МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам
$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$
Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений
$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство
$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство
$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$
выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N5 $f(p)=[\frac{p}{4}]$ => тогда при $a=b=1$ $f(1)=f(1)+f(1) \Rightarrow f(1)=0$.

$\Rightarrow f(2)=0$

x	f(x)
2	0
3	0
5	1
7	1
11	2
13	3
17	4
19	4
23	5

$f(4)=f(2)+f(2)=0+0=0$

$f(6)=f(2\cdot 3)=f(2)+f(3)=0$

$f(8)=f(4)+f(2)=0$

$f(9)=f(3)+f(3)=0$

$f(10)=f(2)+f(5)=1$

$f(12)=f(6)+f(2)=0$

$f(14)=f(7)+f(2)=1$

$f(15)=f(5)+f(3)=1$

$f(16)=f(8)+f(2)=0$

$f(18)=f(9)+f(2)=0$

$f(20)=f(10)+f(2)=1$

$f(21)=f(3)+f(7)=1$

$f(22)=f(11)+f(2)=2$; $f(24)=f(12)+f(2)=0$

$f(25)=f(5)+f(5)=2$; $f(26)=f(13)+f(2)=3$; $f(27)=f(9)+f(3)=$
$=0$; $f(28)=f(4)+f(7)=1$

Итого, среди значений $f(x)$ $(4\le x\le 28)$ у нас 9 нулей, 8 единиц, 3 двойки, 2 тройки, 2 четвёрки и одна пятёрка. Запомним это.

$f(a\cdot\frac{1}{a})=f(1)=0=f(a)+f(\frac{1}{a}) \Rightarrow f(a)=-f(\frac{1}{a})$.

т.е. если $\frac{x}{y}$ — рациональные, то $f(\frac{x}{y})=-f(\frac{y}{x})$. Если $f(\frac{x}{y})$ не 0, то ровно одно из чисел $f(\frac{x}{y})$ и $f(\frac{y}{x})$ отрицательное.

найдём, когда $f(\frac{x}{y})=0$. $f(\frac{x}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})=f(x)-f(y)$,

т.е. $f(\frac{x}{y})=0 \Leftrightarrow f(x)=f(y)$ $(x,y\in \mathbb{N})$. То есть нам нужно найти пары x, y такие, $(4\le x\le 28,\ 4\le y\le 28,\ x,y\in\mathbb{N})$, что $f(x)=f(y)$.

№5. после этого вычесть полученное кол-во из ~~то~~ числа всех пар. Всего пар — (x, y) — $C_{25}^2 + 25$. C_{25}^2 — кол-во пар x, y ~~[illegible]~~ где x и y разные, а 25 — когда x=y. Вспомним ~~нашу~~ ~~таблицу~~ наши наблюдения

F(X)	# X
0	9
1	8
2	3
3	2
4	2
5	1

~~$f(x)=f(y)=0$. таких пар x, y C_9^2~~

заметим, что если $x=y$, то $f(\frac{x}{y})=0=f(\frac{y}{x})$ и ~~так~~ такие пары нас не интересуют, поэтому договоримся считать что $x \neq y$.

пар $f(x)=f(y)=0$ ровно C_9^2. (нам не важно, пара (x; y) или (y; x) — среди двух таких не более одной отрицательно).

$f(x)=f(y)=1$ — C_8^2; $f(x)=f(y)=2$ C_3^2

$f(x)=f(y)=3$ или $f(x)=f(y)=4$ — C_2^2, а пар $F(x)=f(y)=5$ нет $(x \neq y)$. итак, из всего количества мы вычитаем полученные значения $C_{25}^2 + 25 - \underset{x=y}{25} - C_9^2 - C_8^2 - C_3^2 - C_2^2 - C_2^2 =$

$$= \frac{25\cdot24 - 9\cdot8 - 8\cdot7 - 3\cdot2 - 2\cdot1 - 2\cdot1}{2} = 300 - 36 - 28 - 3 - 1 - 1 =$$

$= 232$. — это пары чисел, что $f(\frac{x}{y}) \neq 0$.

а значит что среди чисел $f(\frac{x}{y})$ и $f(\frac{y}{x})$ ровно одно отрицательное => ровно 232 пары таких чисел, что $f(\frac{x}{y}) < 0$.

~~[illegible]~~ (когда я считал пары x; y меня не интересовал их порядок)

P.S. $f(\frac{x}{y})$ есть => $F(\frac{y}{x})$ тоже есть и пар $(x=a;\ y=b)$ $(y=a\ \ x=b)$ рассмотрев такие пары. x и y

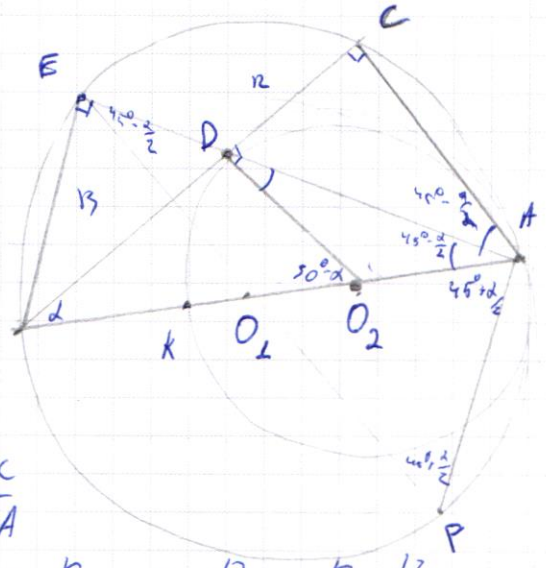
☐ черновик ☐ чистовик Страница № 2

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



N 4 K – ~~т~~ второе пересеч отрез AB с W.
O_1 и O_2 – центры Ω и ω соответственно.
$BD^2 = BK \cdot BA$ (степень точки B относит. W)
$13^2 = (2R - 2r) \cdot 2R$
$\angle BDO_2 = 90^\circ$ (касательн) $\angle BCA = 90^\circ$ (AB – диаметр) $\Rightarrow \triangle BDO_2 \sim \triangle BCA$ (общий угол B и угол 90° – подобные углы) $\Rightarrow \frac{BD}{BO_2} = \frac{BC}{BA}$
т.е. $\frac{BD}{2R-r} = \frac{BC}{2R}$ т.е. $\frac{13}{2R-r} = \frac{25}{2R}$; $\frac{13}{25} = \frac{2R-r}{2R} = 1 - \frac{r}{2R} = 1 - \frac{12}{25} \Rightarrow \frac{r}{2R} = \frac{12}{25} \Rightarrow$
$\Rightarrow r = \frac{24}{25}R \Rightarrow 13^2 = \left(2R - \frac{2\cdot 24}{25}R\right)\cdot R \cdot 2$ т.е. $13^2 = 4 \cdot R^2 \cdot \frac{1}{25} \Rightarrow$

$\boxed{R = \frac{13\cdot 5}{2} = \frac{65}{2}}$ $\boxed{r = \frac{24}{25}\cdot\frac{65}{2} = \frac{13\cdot 12}{5}}$ $\angle CBA = \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle DO_2B = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \angle DAO_2 = \angle ADO_2 = \frac{90^\circ - \alpha}{2}$ (углы равны, в сумме дают $90^\circ - \alpha$, поэтому каждый из них – $\frac{90^\circ-\alpha}{2}$. $\angle CAD = \angle O_2DA$ т.к. $O_2D \parallel AC$. $\angle EBA = 90^\circ - \angle EAB$ т.к. $\angle BEA = 90^\circ$, ~~[illegible]~~
$\angle EBA = 90^\circ - \frac{90^\circ - \alpha}{2} = \frac{90^\circ + \alpha}{2} = 45^\circ + \frac{\alpha}{2}$. $\angle AFE = \angle ABE$ (вписанные углы, опирающиеся на одну дугу равны) $= 45^\circ + \alpha$. $\angle AEF =$
$= 90^\circ - \angle EDB$ (т.к. $EF \perp BC$), $\angle E = 90^\circ - \angle EDB = 90^\circ - \angle CDA = \angle CAD$.
т.е. $\angle DEF = \angle DAC$. $\angle DEF + \angle EFA = \angle CAE + \angle EBA = \frac{90^\circ - \alpha}{2} + \frac{90^\circ + \alpha}{2} = 90^\circ \Rightarrow$
$\Rightarrow EF$ – диаметр, т.к. $\angle EAF = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.
$\sin\alpha = O_2D / O_2B = \frac{r}{2R - r} = \frac{13\cdot 12}{5\left(2\cdot\frac{65}{2} - \frac{13\cdot 12}{5}\right)} = \frac{13\cdot 12}{65\cdot 5 - 13\cdot 12} = \frac{12}{25 - 12} = \frac{12}{13}$.
$\sin(45^\circ + \alpha) = \sin\alpha \cdot \sin 45^\circ + \cos\alpha \cdot \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{12}{13} + \frac{5}{13}\right) = \frac{17}{13\sqrt{2}}$. $\Rightarrow$
$\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{12^2}{13^2}} = \sqrt{\frac{25}{13^2}} = \frac{5}{13}$

N4. $\Rightarrow AE = 2R\cdot\sin(45^\circ+\alpha)$, $AF = 2R\cdot\cos(45^\circ+\alpha)$.

$2S(AEF) = AE\cdot AF\cdot\sin\angle EAF = AE\cdot AF\cdot\sin 90^\circ = 2R\cdot\sin(45^\circ+\alpha)\cdot 2R\cdot\cos(45^\circ+\alpha)\cdot 1 =$

$= 4\cdot\frac{65}{2}\cdot\frac{65}{2}\cdot\frac{17}{13\sqrt{2}}\cdot\sqrt{1-\frac{17\cdot17}{13\cdot13\cdot2}} \Rightarrow S(AED) = \frac{65\cdot65\cdot17}{2\cdot13\cdot\sqrt{2}}\cdot\frac{7}{13\sqrt{2}} = \frac{65^2\cdot17\cdot7}{4\cdot13^2}$

$\left(\sqrt{1-\frac{17\cdot17}{13\cdot13\cdot2}} = \sqrt{\frac{13\cdot13\cdot2-17\cdot17}{13\cdot13\cdot2}} = \sqrt{\frac{338-289}{13\cdot13\cdot2}} = \sqrt{\frac{49}{13\cdot13\cdot2}} = \frac{7}{13\sqrt{2}}\right)$

Ответ: радиус большей окружности: $\frac{65}{2}$

радиус меньшей $\frac{13\cdot12}{5}$

угол AFE – $\arcsin\left(\frac{17}{13\sqrt{2}}\right)$

площадь $\triangle AEF$ – $\frac{65^2\cdot17\cdot7}{4\cdot13^2}$

N2 $\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} = \sqrt{(x-1)(y-6)} = (y-6)-6(x-1) \\ 9x^2-18x+y^2-12y=45 \Leftrightarrow 90 = 9x^2-18x+9+y^2-12y+36 = 9(x-1)^2+(y-6)^2 \end{cases}$

$x-1=a$, $y-6=b$. $\begin{cases} b-6a=\sqrt{ab} \Rightarrow b^2-12ab+36a^2=ab \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases}$

$b^2+b\cdot(-13a)+36a^2=0 \Rightarrow b=\frac{13a\pm\sqrt{13\cdot13a^2-4\cdot36a^2}}{2} = \frac{13a\pm5a}{2}$, $b=4a$, $b=9a$

$b=4a \Rightarrow 9a^2+16a^2=90 \Rightarrow a^2=\frac{90}{25}$ $a=\pm\frac{3}{5}\sqrt{10}$, $b=\pm\frac{12}{5}\sqrt{10}$

$\sqrt{ab}=\sqrt{\frac{3}{5}\cdot\frac{12}{5}\cdot10}$ и $\left[\right.$а и b одного знака – $\sqrt{ab}$ – определён.

$b=9a \Rightarrow 9a^2+81a^2=90 \Rightarrow a=\pm1$ $b=\pm9$, а и b одного знака, $\sqrt{ab}$ – опр.

$a=\pm\frac{3}{5}\sqrt{10}=x-1 \Rightarrow x=1\pm\frac{3}{5}\sqrt{10}$, $y=6\pm\frac{12}{5}\sqrt{10}$

$a=\pm1 \Rightarrow x-1=\pm1$ $x=1\pm1$ $y=6\pm9$

~~ответ: $x=1+\frac{3}{5}\sqrt{10}$; $b=6+\frac{12}{5}\sqrt{10}$; $x=1-\frac{3}{5}\sqrt{10}$; $b=6-\frac{12}{5}\sqrt{10}$~~

подходят пары $(x;y)$

$\left(1+\frac{3}{5}\sqrt{10};\ 6+\frac{12}{5}\sqrt{10}\right)$

$\left(1-\frac{3}{5}\sqrt{20};\ 6-\frac{12}{5}\sqrt{10}\right)$

$(2;\ 15)$

$(0;\ -3)$

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 4

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 $\log_5(26x-x^2)$ определён $\Rightarrow 26-x^2>0 \Rightarrow$

$|x^2-26x|^{\log_5 12} = (26x-x^2)^{\log_5 12}$. $\quad 26x-x^2=y \quad (y>0)$

$y^{\log_5 12} + y \geq 13^{\log_5 y} = (5^{\log_5 13})^{\log_5 y} = y^{\log_5 13}$ поделим на y, $y>0$

$y^{\log_5 \frac{12}{5}} + 1 \geq y^{\log_5 \frac{13}{5}}$. $\quad y^{\log_5\frac{13}{5}} - y^{\log_5\frac{12}{5}} \leq 1$. $\quad f(y) \leq 1$

возьмём производную

$\left(y^{\log_5\frac{13}{5}} - y^{\log_5\frac{12}{5}}\right)' = \log_5\frac{13}{5}\cdot y^{\log\frac{13}{25}} - \log_5\frac{12}{5}\, y^{\log\frac{12}{25}}$.

заметим, что $\log_5\frac{13}{5} > \log_5\frac{12}{5}$ и $y^{\log\frac{13}{25}} > y^{\log\frac{12}{25}}$ при $y>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ производная положительна при $y>0$, $\Rightarrow$ $f(y)$ – возрастает при $y\in(0;+\infty) \Rightarrow$ областью будут являться промежуток $(0; b]$ такой, что $b^{\log_5\frac{13}{5}} - b^{\log_5\frac{12}{5}} = 1$ (при $y<b$ значения меньше 1, а при $y>b$ значения больше). найдём b.

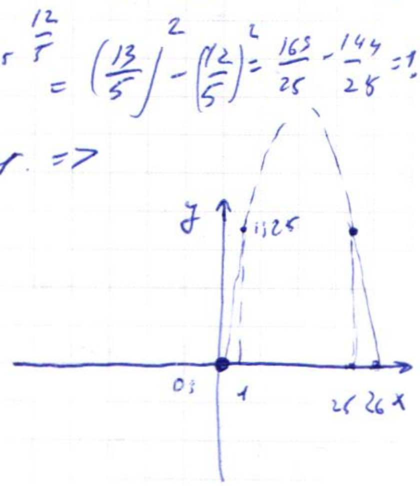
$25^{\log_5\frac{13}{5}} - 25^{\log_5\frac{12}{5}} = 5^{2\cdot\log_5\frac{13}{5}} - 5^{2\cdot\log_5\frac{12}{5}} = \left(\frac{13}{5}\right)^2 - \left(\frac{12}{5}\right)^2 = \frac{169}{25} - \frac{144}{25} = 1$

т.е. $b=25$. т.е. $y\in(0;25]$ подходит $\Rightarrow$

$26x - x^2 \in (0;25]$

$x\in(0;1]\cup[25;26)$

Ответ



☐ черновик ☑ чистовик

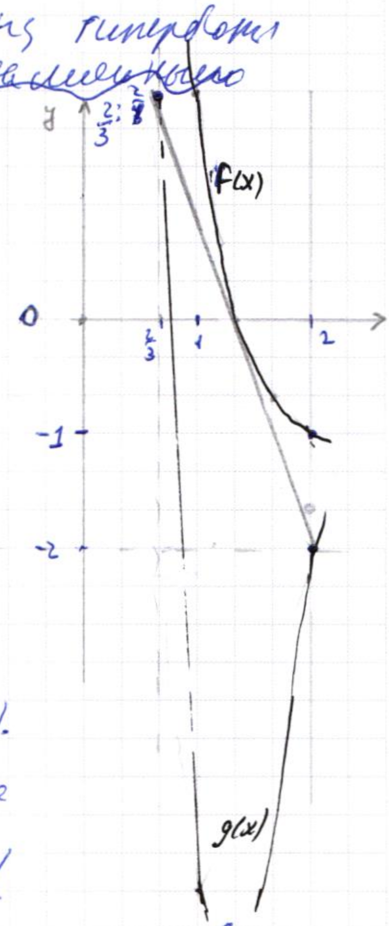
(Поставьте галочку в нужном поле)

№ 6 Решим задачу графически. Нарисуем график $18x^2-51x+28=g(x)$

и на $F(x)=\frac{8-6x}{3x-2}=-\frac{6x-4}{3x-2}+\frac{4}{3x-2}=\frac{4}{3x-2}-2$. — гипербола с асимптотами

$x=\frac{2}{3}$ и $y=-2$. т.е. является ~~параллельным~~ из гиперболы

$y=\frac{4}{3x}$ на вектор $(\frac{2}{3};-2)$. $18x^2$



нас интересует полоса между прямыми

$x=\frac{2}{3}$ и $x=2$.

x	2	2/3
F(x)	-1	не опр. (+∞)
g(x)	-2	2

$y=ax+b$ — прямая, которая на отрезке $\frac{2}{3};2$ обращается в отрезок (не вертикальна).

по условию, это отрезок должен быть ниже графика F(x) на этом отрезке, и выше g(x).

Заметим, что при $x=2$ $y=2a+b$, значения $y\in[-2;-1]$ (выше g(x), ниже F(x)) $2a+b\in[-2;-1]$

Проведём касательную к F(x) через т. $(\frac{2}{3};2)$ к правой ветви.

$F'(a)(x-a)+F(a)=y$ проходит через т. $\frac{2}{3};2$.

~~$(36a-51)(\frac{2}{3}-a)+18a^2-51a+28=2$, $-18a^2+24a-8=0$~~

~~$9a^2-12a+4=0$, $3a=2$~~

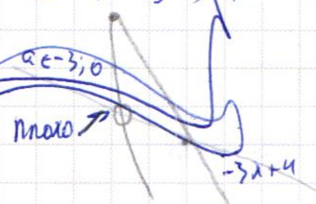
$F'(x)=\left(\frac{4}{3x-2}-2\right)'=4\left(\frac{1}{3x-2}\right)'=4\cdot3\cdot\frac{-1}{(3x-2)^2}=\frac{-12}{(3x-2)^2}$

$\frac{-12}{(3a-2)^2}\left(\frac{2}{3}-a\right)+\frac{4}{3a-2}-2=2$ $\quad \frac{4}{3a-2}+\frac{4}{3a-2}=4 \Rightarrow \frac{1}{3a-2}=\frac{1}{2}$

левая касательная — $x=\frac{2}{3}$ — асимптота. вторая же в той точке $a=\frac{4}{3}$. т.е. $x=\frac{4}{3}$

$F(\frac{4}{3})=\frac{4}{4/3\cdot 3-2}-2=\frac{4}{2}-2=0$. эта прямая проходит через точки $(\frac{2}{3};2);(\frac{4}{3};0)$

№6 (продол) а так эта прямая проходит через точку $(2;-2)$ и её уравнение $y=-3x+4$. - эта прямая подходит под условие, т.е. $\boxed{a=-3;\ b=4}$, ~~эксперимента~~ допустим, есть другие прямые, тогда если эта прямая проходит через точку $2;-2$, ~~то если~~ ~~они~~ ~~$a\to -3$~~ ~~$a\in(-3;0)$~~, то ~~эта прямая~~ ~~наверняк пересекает~~ ~~пару~~ ~~$f(x)$~~



~~на отрезке $(\frac{2}{3};2)$~~

~~если $a>0$ то прямая~~

ТО посмотрим, в какой точке эта прямая пересечет при $x=\frac{2}{3}$. если эта точка <2, то наша прямая лежит ниже $g(x)$, а если эта точка >2, то прямая ~~будет~~ ~~тоже~~ ~~будет~~ ~~выше~~ будет немного выше $f(x)$ на ~~некотором~~ некоторых интервалах от $\frac{2}{3};2$ (например, в т. $x=\frac{4}{3}$ прямая будет выше) => прямых, проходящих через точку $2;-2$ и подходящих под условие больше нет. Пусть тогда эта ~~прямая~~ прямая ~~пара~~ $(ax+b)$ пересекает прямую для $x=2$ в т. d $(d=2a+b\in(-2;-1])$. Опять же, ~~если~~ посмотрим, в какой точке ~~эта~~ $ax+b$ пересечет $\frac{2}{3}=x$. $\frac{2}{3}a+b$. если $\frac{2}{3}a+b<2$ то $a\frac{2}{3}+b<g(\frac{2}{3})$, а надо а должно быть больше, если $\frac{2}{3}a+b\geq2$, то посмотрим на $\frac{4}{3}a+b$. мы знаем, что $2a+b>-2$, $a\frac{2}{3}a+b\geq2$ => $\frac{2a+b+\frac{2}{3}a+b}{2}>2+(-2)=0$ т.е. $\frac{4}{3}a+b>0$ => $a\cdot\frac{4}{3}+b>f(\frac{4}{3})$, а должно быть меньше => если прямая ~~проходит~~ ~~пара~~ не проходит через $2;-2$, то она тоже не подходит (если $2a+b<2$, мы разбирали ранее)

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~N 1 $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \cos^2(2\alpha+2\beta) = \frac{16}{17}$~~

~~$\sin(2\alpha+4\beta) = \sin(2\alpha+2\beta)\cdot\sin 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta + \sin 2\alpha =$~~

~~$\sin 2\alpha =$~~

N 1 $\sin(2\alpha+2\beta) = \sin((\alpha+2\beta)+\alpha) = \sin(\alpha+2\beta)\sin\alpha + \cos(\alpha+2\beta)\cos\alpha.$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = 2\sin(\alpha+2\beta)\cos(\alpha+2\beta) + 2\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{7}{17}$

т.е. $\begin{cases} ab+cd = -\frac{1}{17} \\ ac+bd = -\frac{1}{\sqrt{17}} \end{cases}$ $a = \sin(\alpha+2\beta)$ $b = \cos(\alpha+2\beta)$ $c = \sin\alpha$ $d = \cos\alpha$

нам интересно $\frac{c}{d}$

$y-6x=\cancel{\sqrt{xy}}\sqrt{(x-1)(y-6)}$

$$\left[\begin{array}{l} b-6a=\sqrt{ab} \\ 9a^2+b^2=90 \end{array}\right.$$

$b^2 + \cancel{12ab} + 36a^2 = ab$

$13ab$

$b^2+36a^2=13ab$

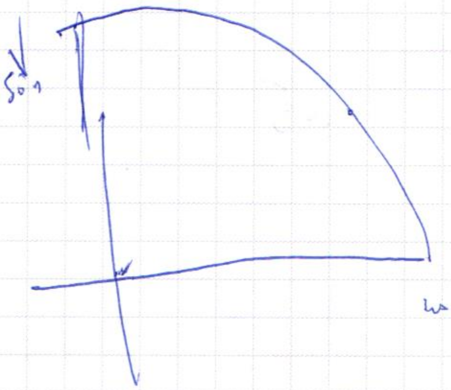
$b^2 - b\cdot 13a + 36a^2 = 0$

$b = \dfrac{13a \pm \sqrt{\cancel{36}\ 13\cdot 13a^2 - 36\cdot 4a^2}}{2} = \dfrac{13a \pm 5a}{2}$ $169-144$

$4a$ $16a^2+36a^2 = 13\cdot a\cdot 4a$

$81+36=13\cdot 9$

$117 \qquad 117$



$a \qquad b \qquad c \qquad d$

$\cancel{f}\ \sin(\alpha+2\beta)\ \cos(\alpha+2\beta)\ +\ \cancel{2}\sin\alpha\cos\alpha = -\dfrac{2}{17}$

$\sin\alpha+2\beta\ \sin\alpha + \cos\alpha+2\beta\ \cos\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{17}}$

$ab+cd=-\dfrac{1}{17}$

$ac+bd=\dfrac{1}{\sqrt{17}}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$26x - x^2 \geq 0$ $\quad x \in (0;26)$

$(26-x^2)^{\sqrt{\ }} + 26x \geq x^2 \cdot 13^{\sqrt{\ }}$

$13^{\log_5(26-x^2)} = 5^{(\log_5 13)\cdot\log_5(26x-x^2)} = (26x-x^2)^{\log_5 13}$

$y^{\log_5 12} + y - y^{\log_5 13} > 0$ 0.

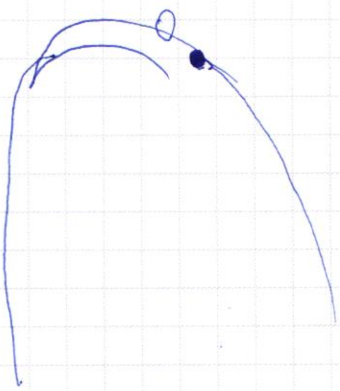
$1 + y^{\log}$

$5^{\log_5}$ $\quad \sqrt[5]{5}$ $\quad \sqrt[5]{5}$ $\quad \log_5 \frac{13}{5} =$

$\log_5 \frac{13}{5} = \log$

$\log_5 \frac{13}{5} = \log_{\sqrt[4]{5}}$

32^a $\quad 2^{\log_{32} 32}$



$b = 5^{\log x}$ $\quad 5^{x \cdot \log_5 \frac{13}{5}} =$

$\frac{13^2}{25} - \frac{12^2}{25}$ $\quad \left(\frac{13}{5}\right)^x - \left(\frac{12}{5}\right)^x = 1$

$18x^2 - 51x + 28$ $\quad \boxed{36x - 51}$ - угл. коэфф.

$F'(a)(x-a) + F(a) = y$

$\left(\frac{4}{3x-2}\right)' = -\frac{4}{(3x-2)^2} \cdot 3$ $\quad y = \frac{4}{3x-2} - 2$

$\frac{-3 \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{3}\right)}{2} + 2 - 2 = 2$

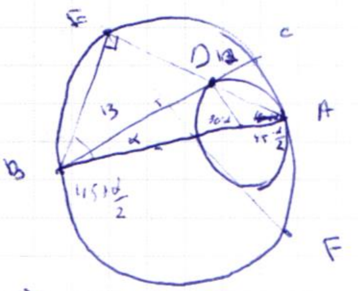
☑ черновик ☐ чистовик

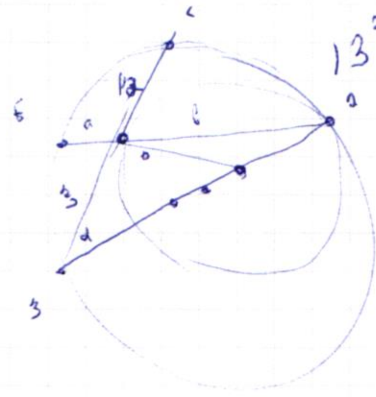
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$13^2 = 2R(2R-2r) = 4R(R-r)$

$$\frac{13}{2R-r} = \frac{25}{2R} \Rightarrow$$

$$\frac{2R}{25} = \frac{25}{2R} = \cos\alpha$$

$$\frac{2R}{2R-r} = \frac{25}{13} \Rightarrow 1 + \frac{r}{2R-r} = 1 + \frac{12}{13} \Rightarrow 13r = 12(2R-r)$$

$25r = 24R \quad r = \frac{24}{25}R$

$$13^2 = 4\cdot R\left(R - \frac{24}{25}R\right) = 4R^2\left(\frac{1}{25}\right) \Rightarrow R^2 = \frac{13\cdot 5}{2} = \frac{65}{2} \quad r = \frac{24}{25} = \frac{13\cdot 12}{5}$$

—

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$$\frac{\delta - 12}{4} = -1$$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -2\sin^2(2\alpha+2\beta)$

—

$f(ab) = f(a) + f(b)$ $\quad f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$ $\quad f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$f(3x) =$

3	0
5	1
7	1
11	2
13	3
17	4
19	4
23	5

$f(1) = 2f(1)$

$f(4) = 2f(2)$

$a\ f(x) = -f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) + f\left(\frac{y}{x}\right) = 0$

$f(2) = 0$

$f(4) = 2f(2) = 0$

$f(6) = 0$

$f(7) = 1$

$f(8) = 0$

$f(9) = 0$

$f(10) = 1$

$f(11) =$

$169\cdot 2 = 338 - 289 = 49$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = 0 \cdot f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$ $\quad f(y)$

$$\frac{8-6x}{3x-2} = -\frac{6x-4}{3x-2} + \frac{4}{3x-2} =$$

$$\frac{4}{3x-2} - 2$$

$$\frac{18}{9}\cdot 4 = 8 - 34 + 28 = 2$$

$3(x-4)(8x-7)$

$\frac{4}{3x-2}-2$

$51\cdot51-4\cdot18\cdot28$

$17\cdot17-4\cdot2\cdot28$

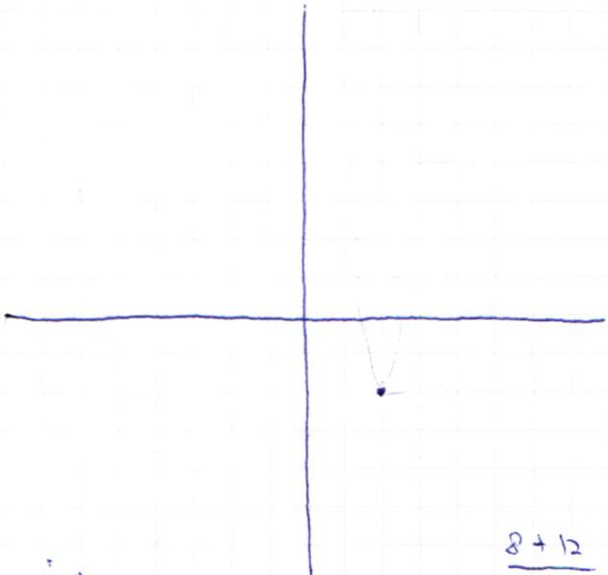
$\frac{51}{2\cdot18}=\frac{17}{12}$

$289-224=65$

$17\cdot17=289$ $\quad 28\cdot8=224$

$18\cdot4-51\cdot2+28$

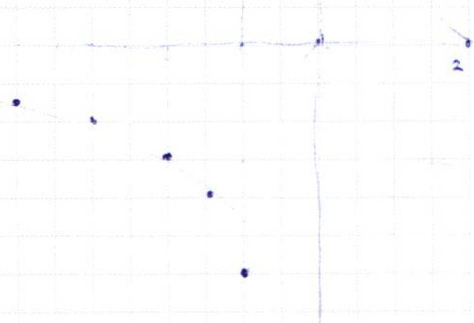
$72 \quad 102 \quad 28$



$\frac{4}{3x-2}$

$\frac{8+12}{-6-2} \qquad \frac{20}{-8}=-2{,}5$

$8\cdot1{,}5=12$



$y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}$

$9x^2+y^2-18x-12y=45$

$+6xy \qquad -6xy$

$(x \quad y)(x \quad y)$

$(9x^2-18x+9)+(y^2-12y+36)=90$

$(3x-3)^2+(y-6)^2=90$

$\sqrt{(x-1)(y-6)}=y-6x$

$9a^2+b^2=90$

$\sqrt{ab}=b-6a$

$9a^2+b^2=90$

$\sqrt{ab}=b-6a$

$ab=b^2+36a^2-12ab$

$13ab=b^2+36a^2=36a^2+90-9a^2$

$27a^2+90=13ab$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)