МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=\sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta+\cos 2\alpha\cdot\sin 4\beta+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}$

$\sin 2\alpha(\cos 4\beta+1)+\cos 2\alpha\cdot\sin 4\beta=-\frac{8}{17}$

$2\cos 2\beta(\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta)=-\frac{8}{17}$

$2\cos 2\beta\cdot\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{8}{17}$

$-\frac{2}{\sqrt{17}}\cos 2\beta=-\frac{8}{17}$ $\quad\cos 2\beta=\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\beta=\pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\left[\begin{array}{l}-1=4\sin 2\alpha+\cos 2\alpha\\ -1=4\sin 2\alpha-\cos 2\alpha\end{array}\right.$ $\quad 16x^2+8x+1=1-x^2$

$\sin 2\alpha=x\quad \cos 2\alpha=\sqrt{1-x^2}$

$x=\left[\begin{array}{l}0\\ -\frac{8}{17}\end{array}\right.$ $\quad\sin 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$

$\operatorname{tg}\alpha=0$ $\quad -\frac{4}{17}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$ $\quad\operatorname{tg}\alpha=\left[\begin{array}{l}-\frac{1}{4}\\ -4\end{array}\right.$

$\operatorname{tg}\alpha=t$

$t=\frac{-17\pm15}{8}=\left[\begin{array}{l}-\frac{1}{4}\\ -4\end{array}\right.$

Ответ: $\{0;-4;-\frac{1}{4}\}$

№5

$f(ab)=f(a)+f(b)$ $\quad$ В ходе взятия ф-ции число раз-

$f(x)=f(\frac{x}{y})+f(y)$ $\quad$ бивается на все свои простые мно-

$f(x)-f(y)=f(\frac{x}{y})<0$ $\quad$ жители т.к. делится на $f(a)$ и $f(b)$

$f(y)>f(x)$ $\quad$ Рассм простые числа ~~от 3~~ до 27:

3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23. Разобьём их на группы:

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №1 (Нумеровать только чистовики) какая целая часть от деления на 4, такой № группы.

так ~~I~~ гр. №

$0: 3, 2, \cancel{7}$
$1: 5, 7$
$2: 11$
$3: 13$
$4: 17, 19$
$5: 23$

далее кол-во баллов - ~~кол-во~~ число после взятия ф-ции.

Чтобы число получило за 2 разных простых числа хотя бы по 1 баллу нужно 2 ненулевых простых числа. Такое ≤ 27 только 1: $25 = 5^2$, далее минимальным явл $5 \cdot 7 = 35 > 27$, не подх.

Разобьём числа $\in \mathbb{N}$ от 3 до 27 вкл на группы по баллам

0: $\{3; 4; 6; 8; 9; 12; 16; 18; 24; 27\}$ 10 шт

1: $\{5; 7; 10; 15; 20; 14; 21\}$ 7 шт

2: $\{11; 22; 25\}$ 3 шт

3: $\{13; 26\}$ 2 шт

4: $\{17; 19\}$ 2 шт

5: 23 1 шт

Для составления пары нам нужен x из группы, меньшей по баллам чем y. Итого:

для $x \in$

~~I~~ 0	$10 \cdot 15$	150
~~II~~ 1	$7 \cdot \cancel{10}\ 8$	56
2	$3 \cdot 5$	15
3	$2 \cdot 3$	6
4	$2 \cdot 1$	2
5	2	2

$\Sigma = 231$

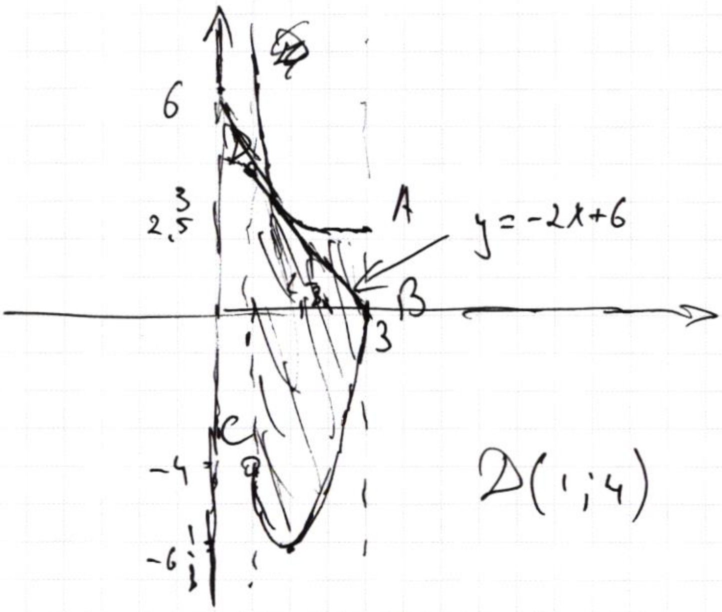
Ответ: 231 пара

№6

$$y = \frac{4x-3}{2x-2} = 2 + \frac{1}{2x-2} \ge ax+b \ge 8x^2 - 34x + 30 = y_1 \quad x \in (1; 3]$$

y_1 - парабола $\quad x_b = 2\frac{1}{8} \quad y_b = -6\frac{1}{8} \quad y(1) = -4 \quad y(3) = 0$

$y_2 = 2 + \frac{1}{2x-2}$ — гипербола



$ax+b$ — прямая, проходящ. в заштрихованном промежутке.

~~ax+b~~

~~ax+b~~

$y = ax+b \cap$ отрезок AB

$y = ax+b \cap$ отрезок CD

$y=ax+b$ касается, но не $\cap$ гиперболу $y_2 = \frac{4x-3}{4x-2}$

$D(1;4)$

$a \geq 2,5$

$a \leq 3\frac{1}{8}$

$a+b \geq 2x-6$

Ответ: $ax+b \geq 2x-6$ $\quad 3a+b \leq 2\frac{1}{4}$

$a \geq -2,5$

$a \leq 3\frac{1}{8}$

№2

$$\begin{cases} 9y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

① $(x-1)^2+(y-\frac{2}{3})^2 = \frac{25}{9}$

$y = \frac{5x-1 \pm (3x-3)}{6}$

$y = \left[\begin{array}{l} \frac{9x-4}{6} \\ \frac{x+1}{3} \end{array} \right.$

$16 \times 13 = 208$, $16 \times 16 = 256$

② 1) $(x-1)^2 + (\frac{9x-4}{6} - \frac{2}{3})^2 = \frac{25}{9}$

$(x-1)^2 + (\frac{9x}{6})^2 = \frac{25}{9}$

$x^2-2x+1+2,25x^2 = \frac{25}{9}$

$3,25x^2-2x+\frac{16}{9} = 0$

$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - \frac{208}{9}}}{6,5}$

$D<0$

2) $(x-1)^2 + (\frac{x-1}{3})^2 = \frac{25}{9}$

$\frac{10}{9}(x-1)^2 = \frac{25}{9}$

$x = \frac{2 \pm \sqrt{10}}{2}$

Ответ: $\frac{2 \pm \sqrt{10}}{2}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$f(ab)=f(a)+f(b)$ $\quad f(p)=\left[\frac{p}{4}\right]$

$f(x)=f\left(\frac{x}{y}\right)+f(y)$

$3\le x\le 27$

$3\le y\le 27$

$f(x)-f(y)=f\left(\frac{x}{y}\right)<0$

$f\left(\frac{x}{y}\right)<0$

$f(y)-f(x)>0$

3 5 7 11 13 17 19 23

$\cancel{f(27)=f(3)+f(3)+f(3)=}$

Любое дробное: $f\left(\frac{a}{b}\right)=f(a)-f(b)$

$\cancel{f(15)=f(3)+f(5)=}$

Если => Число разбивается на прост числа, ~~обнуляются~~

$f(y)>f(x)$

<13 — 1

<17 — 2

для x не включ. $p\ge5$ {3; 4; 6; 8; 9; 12; 16; 18; 24; 27} — 10б.

<5 — 0

<11 — 1

<13 — 2

<17 — 3

<23 — 4

23 — 5б.

4 — 0, 8 — 1, 12 — 2, 16 — 3, 20 — 4, 5

$p\ge11$ {5; 7; 10; 15; 20; 14; 21} — 7б. $\cancel{f\left(\frac{17}{4}\right)=f(17)-f(4)}$

$p\ge13$ {11; 22; 25} 3б. 3

$p\ge17$ {13; 26} 2б. 2

$p\ge23$ {17; 19} 2б. 2

23 1б. 1

для x I	10·15	150
для x II	7·10	70
для x III	3·5	15
для x IV	2·3	6
для x V	2	2

150 + 80 + 10 = 240

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}-x^2$ $\qquad x^2+6x>0$

$x(x+6)>0$

$x^2+6x \geq -(x^2+6x)^{\log_4 3}+(x^2+6x)^{\log_4 5}$ $\qquad \left[\begin{array}{l} x<-6 \\ x>0 \end{array}\right.$

$1 \geq \log_{x^2+6x}(\log_4 5-\log_4 3)$ при ~~x<1~~ усл. вып.

всегда =>

$t \geq -t^{\log_4 3}+t^{\log_4 5}$

$1 \geq -t^{\log_4 3-1}+t^{\log_4 5-1}$

$x^2+6x=16$

$1 \geq -t^{\log_4 \frac{3}{4}}+t^{\log_4 \frac{5}{4}}$ >0

$t^{\log_4 4} \geq t^{\log_4 \frac{5}{4}}-t^{\log_4 \frac{3}{4}}$

$9 \geq 25-16$

при $x^2+6x=16$ $\quad 9 \geq 25-16$ $\quad$ ф-ция мон ↑ =>

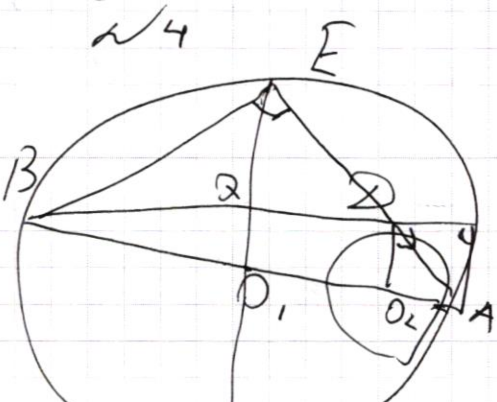
=> $x^2+6x-16 \leq 0$

$x=\frac{-6 \pm \sqrt{36+64}}{2}=\left[\begin{array}{l} -8 \\ 2 \end{array}\right.$

$x \in [-8;2]$

Ответ: $[-8;6) \cup (0;2]$

№4



$\exists\, BC \cap EF = Q$

$BE \parallel AC$

$\angle BCA = \angle BEA = 90°$

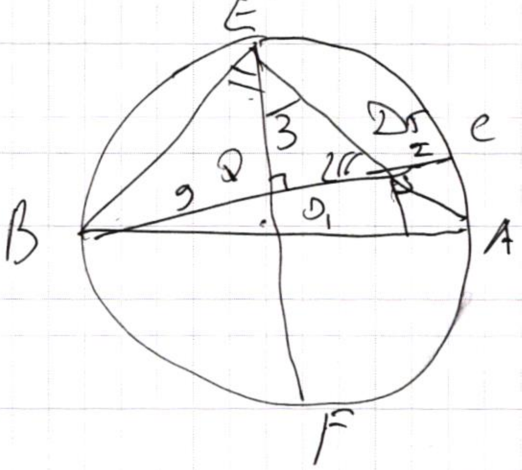
т. $A_1 \in AB$ что $A_1 \in (O_2;?)$

A_1D (AA_1 – диам., $\angle A_1DA = 90°$)

$\left.\begin{array}{l} EQ \perp BC \\ DO_2 \perp BC \end{array}\right\} \Rightarrow EQ \parallel DO_2$ $\quad AEO_1 \sim ADO_2$

т.к. $\Delta \sim \Delta$; $AB \cap EF = O_1$

$\Rightarrow EF$ диам.



$BD = \frac{13}{2}$ $\quad DC = \frac{5}{2}$

$BC = 9$

$BQ = QC = 4,5$

$QD = 4,5 - 2,5 = 2$

$\angle CDA = \angle QDE$

$\angle BEQ = \angle CDA$ (по т о2 уг. ⊥)

$\cancel{\angle BEQ}$ $\Rightarrow \angle CAD = \angle QED = \angle QBE$

$\Rightarrow \Delta CAD \sim \Delta QED \sim \Delta QBE$

$\frac{EQ}{QD} = \frac{QB}{EQ}$ $\quad EQ^2 = QB \cdot QD = 4,5 \cdot 2 = 9$

$EQ = 3$

$BE = \sqrt{81+9} = \cancel{\sqrt{84}}\ \sqrt{90}$

$ED = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

$AD = \frac{DC \cdot ED}{QD} = \frac{5}{2} \cdot \sqrt{13} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5\sqrt{13}}{4}$

$AE = AD + DE = \frac{5\sqrt{13}}{4} + \sqrt{13} = \frac{9\sqrt{13}}{4}$

$AB = \sqrt{BE^2 + EA^2} = \sqrt{90 + \frac{81 \cdot 13}{16}} = \sqrt{64\frac{29}{16}} = 32$

$R = \frac{1}{2} \cdot 32 = 16$

$\frac{AB}{AA_1} = \frac{\cancel{83}}{2}$

$$\begin{array}{r} 53 \\ -24 \\ \hline 29 \end{array} \quad \begin{array}{r} 81 \\ \times 13 \\ \hline 243 \\ 81 \\ \hline 1053 \end{array} \quad 1\cancel{0}43 \quad \begin{array}{r} 33 \\ \times 33 \\ \hline 99 \\ 99 \\ \hline 1089 \end{array} \quad \begin{array}{r} 32 \\ \times 32 \\ \hline 64 \\ 96 \\ \hline 1024 \end{array}$$

Ответ: 16

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$a = \frac{2\,tg\alpha}{1+tg^2\alpha}$$

$$tg\alpha = 0$$

$$\cancel{-\frac{8}{17} = \frac{2\,tg\alpha}{1+tg^2\alpha}}$$

$$\cancel{-8 - tg^2\alpha = 34\,tg\alpha}$$

$$\cancel{x^2 + 34x + 8 = 0}$$

$$\cancel{x = -34 \pm \sqrt{\ }}$$

$34 \times 34 = 136 + 102 = 1156$; $1156 - 32 = 1124$

$17 \times 17 = 119 + 17 = 289$; $289 - 64 = 225$

$32 \times 32 = 64 + 96 = 1024$

$$\cancel{\frac{4tg^2\alpha + tg^4\alpha + 1 + 2tg^2\alpha}{(1-tg^2\alpha)^2}}$$

$$\cancel{\frac{4tg^2\alpha + tg^4\alpha + 1 - 2tg^2\alpha}{tg^4\alpha + 2tg^2\alpha + 1}}$$

$$-\frac{4}{17} = \frac{tg\alpha}{1+tg^2\alpha}$$

$$-4 - 4tg^2\alpha = 17\,tg\alpha$$

$$4t^2 + 17t + 4 = 0$$

$$t = \frac{-17 \pm \sqrt{289-225}}{8}$$

$$t = \frac{-17 \pm 15}{8} = \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{4} \\ -4 \end{array}\right.$$

№2

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2} \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 \end{cases}$$

$\cancel{2 \cdot 3 \cdot x = 4^2}$

$x = \frac{2}{3}$

$\sqrt{3} \cdot 2 \cdot x = 4^2$

$x = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$$\cancel{3x^2 - 6x + 3 + 3y^2 - 4y + \frac{4}{9}}$$

$$3x^2 - 6x + 3 + 3y^2 - 4y + \frac{4}{3} - 3 - \frac{4}{3} = 4$$

$$3(x-1)^2 + \left(\sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = 8\frac{1}{3}$$

$\frac{25}{3}$ $\Longleftrightarrow$

$$(x-1)^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$$

$\cancel{3xy - 2x - 3y + 2 \geq 0}$ $3xy - 2x - 3y + 2 > 0$

$$9y^2 - 12xy + 4x^2 = 3xy - 2x - 3y + 2$$

$$9y^2 - 15xy + 4x^2 + 2x + 3y - 2 = 0$$

$(x^2 + 2x + 1) +$

$$9(1 - 10x + 25x^2)$$

$$9y^2 + 3\left(1 - 5x\right)y + 4x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$y = \frac{(5x-1)3 \pm \sqrt{\ }}{18}$$

$\cancel{9 - 90x + 225x^2}$

$$9(1 - 10x + 25x^2 - 16x^2 - 8x + 8) = 0$$

$$9x^2 - 18x + 9 = 0$$

$$y = \frac{(5x-1)3 \pm 9(x-1)}{18}$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

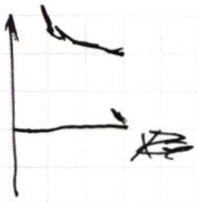
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30 \quad x \in (1;3]$



$4x^2-17x+15$

$17x-34x+30=$
$=-17x+30=$
$=-\frac{17^2}{8}+30$

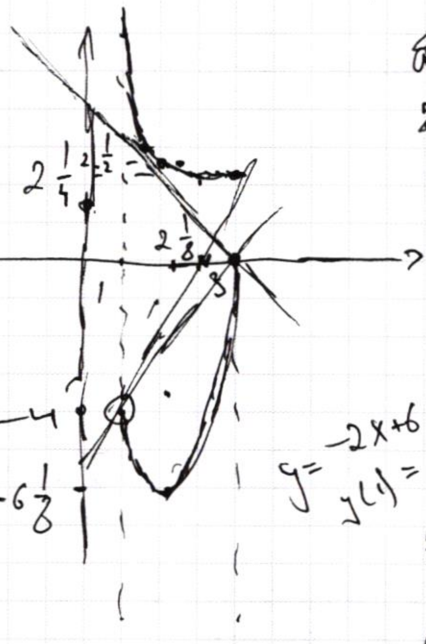
$3a+b=2\frac{1}{4}$
$a+b=-4$
$2a=6\frac{1}{4}$
$a=3\frac{1}{8} \Rightarrow$

$x_b=\frac{17}{8}=2\frac{1}{8}$

$2+\frac{1}{2x-2}$

$f(x) \geq$

$ax+b < -2x+6$



$2a+b=2\frac{1}{2}$
$8a+b=0$

$2a=4$
$a=2$

$a+b=-4$
$3a+b=0$

$y=-2x+6$
$y(1)=4$

$f(3)=0$

$289 : 8 = 36$

$-36\frac{1}{8}+30=$
$=-6\frac{1}{8}=y_b$

семейство прямых,

$2\frac{1}{4} \geq 3a+b \geq 0$

$y_2'(1{,}5)=-2$
$3a+b=0$
$1{,}5a+b=3$
$1{,}5a=-3$
$a=-2$

$b=-3a=6 \quad a+b \geq -4$

$y_2'=-1\frac{2}{(2x-2)^2}$

$a \geq -\frac{2}{(2x-2)^2}$ для $x \in (1;3)$

$y=-2x+6$

$y=$

$a=\frac{-2}{(2x-2)^2}$

$3a+b=0$

$\frac{-2(x-3)}{(2x-2)^2}=\frac{4x-3}{2x-2}$

$xa-3a=2+\frac{1}{2x-2}$

$8x^2=12x$
$x=0$
$2x=3$
$x=\pm1{,}5$

$(4x-3)(2x-2)=-2(x-3)$

$8x^2-14x+\cancel{6}=\cancel{6}-2x$

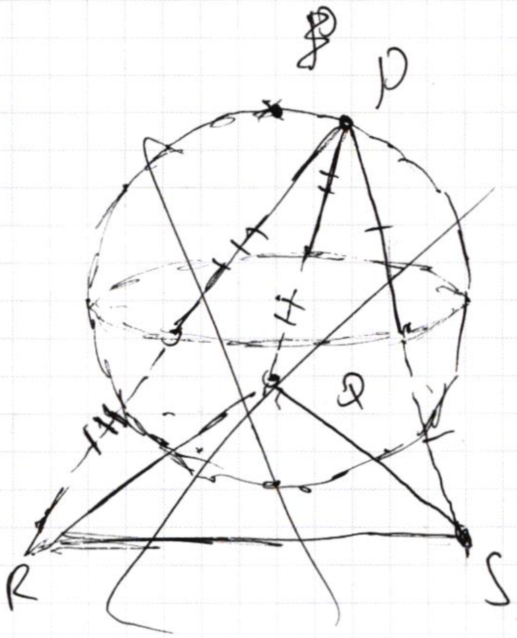
☑ черновик ☐ чистовик

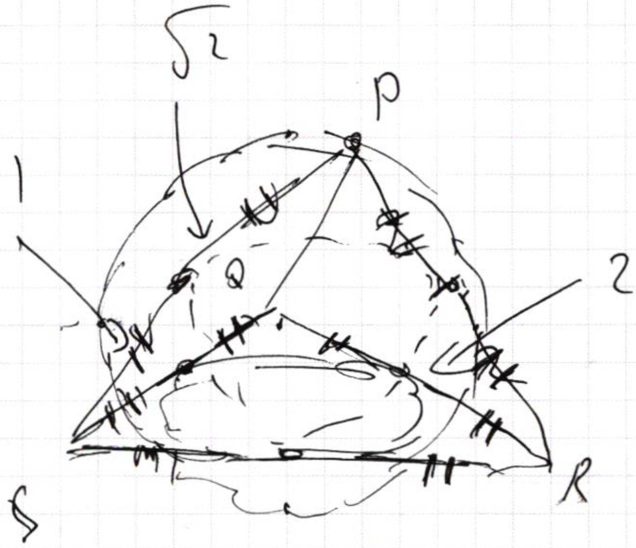
(Поставьте галочку в нужном поле)

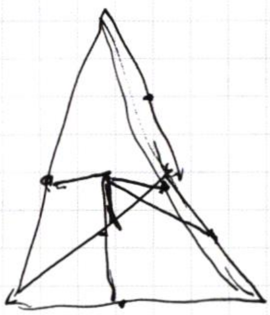
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№7







Касат. отрез. из 1 т. на сферу =

№2

$$(x-1)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{25}{9}$$

$$\cancel{x^2+2-2x+1+y^2-\frac{4}{3}y+\frac{4}{9}} = \cancel{\frac{25}{9}}$$

$$9y^2-15xy+4x^2+2x+3y-2=0$$

$$y=\left[\begin{array}{l}\frac{9x-4}{6}\\ \frac{x+1}{3}\end{array}\right.$$

$$9\left(y-\frac{9x-4}{6}\right)\left(y-\frac{x+1}{3}\right)=0$$

$$(6y-9x+4)(3y-x-1)=0$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 $\cos 4\beta = 2\cos^2 2\beta - 1$

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} = \sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta$$

$$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = \sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 4\beta + \sin 2\alpha = \frac{-8}{\sqrt{17}}$$

$$\sin 2\alpha(\cos 4\beta + 1) + \cos 2\alpha \cdot \sin 4\beta = -\frac{8}{\sqrt{17}}$$

$$2\sin 2\alpha \cdot \cos^2 2\beta + 2\cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta \cdot \cos 2\beta = \frac{-8}{\sqrt{17}}$$

$$2\cos 2\beta \underbrace{(\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta)}_{-\frac{1}{\sqrt{17}}} = \frac{-8}{\sqrt{17}}$$

$$-\frac{2}{\sqrt{17}}\cos 2\beta = \frac{-8}{\sqrt{17}}$$

$$\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{17}} \quad \boxed{\left(\sqrt{1-\frac{16}{17}}\right)}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{17}} = \sin 2\alpha \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} + \underbrace{\cos 2\alpha}_{\sin(\frac{\pi}{2}-2\alpha)} \cdot \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\left[\begin{array}{l} -1 = 4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha \\ \cancel{-1 = 4\sin 2\alpha \pm \sqrt{17}\sin 2\alpha} \\ -1 = 4\sin 2\alpha - \cos 2\alpha \end{array}\right.$$

$\log_x(x^9+x^8)$

$$\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$-1 = 4x + \sqrt{1-x^2}$$

$$-4x-1 = \sqrt{1-x^2}$$

$$16x^2 + 8x + \cancel{1} = \cancel{1} - x^2$$

$$17x^2 = -8x \qquad x = -\frac{8}{17} \qquad x=0$$

$$x(17x+8) = 0$$

$$4x+1 = \sqrt{1-x^2}$$

$$16x^2 + 8x + \cancel{1} = \cancel{1} - x^2$$

$$17x^2 = -8x$$

$$x = 0 \qquad x = \frac{-8}{17}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

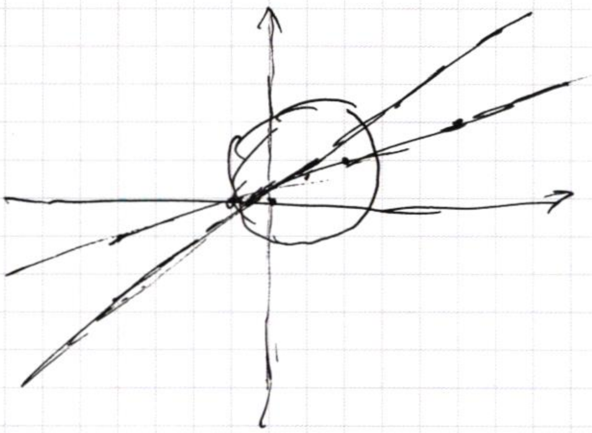
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y = \frac{5x-1 \pm (3x-3)}{6} = \left[\begin{array}{l} \frac{8x-4}{6} \\ \frac{2x+2}{6} = \frac{x+1}{3} \end{array}\right.$$



$$(x-1)^2 + \left(\frac{x-1}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$$

$$\frac{10}{9}(x-1)^2 = \frac{25}{9}$$

$$(x-1)^2 = 2,5$$

$$x^2 - 2x + 1 = 2,5$$

$$x^2 - 2x - 1,5 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+6}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{10}}{2}$$

$\log_a b = c$ $\quad a^c = b$

$b = a^{\log_a b}$

№3

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$$

ОДЗ: $x^2+6x>0$

$$3^{\log_4(x^2+6x)} - 5^{\log_4(x^2+6x)} \geq -6x - x^2$$

<0

$$x^2+6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5} - (x^2+6x)^{\log_4 3}$$ т.к. $x^2+6x>0$

$$1 \geq (x^2+6x)^{\log_4 5 - \log_4 4} - (x^2+6x)^{\log_4 3 - \log_4 4}$$

$$1 \geq (x^2+6x)^{\log_4 \frac{5}{4}} - (x^2+6x)^{\log_4\left(\frac{3}{4}\right)}$$

$$1 \geq \log_{x^2+6x}\left((x^2+6x)^{\log_4 5} - (x^2+6x)^{\log_4 3}\right)$$

$$1 \geq \log_{x^2+6x}$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)