МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2},\\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(2) $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$

$\begin{cases} x-2y=\sqrt{(y-1)(x-2)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$

Сделаю замену: $x-2=m$; $y-1=k$

$\begin{cases} m-2k=\sqrt{mk} \\ m^2+9k^2=25 \end{cases}$ ОДЗ: $mk\geq 0$ $\begin{cases} m^2+4k^2-5mk=0 \\ m^2+9k^2-25=0 \end{cases}$

$\begin{cases} -5k^2-5mk+25=0 \\ m^2+9k^2-25=0 \end{cases}$ при $k=0$ 1-е равенство неверно $\Rightarrow k\neq 0$

$\begin{cases} m=\frac{5-k^2}{k} \\ \frac{(5-k^2)^2}{k^2}+9k^2-25=0 \quad |\cdot k^2 \end{cases}$ $\begin{cases} m=\frac{5-k^2}{k} \\ 10k^4-35k^2+25=0 \end{cases}$

$\begin{cases} m=\frac{5-k^2}{k} \\ 2k^4-7k^2+5=0 \end{cases}$ решу 2-е ур-е. найду k^2:

$k^2=\frac{7\pm\sqrt{49-40}}{4}=1 ; \frac{10}{4}$

Итого: $\left[\begin{array}{l} k=1 ; \quad m=4 \\ k=-1 ; \quad m=-4 \\ k=\frac{\sqrt{10}}{2} ; \quad m=\frac{\sqrt{10}}{2} \\ k=-\frac{\sqrt{10}}{2} ; \quad m=-\frac{\sqrt{10}}{2} \end{array}\right.$ Все решения подходят по ОДЗ.

т.к. $x=m+2$; а $y=k+1$

Ответ: $x=6$; $y=2$
$x=-2$; $y=0$
$x=\frac{\sqrt{10}}{2}+2$; $y=\frac{\sqrt{10}}{2}+1$
$x=-\frac{\sqrt{10}}{2}+2$; $y=-\frac{\sqrt{10}}{2}+1$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(3) $5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$

ОДЗ: т.к. $\log_{12}(x^2+18x)$ определён, то $x^2+18x>0$ $\Rightarrow$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2+18x \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}$

Сделаю замену: $x^2+18x=m$ $(m>0)$

$5^{\log_{12}m} + m \geq m^{\log_{12}13}$

т.к. $m = 12^{\log_{12}m}$

$5^{\log_{12}m} + 12^{\log_{12}m} \geq 12^{\log_{12}13\cdot\log_{12}m}$

$5^{\log_{12}m} + 12^{\log_{12}m} \geq 13^{\log_{12}m}$

Сделаю замену: $\log_{12}m = t$; $(t>0)$

$5^t+12^t-13^t \geq 0$

т.к. 5^t и 12^t растут медленнее, чем 13^t, то и 5^t+12^t растёт медленнее, чем 13^t $\Rightarrow$ $5^t+12^t-13^t$ – убывающая функция $\Rightarrow$ у неё только 1 корень

при $t=2$: $5^2+12^2-13^2=0$

$\Rightarrow$ $5^t+12^t-13^t\geq 0$ при $t\leq 2$

отсюда $\log_{12}m \leq 2$

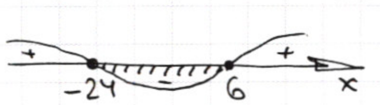
т.к. $\log_{12}x$ – возрастающая функция, то $m \leq 12^2$

отсюда $x^2+18x \leq 144$

$x^2+18x-144 \leq 0$

Найду корни $x^2+18x-144=0$: $x = \dfrac{-18\pm\sqrt{18^2+4\cdot 144}}{2} = -24; 6$

$(x+24)(x-6)\leq 0$



Ответ: $x\in[-24;6]$

⑤ $f(ab)=f(a)+f(b)$
$f(p)=[p/4]$

Выпишу для всех $x \in \mathbb{N}$ (натуральных) $1 \leq x \leq 24$ значения $f(x)$.

Для простого x $f(x)=[x/4]$

Если x составное $f(x)$ – $\sum f(a)$, где a – его простые множители

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$f(x)$	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0
x	17	18	19	20	21	22	23	24								
$f(x)$	4	0	4	1	1	2	5	0								

$\forall x, y$ (для любых x, y)

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$

т.к. $f(y)+f\left(\frac{1}{y}\right)=f\left(y \cdot \frac{1}{y}\right)=f(1)=0$, то $f\left(\frac{1}{y}\right)=-f(y)$

$\Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$

Если $f\left(\frac{x}{y}\right)<0$, то $f(x)-f(y)<0 \Rightarrow f(x)>f(y)$

Подсчитаем кол-во таких пар среди $x, y \in \mathbb{N}$ $1 \leq x \leq 24$, $1 \leq y \leq 24$.

Есть 1 x: $f(x)=5$. С ним $1 \cdot 23=23$ пары
Есть 2 x: $f(x)=4$. С ними $2 \cdot (24-1-2)=2 \cdot 21=42$ пары
Есть 1 x: $f(x)=3$. С ним $1 \cdot (24-1-2-1)=1 \cdot 20=20$ пар
Есть 2 x: $f(x)=2$. С ними $2 \cdot (24-1-2-1-2)=2 \cdot 18=36$ пар
Есть 7 x: $f(x)=1$. С ними $7 \cdot (24-1-2-1-2-7)=7 \cdot 11=77$ пар.

(Я перемножаю кол-во чисел $\{x\}$ с данным знач. $f(x)$ на кол-во чисел $\{y\}$ со значением $f(y)<f(x)$)

Итого кол-во подходящих пар: $23+42+20+36+77=188$

Ответ: 188

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(6) $\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$

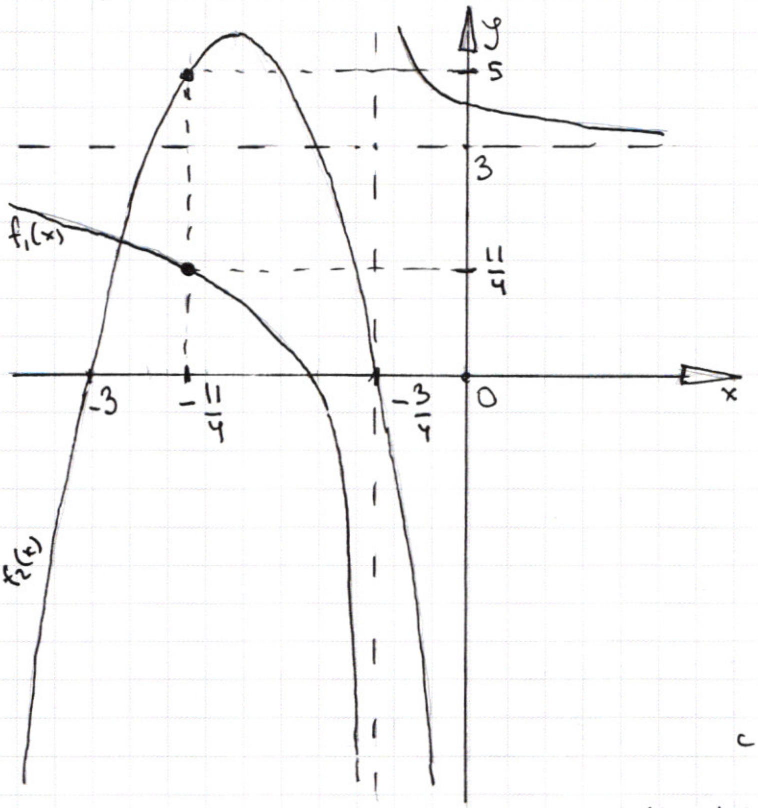
Пусть $f_1(x)=\frac{12x+11}{4x+3}$, а $f_2(x)=-8x^2-30x-17$.

Преобразую:

$f_1(x) = 3+\frac{0.5}{x+3/4}$ – гипербола

$f_2(x) = -8(x+3)(x+\frac{3}{4})$ – парабола

Построю $f_1(x)$ и $f_2(x)$ на одном графике:



(На графике вычислены значения функций при $x=-\frac{11}{4}$)

$x\in[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4})$ – те при которых $f_1(x)\le ax+b\le f_2(x)$

т.к. в $x=-\frac{11}{4}$ начинается интервал, то

$$\left[\begin{array}{l} a\cdot\left(-\frac{11}{4}\right)+b=f_1\left(-\frac{11}{4}\right) \\ a\cdot\left(-\frac{11}{4}\right)+b=f_2\left(-\frac{11}{4}\right)\end{array}\right.$$

т.к. в $x=-\frac{3}{4}$ заканчивается интервал (не раньше),

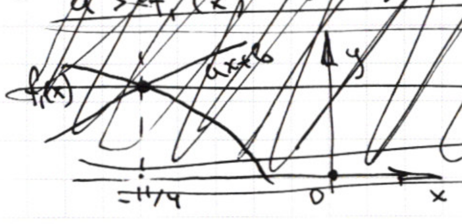
то $ax+b$ не пересекается с $f_2(x)$ при $x\in(-\frac{11}{4};-\frac{3}{4})$

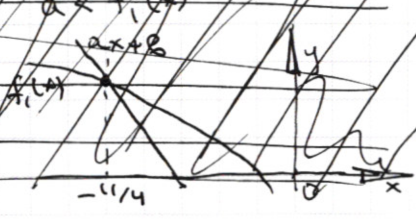
т.к. парабола – выпуклая ф-ия, то

$a\cdot -\frac{3}{4}+b\le 0$

~~и $ax+b$ не пересекается с $f_1(x)$ при $x\in(-\frac{11}{4};-\frac{3}{4})$, т.к. на данном промежутке $f_1(x)$ тоже выпуклая, то в $x=-\frac{11}{4}$ угол наклона прямой (a) должен быть больше, чем у гиперболы ($f_1'(x)$).~~

~~$a>f_1'(x)$~~ ~~$a<f_1'(x)$~~





~~Итак~~ и $ax+b$ не пересекается с $f_1(x)$ при $x\in(-\frac{11}{4};-\frac{3}{4})$. т.к. $f_1(x)$ выпуклая на этом промежутке, то угол наклона прямой $a \geq$ углу наклона касательной к $f_1(x)$.

Пусть ~~[illegible]~~ $-\frac{11}{4}a+b=f_1(-\frac{11}{4})=\frac{11}{4}$

для выполнения условия:

$$\begin{cases} -\frac{11}{4}a+b=\frac{11}{4} \\ -\frac{3}{4}a+b\le 0 \\ a>f_1'(-\frac{11}{4}) \end{cases}$$

$$f_1'(-\frac{11}{4})=-\frac{1/2}{(-\frac{11}{4}+\frac{3}{4})^2}=-\frac{1}{8}$$

$$\begin{cases} -\frac{11}{4}a+b=\frac{11}{4} \\ -\frac{3}{4}a+b\le 0 \\ a>-\frac{1}{8} \end{cases} \quad \begin{cases} b=\frac{11}{4}a+\frac{11}{4} \\ 2a+\frac{11}{4}\le 0 \\ a>-\frac{1}{8} \end{cases} \quad \begin{cases} b=\frac{11}{4}a+\frac{11}{4} \\ a\le -\frac{11}{8} \\ a>-\frac{1}{8} \end{cases}$$ — Такое невозможно

Значит $-\frac{11}{4}a+b=f_2(-\frac{11}{4})=5$

Запишу ур-е касательной к $f_1(x)$ в x_0:

$$f_1'(x_0)\cdot x-f_1'(x_0)\cdot x_0+f_1(x_0)=-\frac{1/2}{(x_0+3/4)^2}x+\frac{1/2\,x_0}{(x_0+3/4)^2}+\frac{1/2}{x_0+3/4}+3=$$

$$=-\frac{1/2}{(x_0+\frac{3}{4})^2}x+\frac{x_0+3/8}{(x_0+3/4)^2}+3$$

То есть для выполнение условий:

$$\begin{cases} -\frac{11}{4}a+b=5 \\ -\frac{3}{4}a+b\le 0 \\ a>-\frac{1/2}{(x_0+3/4)^2} \\ \frac{x_0+3/8}{(x_0+3/4)^2}+3=b \end{cases} \quad \begin{cases} b=\frac{11}{4}a+5 \\ 2a+5\le 0 \\ a>-\frac{1/2}{(x_0+3/4)^2} \\ \frac{x_0+3/8}{(x_0+3/4)^2}+3=\frac{11}{a}+5 \end{cases}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$ $\quad +4-4 \quad +9-9$

$\begin{cases} x-2y=\sqrt{y(x-2)-(x-2)}=\sqrt{(y-1)(x-2)} \\ (x-2)^2+(3y-3)^2=25 \end{cases}$ $\sqrt{\ }=5$

2-е ур-е: $(x-2y)^2=(y-1)(x-2)$ $\quad x^2+4y^2-4xy=xy-x-2y+2$

$x-2y>0$ $\quad x^2+x+4y^2+2y-5xy-2=0$

$\begin{cases} x-2y=\sqrt{(y-1)(x-2)} \\ (x-2)^2+9\cdot(y-1)^2=25 \end{cases}$ $\quad k$

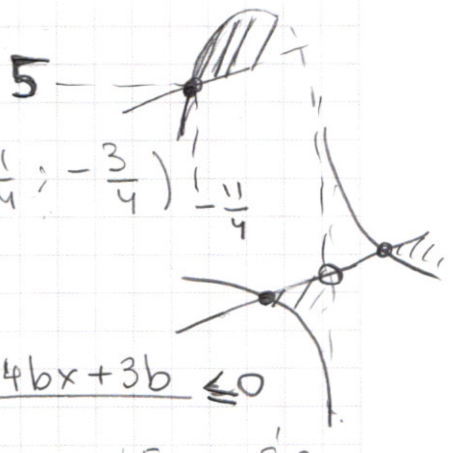
$x-2-2y+2$

$\begin{cases} m-2k=\sqrt{mk} \\ m^2+9k=25 \end{cases}$ $\quad mk=m^2+4k^2-4mk$

$m^2+6mk+9k^2=6m^2+24k^2-24mk+25$

возраст / убыв

$\frac{12x+11}{4x+3}\le ax+b\le -8x^2-30x-17$ $\uparrow$ $\quad x\in\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$



$\downarrow \frac{12x+9+2}{4x+3}=3+\frac{2}{4x+3}$ $\ne 0$ $\downarrow$ $\quad 3+\frac{2}{4x+3}\le ax+b$

$\frac{12x+11-4ax^2+3ax-4bx+3b}{4x-3}\le 0$

$a>0$

$x=-\frac{11}{4}$ $\quad \frac{12x+11}{4x+3}=\frac{-33+11}{-11+3}=\frac{11}{4}$ $\quad -22, \ -8$

$x^2=\frac{121}{16}$

$-8x^2-30x-17=-\frac{121}{2}+\frac{15\cdot 11}{2}-\frac{34}{2}=\frac{10}{2}=5$

$x=-\frac{3}{4}$ $\quad x^2=\frac{9}{16}$

$-8x^2-30x-17=-\frac{9}{2}+\frac{45}{2}-\frac{34}{2}=\frac{2}{2}=1$

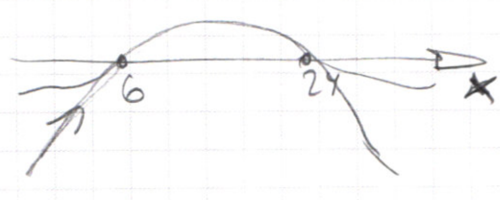
$D=\frac{30\pm\sqrt{900-4\cdot 8\cdot 17}}{2}=24;6$

$-8(x-24)(x-6)$

15 × 11 = 165; 165 − 121 = 44; 44 − 34 = 10

32 × 17 = 544; 900 − 544 = 356; 18^2

$-\frac{11}{4}a+b=5$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

(3) $5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$

$5^{\log_{12}(\underbrace{x^2+18x}_{m})} + x^2+18x \geq (\underbrace{|x^2+18x|}_{m})^{\log_{12}13}$

$5^{\log_{12} m} + m \geq |m|^{\log_{12}13}$

$5^{\overset{a}{\log_{12} m}} \geq |m|^{\overset{b}{\log_{12}13}} - m$

$12^{\log_{12} m}$

144
25
169

$5 = 12^{\log_{12}5}$

$12^{\log_{12}5\cdot\log_{12}m} + m \geq |m|^{\log_{12}13}$

$m^{\log_{12}5} + m \geq m^{\log_{12}13}$

$m^{\log_{12}5} + m^{\log_{12}12} \geq m^{\log_{12}13}$

$m = 12^{\log_{12}m}$

$12^{\log_{12}m\cdot\log_{12}5} + 12^{\log_{12}m\cdot\log_{12}12} \geq m^{\log_{12}m\cdot\log_{12}13}$

$5^{\overset{t}{(\log_{12}m)}} + 12^{\overset{t}{(\log_{12}m)}} \geq 13^{\overset{t}{(\log_{12}m)}}$

$5^{(2+\Delta t)} + 12^{(2+\Delta t)} \geq 13^{(2+\Delta t)}$

$5^2\cdot 5^{\Delta t} + 12^2\cdot 12^{\Delta t} \geq 13^2\cdot 13^{\Delta t}$

$5^2\cdot\left(\frac{5}{13}\right)^{\Delta t} + 12^2\cdot\left(\frac{12}{13}\right)^{\Delta t} \geq 13^2$

$\left(\frac{5}{13}\right)^{t} + \left(\frac{12}{13}\right)^{t} \geq 1$

$x = \frac{-18\pm\sqrt{18^2+4\cdot 12^2}}{2} = \frac{-18\pm 30}{2} = -24; 6$

1	0	13	3
2	0	14	1
3	0	15	1
4	0	16	0
5	1	17	4
6	0	18	0
7	1	19	4
8	0	20	1
9	0	21	1
10	1	22	2
11	2	23	5
12	0	24	0

$1\cdot 23$
$2\cdot 21$
$1\cdot 20$
$2\cdot 18$
$7\cdot 11$

~~65~~
85
113 — 188

p

1	0		
2	0		
3	0	4	0
5	1		
7	1	6	0
9	2	8	0

$f(x\cdot\frac{1}{x}) = \overset{a}{f(x)} + \overset{-a}{f(\frac{1}{x})}$

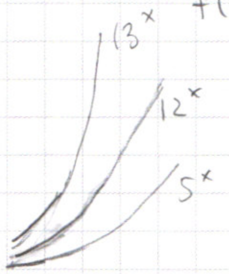
$f(1)=0$

$f(\frac{1}{x}) = -f(x)$

$f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x) - f(y)$

$f(x)-f(y)<0$

$f(x)<f(y)$



$x \to x+\Delta x$

$12^{x+\Delta x} - 12^x < 13^{x+\Delta x} - 13^x$

$5^{x+\Delta x}$

$2+3>4$
$4+9<16$
$8+27<64$

$\frac{13^{x+\Delta x}}{13^x} > \frac{12^{x+\Delta x}}{12^x} > \frac{5^{x+\Delta x}}{5^x}$

$\frac{13^{x+\Delta x}}{13^x} > \frac{12^{x+\Delta x}+5^{x+\Delta x}}{12^x+5^x}$

$18\cdot 18 = 144 + 180 = 324$; $324 + 576 = 900$

$144\cdot 4 = 576$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

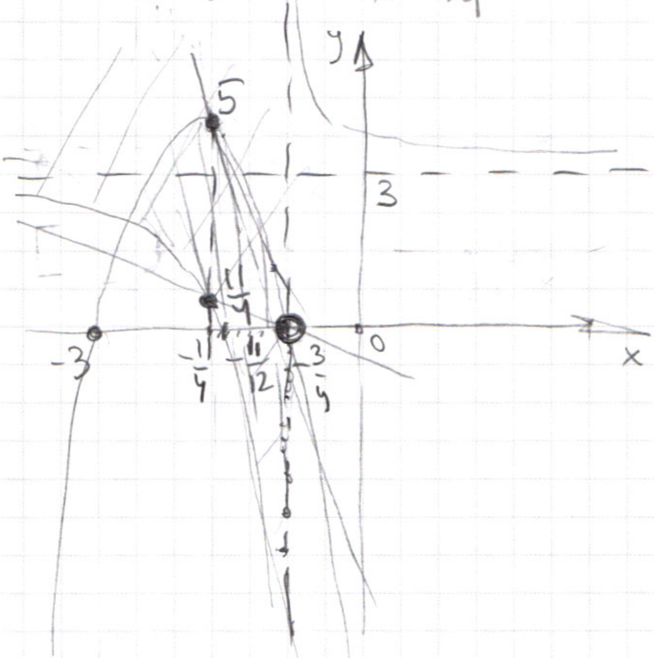
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$3+\frac{2}{4x+3}=3+\frac{1/2}{x+3/4}$

$-8x^2-30x-17=-8(x+3)(x+\frac{3}{4})$

$D=900-32\cdot17=356=18^2$

$x=\frac{30\pm18}{-16}=-3;-\frac{3}{4}$



$x=-\frac{11}{4}$ $\left[\begin{array}{l} ax+b=5 \\ ax+b=\frac{11}{4} \end{array}\right.$

$x=-\frac{3}{4}$ $ax+b<0$

$\frac{12x+11}{4x+3}=0$ $x=-\frac{11}{12}$

$-\frac{9}{2}+\frac{45}{2}-\frac{34}{2}$

$\begin{array}{r} 32 \\ 17 \\ \hline 224 \\ 32 \\ \hline 544 \\ 356 \\ \hline 900 \end{array}$

$3+\frac{1/2}{x+3/4}$

$-\frac{1/2}{\left(-\frac{11}{4}+\frac{3}{4}\right)^2}=-\frac{1}{8}$

$-\frac{8}{4}$ -2

$-\frac{121}{2}+\frac{15\cdot11}{2}-\frac{34}{2}$ 165

$ax+b$

$6/16$ $33/16$

$-\frac{1/2}{(x_0+\frac{3}{4})^2}x+\frac{1/2x_0+1/2x_0+3/8+3x_0^2+\frac{27}{16}+\frac{9}{2}x_0}{(x_0+3/4)^2}$

$\frac{3x_0^2+5.5x_0+33/16}{(x_0+3/4)^2}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

① $\sin(2\alpha+4\beta) = \sin((2\alpha+2\beta)+2\beta) = \sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta) +$
$+ \cos(2\alpha+2\beta)\cdot\sin(2\beta)$

$$-\frac{1}{\sqrt{5}}\cos(2\beta) \pm \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\sin(2\beta) + \sin(2\alpha) = -\frac{4}{5}$$

$$2a > -\frac{1}{(x_0+3/4)^2}$$

$$\cancel{\frac{1+2a(x_0+3/4)^2}{(x+3/4)^2}} \geq 0$$

$$(x_0+3/4)^2 > -\frac{1}{2a}$$

$m - 2k > 0$

$$\begin{cases} m^2+4k^2-4mk = mk \\ m^2+9k^2 = 25 \end{cases} \qquad \begin{cases} m^2+4k^2-5mk=0 \\ m^2+9k^2-25=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5k^2+25-5mk=0 \\ m^2+9k^2-25=0 \end{cases} \qquad m = \frac{-\cancel{5}k^2+\cancel{25}}{\cancel{5}k} = -k+\frac{5}{k} = \frac{5-k^2}{k}$$

$$\frac{(5-k^2)^2}{k^2} + 9k^2 - 25 = 0$$

$$\frac{25+k^4-10k^2+9k^4-25k^2}{k^2} = 0$$

$$10k^4 - 35k^2 + 25 = 0$$

$$\frac{2\left(5-\frac{10}{4}\right)}{\sqrt{10}} = \frac{10-5}{\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$