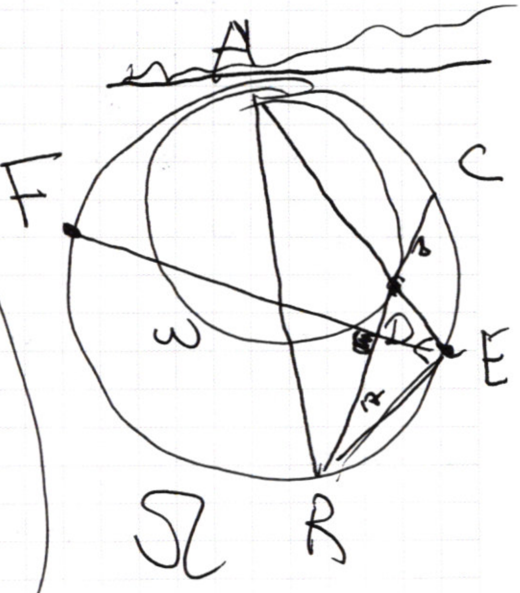
$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$

$2,\ 25,\ 85,\ 125,\ 205,\ 2125$

$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$



$AD(AE-AD) = 17\cdot 8$

$AD^2\left(\frac{D}{d}-1\right) = 17\cdot 8$

$AD^2 = \frac{17\cdot 8}{D-d}\cdot d$

$AE^2 = \frac{D^2}{d^2}\cdot\frac{17\cdot 8\cdot d}{D-d}$

$AD\cdot DE = 17\cdot 8$

$17^2 = (D-d)D$

$\frac{D}{d} = \frac{AE}{AD}$

$AE = \frac{D}{d}\cdot AD$

$BE^2 = D^2\left(1 - \frac{17\cdot 8}{(D-d)}\right)$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~Задача~~

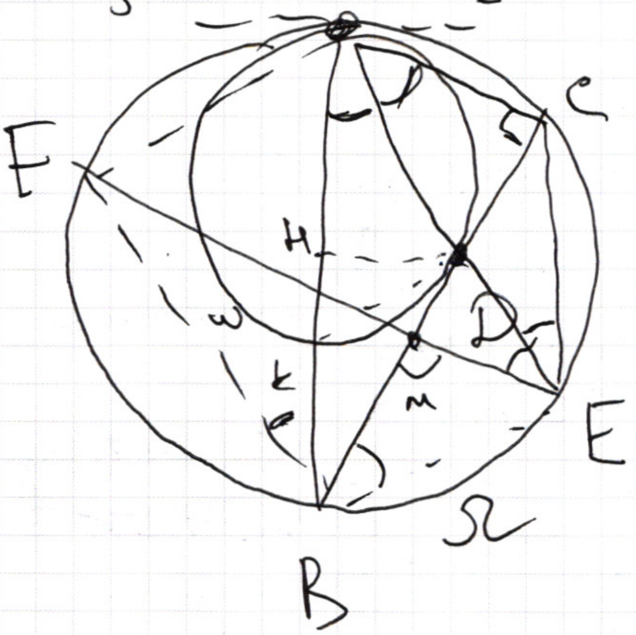
Задача 4 A l

обш. кас.

$BD = 17$

$CD = 8$

0) AB содержит диаметр ω, т.к. $AB \perp l$



1) По лемме Архимеда AD – биссектриса $\angle BAC$

$\Downarrow$

$\breve{BE} = \breve{EC} \Rightarrow BE = EC$

$\Downarrow$

FF – сер. пер. к BC

$\Downarrow$

$BM = MC = 25/2$

EF – диаметр $\Leftarrow$

2) Пусть диаметр $\Omega = D$, диаметр $\omega = d$, $\angle BAE = \alpha$

$$\begin{cases} 17^2 = D(D-d) & (1) \\ 8 \cdot 17 = d\cos\alpha \cdot (D-d)\cos\alpha & (2) \\ \cancel{8 = d\cos\alpha \cdot \sin\alpha} & (3) \\ \frac{25}{\sin 2\alpha} = D \ ; \ 8 = d\cos\alpha\sin\alpha \end{cases}$$

~~(2) ... $(D-d)$ ctg α~~

(3)

(1) $BD^2 = D(D-d)$ св-во

(2) $AD \cdot DE = BD \cdot CD$ кас. и секущей

(3) $AD = Ak\cos\alpha$ ($\angle kDA = 90^\circ$ диаметр)

(4) $AE = AB\cos\alpha$

~~(5) $Dk = CD$ (AD – бис) $Dk = \frac{AD \cdot kD}{Ak}$ (высота из прямого угла)~~

(6) $Dk = CD$ (AD – бис)

$Dk = \frac{kD \cdot AD}{Ak}$

(высота из прямого угла)

(5) по т. синусов для $\triangle ABC$:

$\frac{BC}{\sin 2\alpha} = D$

Задача 2

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases};\quad \begin{cases} (x-2y)^2=(x-2)(y-1) \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$$

Замена: $x-2=A$ Заметим, что ~~$A-2B=x-2-2y$~~

$y-1=B$ $A-2B=x-2-2y+2=$

$=x-2y$

Тогда: $\begin{cases} (A-2B)^2=AB \\ A^2+9B^2=25 \end{cases}$

$$\begin{cases} A^2-4AB+4B^2=AB \Rightarrow A^2-5AB+4B^2=0 \\ A^2+9B^2=25 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$\left[\begin{array}{l} A=B \ (1) \\ A=4B \ (2) \end{array}\right.$ по т. Виета

$B^2+9B^2=25$ $25B^2=25$

$A=B=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$ $B=\pm1$; $A=\pm4$

I: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-2=\sqrt{5/2} \\ y-1=\sqrt{5/2} \end{cases} \\ \begin{cases} x-2=\sqrt{5/2} \\ y-1=-\sqrt{5/2} \end{cases} \\ \begin{cases} x-2=-\sqrt{\frac{5}{2}} \\ y-1=\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases} \\ \begin{cases} x-2=-\sqrt{5/2} \\ y-1=-\sqrt{5/2} \end{cases} \end{array}\right.$

$\begin{cases} x=\sqrt{\frac{5}{2}}+2 \\ y=\sqrt{\frac{5}{2}}+1 \end{cases}$; $x<2y \Rightarrow$ так тоже не бывает

~~Проверка: $x \geq 2y$~~

~~$\sqrt{\frac{5}{2}}+2 \vee 2+2\sqrt{\frac{5}{2}}$~~

~~$\begin{cases} x=\sqrt{\frac{5}{2}}+2 \\ y=-\sqrt{\frac{5}{2}}+1 \end{cases}$~~

~~$\begin{cases} x=2-\sqrt{\frac{5}{2}} \\ y=\sqrt{\frac{5}{2}}+1 \end{cases}$~~

$\begin{cases} x=2-\sqrt{\frac{5}{2}} \\ y=1-\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases}$ $x>2y$ все хорошо

Эти ситуации невозможны, т.к. подкоренное выраж ≥ 0 $\Longrightarrow$ $\boxed{\text{A и B должны быть одного знака!}}$

II: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-2=4 \\ y-1=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x-2=-4 \\ y-1=-1 \end{cases} \end{array}\right.$

$\begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases}$ — ok

$\begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases}$ $x<2y$ — не ok

Ответ: $(6;2)$
$\left(2-\sqrt{\frac{5}{2}};\ 1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 17^2 = D(D-d) & (а) \\ 8\cdot 17 = d(D-d)\cos^2\alpha & (б) \\ \frac{25}{\sin 2\alpha} = D & (в) \\ \cancel{8} \; 16 = d\sin 2\alpha & (г) \end{cases}$$

из (в) и (г):

$$\frac{25}{D} = \frac{16}{d}$$

$$d = \frac{16}{25}D$$

$$17^2 = D\cdot\frac{9}{25}D; \quad 17^2 = \left(\frac{3}{5}D\right)^2 \quad (D>0)$$

$$\frac{3}{5}D = 17; \quad D = \frac{85}{3}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{16}{\frac{16}{25}\cdot\frac{85}{3}} = \frac{75}{85} = \frac{15}{17}$$

$$d = \frac{16}{25}\cdot\frac{85}{3} = \cancel{\frac{17\cdot 16}{15}} = \frac{17}{5}\cdot\frac{16}{3} = \frac{272}{15}$$

Заметим, что

$\angle AFE = \angle CEF = 2\alpha$. Значит, $\angle AFE = \arcsin\frac{15}{17}$

(ACEF – р/б трапеция, т.к. она вписана и $AC \parallel EF$)

$$S_{AEF} = \frac{AF\cdot AE}{2} \quad (\angle EAF = 90^\circ, \text{ диаметр})$$

$$AE = D\cos\alpha$$

$$AF = BE = D\sin\alpha$$

(AFBE – отв. прямоугольник)

$$\Rightarrow S_{AEF} = \frac{D^2\cdot\sin 2\alpha}{4}$$

$$\frac{\frac{85^2}{9}\cdot\frac{15}{17}}{4} = \frac{5\cdot 85\cdot 5}{12} = \frac{25}{12}\cdot 85$$

Ответ: $D = \frac{85}{3}$

$d = \frac{272}{15}$ $\quad S_{AEF} = \frac{2125}{12}$

$\angle AFE = \arcsin\frac{15}{17}$ | $\cancel{S_{AEF} = \frac{2125}{12}}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

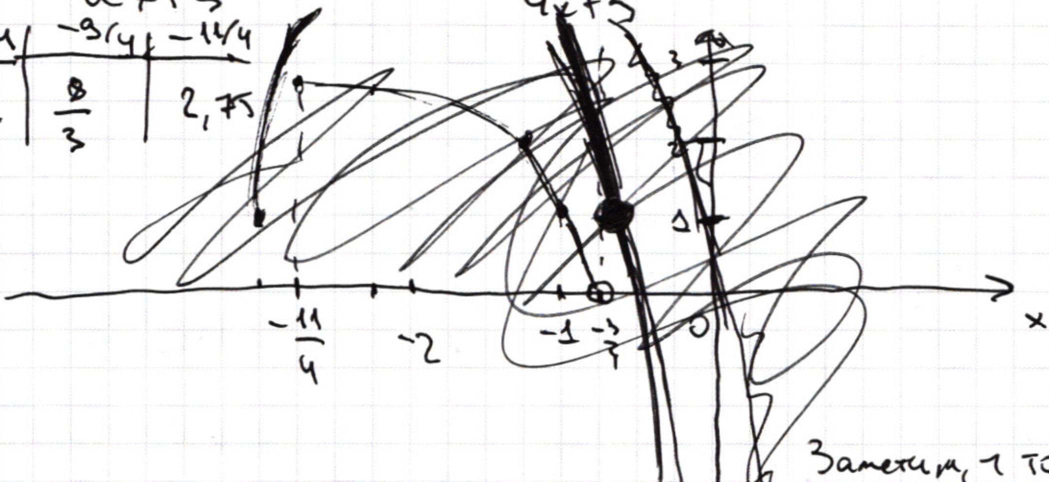
Страница № 4
(Нумеровать только чистовики)

Задача 6

Для лучшего представления ситуации нарисуем график $\frac{12x+11}{4x+3}$ и $-8x^2-30x-17$ на заданном промежутке

$\frac{12x+11}{4x+3} = \frac{12x+9+2}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4x+3}$

x	~~-1~~	-5/4	-9/4	-11/4
y	~~1~~	2	$\frac{8}{3}$	2,75



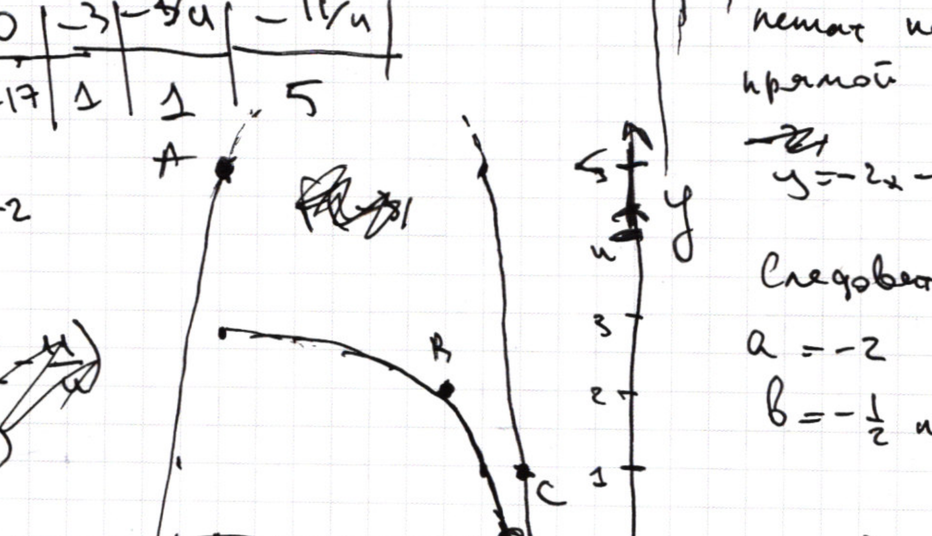
$-8x^2-30x-17$

x	-1	-2	0	-3	-3/4	-11/4
y	5	11	-17	1	1	5

$x_0 = \frac{30}{-16} \approx -2$

~~Пусть т.А — f(-11/4)~~
т.В. $-f(-\frac{3}{4})$
$f(x) = ax+b$

~~$f(-\frac{11}{4}) < 5$~~
~~$-\frac{11}{4} \le f(-\frac{11}{4}) < 5$~~
~~$f(-\frac{3}{4}) < 1$~~



$A = (-\frac{11}{4}; 5)$
$B = (-\frac{5}{4}; 2)$
$C = (-\frac{3}{4}; 1)$

Заметим, что A, B и C лежат на одной прямой
$y = -2x - \frac{1}{2}$
Следовательно, $a = -2$
$b = -\frac{1}{2}$ подходит

см. след. стр

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5) По т. синусов для $\triangle ABE$:

$x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-36y^2+72y+48}}{2}$

$\dfrac{D}{\sin 90^\circ} = \dfrac{AE}{\sin\angle ABE} = 2R = D$

$AE = D \cdot \sqrt{\dfrac{9D}{17d}}$

$\cancel{\dfrac{D}{d} \cdot AD} = D$

$AE^2 = \dfrac{9D}{17d} \cdot D^2$

$AD = d \cdot \sqrt{\dfrac{9D}{17d}}$

Подставим в (*)

$\dfrac{9D}{17d} \cdot D^2 \cdot \dfrac{d}{D} \cdot \dfrac{Dd}{D} = 8 \cdot 17$

$x = 2 \pm \sqrt{-9y^2+18y+16}$

$\dfrac{9D}{17}(D-d) = 17 \cdot 8$

$x - 2y = \sqrt{(x-2)(y-1)}$

$x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12$

$(x-2)^2 + (3y-3)^2 = 25$

$\cancel{x-2y} = \sqrt{AB}$ $\quad (x-2y)^2 = A \cdot B \quad \mid \cdot 6$

$324 - 48 = 276$

$x^2 - 4xy + 4y^2 =$

$A^2 + 9B^2 = 25$

$xy - x - 2y + 2$

$A^2 + 9B^2 \geq 2 \cdot 3AB = 6AB$

$A = x - 2$ $\quad x - 2y = A - 2B$

$B = y - 1$

$25 \geq 6AB$

$\cancel{(A-3B)^2 + 6(x-2y)^2 = 25}$

$y = \dfrac{18 \pm \sqrt{324 - 4x^2 + 16x - 48}}{8}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Покажем, что это единственная прямая, удовл. усл. Действительно, точки C и A нельзя поднимать вверх, ведь будет пересеч. с параболой. Также эти точки нельзя опускать, ведь будет не касание гиперболы, а пересеч. $\Rightarrow$ будет участок, где $2 + \frac{2}{4+x^3} > ax + b$

Ответ: $a = -2$

$b = -\frac{1}{2}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$x^2 - 4x + 4 + 9y^2 - 18y + 9 = 25$

$(x-2)^2 + (3y-3)^2 = 25$

$(x-2)^2 + 9(y-1)^2 = 25$

$(x-2y)^2 = (x-2)(y-1)$

$x^2 - 4xy + 4y^2 =$

$= xy - x - 2y + 2$

$(x-2y)^2 = x(y-1) - 2(y-1) =$

$= (x-2)(y-1)$

$\sin^2 + \cos^2 = 1 \ | : \cos^2$

$tg^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2}$

$17^2 = D(D-d)$

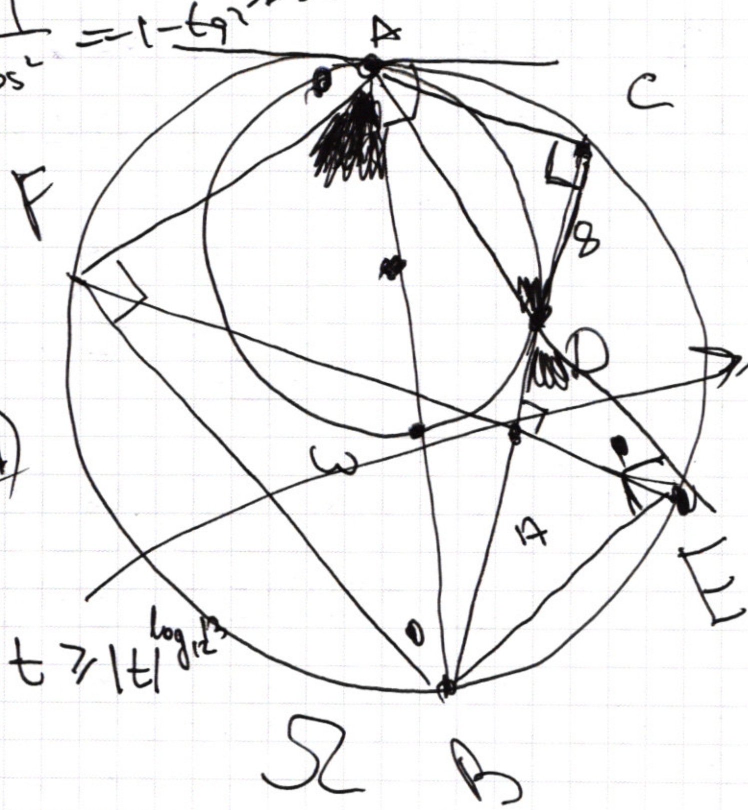
$\boxed{\begin{matrix} y=2 \\ x=6 \end{matrix}}$

$(a^x)' = x \cdot \ln a$

$r, R, AFE - ?$

$S_{AEF} - ?$

$-\frac{1}{\cos^2} = -1 - tg^2$



$C \quad AD \cdot DE = 8 \cdot 17$

$t^{\log_{12} 5} + t \geq t^{\log_{12} 13}$

$17^2 = (D-d)$

$\frac{BE}{17} = \frac{AC}{AD}$

$t^{\log_{12} 5} + t \geq |t|^{\log_{12} 13}$

$t \geq t^{\log_{12} 13} - t^{\log_{12} 5}$

$\left(\frac{BE}{17}\right)^2$

$= \log_{12} 8 \ln t =$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq$

$\geq |x^2+18x|^{\log_{12} 13} - 18x$

$\cos\alpha = \frac{DE}{17}, \ \cos\alpha = \frac{8}{AD}$

$(x^2+18x)^{\log_{12} 5} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12} 13} - 18x$

$(a^x)' = x \ln a$

$(x^2+18x)^{\log_{12} 5} + x^2 + 18x \geq |x^2+18x|^{\log_{12} 13}$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №___
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1.

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(p)=[p/4]$

$$\begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}\\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha=-\frac45\end{cases};\quad \begin{cases}2\sin\alpha\cos\alpha\cos2\beta+2\cos2\alpha\sin\beta\cos\beta=-\frac{1}{\sqrt5}\\ 2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\cos4\beta+2\sin2\beta\cos2\beta\cdot\cos2\alpha+\sin2\alpha=-\frac45\end{cases}$$

$$\begin{cases}2\sin\alpha\cos\alpha\cdot(\cos^2\beta-\sin^2\beta)+2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\sin\beta\cos\beta=-\frac{1}{\sqrt5}\\ 2\sin\alpha\cos\alpha\cdot(\cos^2 2\beta-\sin^2 2\beta)+4\sin\beta\cos\beta(\cos^2\beta-\sin^2\beta)\cdot(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+2\sin\alpha\cos\alpha=-4/5\end{cases}$$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac1y\right)<0$

$f(x)<-f\left(\frac1y\right)$

$x\geq 2y$

$$\begin{cases}x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}\\ x^2+9y^2-4x-18y=12\end{cases}$$

324

$\frac42=\frac{1}{1/2}$ $\quad 18\times4=72$

$\frac{\cancel{5}}{2}=$

$$\begin{cases}x^2-4xy+4y^2=x(y-1)-2(y-1)\\ x^2+9y^2-4x-18y=12\end{cases};\quad x^2-4x+9y^2-18y-12=0$$

$144+4\cdot 144=576$

$$x_{12}=\frac{4\pm\sqrt{16-36y^2+72y+48}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{-36y^2+72y+64}}{2}=2\pm\sqrt{-9y^2+18y+16}$$

$x_{12}=\frac{-18\pm30}{2}$ $\quad -9y^2+18y+16=0$

$640-64=576$ $\quad 24\times6=144$

$576+324=900$

$x_1=6$ $\quad x_2=-24$ $\quad y_{12}=\frac{-18\pm\sqrt{324+576}}{-18}=\frac{-18\pm30}{-18}$

$12^a-\ldots>0$

$(2^x)'=\cancel{x\ln2}$

$=$

$(2^x)'=2^x\cdot\ln2$ $\quad 12^a>0$

$a+\cancel{\ldots}=2^{2+}$ $\quad a=\frac{5/2}{-5/4}=-2$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)