МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant \left|x^2 + 18x\right|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 24$, $1 \leqslant y \leqslant 24$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 - 30x - 17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

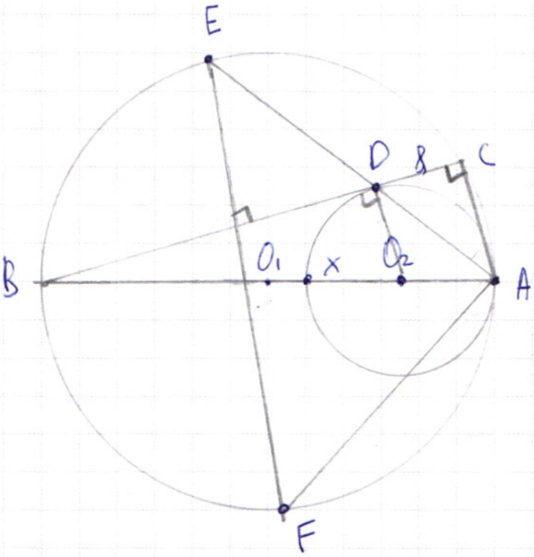
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

$R = ?$; $r = ?$

$\angle AFE = ?$; $S_{\triangle AEF} = ?$

$CD = 8$; $BD = 17$



$\triangle BAC \sim \triangle BO_2D$ по двум углам

$$\frac{BA}{BO_2} = \frac{BC}{BD}$$

$$\frac{2R}{2R-r} = \frac{17+8}{17}$$

$$34R = 50R - 25r$$

$$25r = 16R;$$

$$r = \frac{16}{25}R \quad (1)$$

Степень т. B относительно ω:

$$BD^2 = BX \cdot BA;$$

$$17^2 = (2R-2r)\cdot 2R$$

$$17^2 = 4\left(R - \frac{16}{25}R\right)\cdot R$$

$$17^2 = 4R^2 \cdot \frac{9}{25}$$

$$R^2 = \frac{17^2 \cdot 25}{9 \cdot 4} \qquad R = \frac{5\cdot 17}{2\cdot 3} = \frac{85}{6} \Rightarrow r = \frac{16}{25}\cdot\frac{85}{6} = \frac{136}{15}$$

По лемме Архимеда $\breve{BE} = \breve{EC} = \frac{1}{2}\breve{BC}$

$$\breve{BC} = \pi - \breve{AC} = \pi - 2\arccos\frac{BC}{BA} = \pi - 2\arccos\frac{15}{17}$$

$$\angle AFE = \frac{1}{2}\breve{AE} = \frac{1}{2}\left(\breve{AC} + \frac{1}{2}\breve{BC}\right) = \frac{1}{2}\left(2\arccos\frac{15}{17} + \frac{1}{2}\left(\pi - 2\arccos\frac{15}{17}\right)\right) =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{\arccos\frac{15}{17}}{4}$$

Ответ: $\angle AFE = \frac{\pi}{4} - \frac{\arccos\frac{15}{17}}{4}$; $R = \frac{85}{6}$; $r = \frac{136}{15}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$-\frac{4}{5} = \sin(2\alpha+4\beta) + \sin(2\alpha) = 2\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right) =$$

$$= 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = \left| \begin{matrix} \text{сделаем замену} \\ \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \end{matrix} \right| = 2\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)\cdot\cos 2\beta$$

Значит $\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5} \Rightarrow \sin(2\beta) = \pm\sqrt{1^2 - \left(\frac{2}{\sqrt5}\right)^2} = \pm\frac{1}{\sqrt5}$

I сл. Если $\sin(2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

то есть $\sin(2\alpha+2\beta) = \sin(2\beta)$

$$\left[\begin{array}{l} 2\alpha = 2\pi n, n\in Z \\ 2\alpha+2\beta+2\beta = \pi \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \alpha = \pi n, n\in Z \\ \alpha = \frac{\pi}{2} - 2\beta \end{array}\right.$$

Тогда либо $tg\,\alpha = 0$, либо $tg\,\alpha = ctg\,2\beta = -2$

II. Если $\sin(2\beta) = \frac{1}{\sqrt5}$

т.е $\sin(2\alpha+2\beta) = -\sin(2\beta)$

$$\left[\begin{array}{l} 2\alpha = 2\pi n + \pi, n\in Z \\ 2\alpha + 2\beta + 2\beta = 0; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \alpha = \pi n + \frac{\pi}{2}, \ tg\,\alpha \text{ — не сущ.} \\ \alpha = -2\beta \end{array}\right.$$

Значит. $tg\,\alpha = -tg(2\beta) = -\frac{1}{2}$ Ответ: $\{-\frac{1}{2}; -2; 0\}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x;$$

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2+18x \geq 13^{\log_{12}(x^2+18x)}$$

$$x^2+18x=t$$

$$5^{\log_{12}t} + t \geq 13^{\log_{12}t}$$

$$5^{\log_{12}t}+12^{\log_{12}t} \geq 13^{\log_{12}t}$$

$$5^p+12^p \geq 13^p$$

$$\left(\frac{5}{13}\right)^p + \left(\frac{12}{13}\right)^p \geq 1;$$

У $f(p)=\left(\frac{5}{13}\right)^p+\left(\frac{12}{13}\right)^p$ – убывающая ~~функция~~ как сумма убывающ ~~функций~~

В ур-нии: $\left(\frac{5}{13}\right)^p+\left(\frac{12}{13}\right)^p=1$ заметим, что $p=2$ - корень

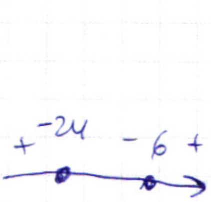
Больше корней нет в силу убывания функ-ции f

Тогда решением неравенства будет $p\leq 2$

т.е $\log_{12}t\leq 2$

т.е $0<t\leq 144$

$$\begin{cases} x^2+18x\leq 144 \\ x^2+18x>0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+18x-144\leq 0 \\ x^2+18x>0 \end{cases}$$



Ответ: $[-24;-18)\cup(0;6]$

№5

$f(ab) = f(a) + f(b)$

Расмотрим ~~$f(a^n) + f(b^n)$~~ $f(a^n) = f(a^{n-1}) + f(a) = f(a^{n-2}) + 2f(a) \ldots =$

$= n f(a)$

Теперь $f(a^{\frac{1}{n}}) = \dfrac{n f(a^{\frac{1}{n}})}{n} = \dfrac{f(a)}{n}$

Таким образом можно выносить за знак функции рациональные показатели

Пусть $a = b = 1$

$f(1) = f(1) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

Теперь для любых a и $b = \frac{1}{a}$

$f(a \cdot \frac{1}{a}) = f(a) + f(\frac{1}{a})$

$0 = f(a) + f(\frac{1}{a})$

$f(\frac{1}{a}) - f(a)$

Теперь легко посчитать значения для всех натуральных чисел ≤ 24

$f(1)=0$ $f(2)=0$ $f(3)=0$ $f(4)=0$ $f(5)=1$ $f(6)=0$ $f(7)=1$ $f(8)=0$

$f(9)=0$ $f(10)=1$ $f(11)=2$ $f(12)=0$ $f(13)=3$ $f(14)=1$ $f(15)=1$ $f(16)=0$

~~$f(17)=2$~~ ~~4~~ $f(17)=4$ $f(18)=0$ $f(19)=4$ $f(20)=1$ $f(21)=1$ $f(22)=2$ $f(23)=5$

$f(24)=0$

Среди них 11 значений 0
7 значений 1
2 знач. 2
1 знач. 3
2 знач. 4
1 знач. 5

Тогда всего пар $11(7+2+1+2+1)$
$+ 7(2+1+2+1) + 2(1+2+1) + 1(2+1) +$
$+ 2 = 198$

Ответ: 198

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6

$$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$$

$$f(x)=\frac{12x+11}{4x+3}=\frac{12x+9+2}{4x-3}=3+\frac{2}{4x+3}$$ – гипербола

$$=3+\frac{2}{4(x+\frac{3}{4})}=3+\frac{1}{2(x+\frac{3}{4})}$$

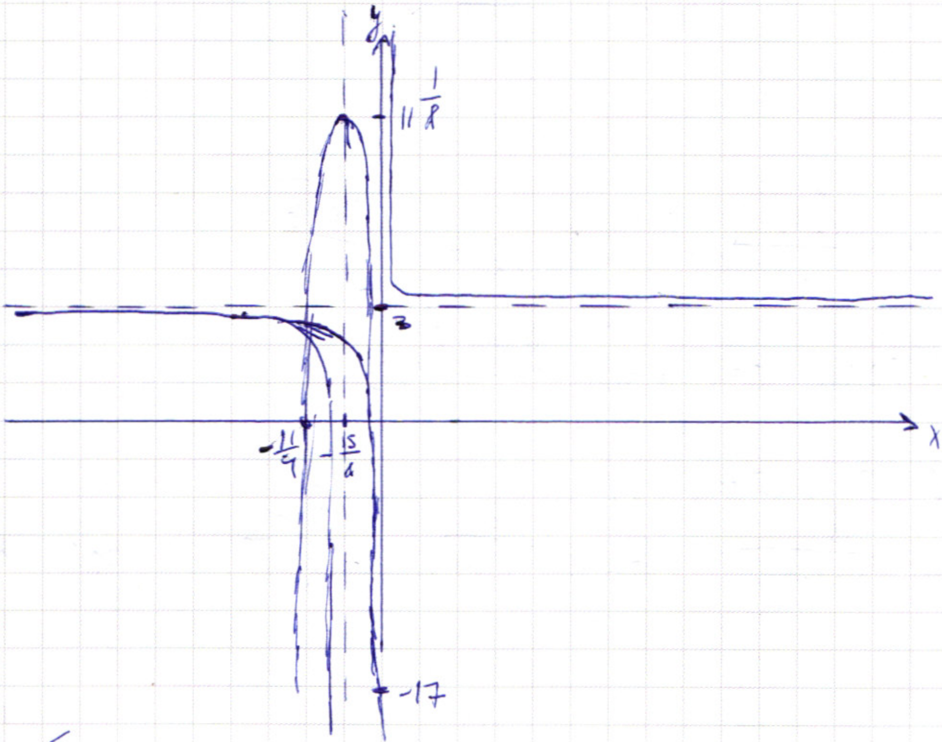
$$g(x)=-8x^2-30x-17 \qquad x_0=\frac{30}{-16}=-\frac{15}{8}$$

$$y_0=-8\left(-\frac{15}{8}\right)^2+30\cdot\frac{15}{8}-17=-\frac{225}{8}+\frac{225}{4}-$$

$$-\frac{8}{17}=\frac{-225+450-136}{8}=\frac{89}{8}=11\frac{1}{8}$$

$$g\left(-\frac{3}{4}\right)=-8\cdot\frac{9}{16}+30\cdot\frac{3}{4}-$$
$$-17=-\frac{9}{2}+\frac{45}{2}-17=$$
$$=1$$

$$g\left(-\frac{11}{4}\right)=-8\cdot\frac{121}{16}+30\cdot\frac{11}{4}-$$
$$17=-\frac{121}{2}+\frac{165}{2}-$$
$$-17=\frac{10}{2}=5.$$



Графически пол.

прямая $y=ax+b$ проходит через т. $\left(-\frac{11}{4};5\right)$ и касается гиперболы

$y = 3 + \frac{2}{4x+3}$

$y' = \frac{2 \cdot 4}{(4x+3)^2} = \frac{-8}{(4x+3)^2}$

$y_{кас} = 3 + \frac{2}{4x_0+3} - \frac{8}{(4x+3)^2}(x - x_0)$ – проходит через т. $\left(-\frac{11}{4}; 5\right)$

Составим систему:

$$\begin{cases} 3 + \frac{2}{4x_0+3} - \frac{8}{(4x_0+3)^2} \cdot \left(-\frac{11}{4} - x_0\right) = 5; \ (1) \\ 3 + \frac{2}{4x_0+3} - \frac{8}{(4x_0+3)^2}(x - x_0) = ax + b \end{cases}$$

$\cancel{3\left(+\frac{2}{4x_0+3}\right)}$

$\frac{1}{4x_0+3} - \frac{4\left(-\frac{11}{4} - x_0\right)}{(4x_0+3)^2} - (4x_0+3)^2 = 0$

$4x_0 + 3 + 11 + 4x_0 - 16x_0^2 - 24x_0 + 9 = 0$

$8x_0^2 + 8x_0 - 1 = 0$

$D = 64 + 4 \cdot 8 = 96$

$x_0 = \frac{-8 - 4\sqrt{6}}{16} = \frac{-2-\sqrt{6}}{4}$ – уд. т.к. $x_0 < 0$

$x_0 = \frac{-8 + 4\sqrt{6}}{16}$ – неуд.

$a_{гр} = -\frac{8}{(4x_0+3)^2}$

$b_{гр} = 3 + \frac{2}{4x_0+3} + \frac{8x_0}{(4x_0+3)^2}$, где $x_0 = -\frac{2+\sqrt{6}}{4}$

$a \in (a_{гр}; 0)$ если $a = 0$, то $b \in (3; 5)$

Ответ: при $a = 0$, $b \in (3; 5)$

при $a = -\frac{8}{(4x_0+3)^2}$, $b = 3 + \frac{2}{4x_0+3} + \frac{8x_0}{(4x_0+3)^2}$, где $x_0 = \frac{-2-\sqrt{6}}{4}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №6 (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}; \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \quad * \end{cases}$$

@: $x-2y\geq 0$; $y\leq \frac{x}{2}$

$xy-x-2y+2\geq 0$

$x(y-1)-2(y-1)\geq 0$

$(y-1)(x-2)\geq 0$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geq 2\\ y\geq 1\end{cases}\\ \begin{cases}x\leq 2\\ y\leq 1\end{cases}\end{array}\right.$$

с учётом @:

$$\begin{cases}(x-2y)^2=xy-x-2y+2, \# \\ x^2+9y^2-4x-18y=12;\end{cases}$$

#: $x^2-\cancel{4y}4xy+4y^2=yx-x-2y+2$

$x^2-5yx+4y^2+2y-2=0$;

$x^2-(5y-1)x+4y^2+2y-2=0$

$D=(5y-1)^2-4(4y^2+2y-2)=25y^2-10y+1-16y^2-8y+8=9y^2-18y+9=$
$=(3y-3)^2$

$x_1=\frac{5y-1+3y-3}{2}=4y-2$

$x_2=\frac{5y-1-3y+3}{2}=y+1$

1ый) $x=4y-2$, подст в *:

$(4y-2)^2+9y^2-4(4y-2)-18y=12$;

$16y^2-16y+4+9y^2-16y+8-18y-12=0$;

$25y^2-50y=0$

$$\left[\begin{array}{l}y=0\\ y=2\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=0\\ x=-2\end{cases} - \text{неуд @}\\ \begin{cases}y=2\\ x=6\end{cases} - \text{уд @}\end{array}\right.$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

2ш) $x=y+1$

$(y+1)^2+9y^2-4(y+1)-18y-12=0;$

$y^2+2y+1+9y^2-4y-4-18y-12=0;$

$10y^2-20y-15=0$

$2y^2-4y-3=0$

$y=\frac{2\pm\sqrt{10}}{2} \Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{10}}{2}+1$

а) $y=\frac{2+\sqrt{10}}{2}$

$x=\frac{2+\sqrt{10}}{2}+1$

$\frac{2+\sqrt{10}}{2} \overset{>}{\vee} \frac{2+\sqrt{10}}{2}+\frac{1}{2}$, т.е неуд ⓐ

$4+2\sqrt{10} \overset{>}{\vee} 2+\sqrt{10}+2$

$4+\sqrt{10} \overset{>}{\vee} 4$

б) $y=\frac{2-\sqrt{10}}{2} \Rightarrow x=\frac{2-\sqrt{10}}{2}+1$

$\frac{2-\sqrt{10}}{2} \overset{<}{\vee} \frac{2-\sqrt{10}}{4}+\frac{1}{2};$

$4-2\sqrt{10} \overset{<}{\vee} 2-\sqrt{10}+2$

$-2\sqrt{10} \overset{<}{\vee} -\sqrt{10}$

$\frac{2-\sqrt{10}}{2} \overset{<}{\vee} 1$

$2-\sqrt{10} \overset{<}{\vee} 2$

$-\sqrt{10} \overset{<}{\vee} 0$

$\frac{2-\sqrt{10}}{2}+1 \overset{<}{\vee} 2$

$\frac{2-\sqrt{10}}{2} \overset{<}{\vee} 1$

т.е уд. ⓐ

Ответ: $\{(\frac{2-\sqrt{10}}{2}+1; \frac{2-\sqrt{10}}{2}); (0;2)\}$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}; \end{cases}$$

$tg\alpha = ?$

$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta$

$\sin(2\alpha+4\beta) \overset{+\sin 2\alpha}{=} \sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta + \sin 2\alpha$

$\sin 2\alpha(\cos 4\beta + 1)$

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

$x^2-4x+4+9y^2-18y+9=25$

$(x-2)^2+(3y-3)^2=5^2$

$xy-x-2y+2\geq 0$

$(x-2y)^2 = xy-x-2y+2;$

$x^2-4xy+4y^2-xy+x+2y-2=0;$

$x^2-5xy+4y^2+2y+x-2=0;$

$x(x-5y)+2y(y+1)+x-2$

$(x-2y)^2-xy+x+2y-2=0$

$(x-2y)^2-xy+x-2y+4y-2=0$

$(x-2y)(x-2y+1)-xy+4y-2$

$(x-2y)(x-2y+1)-y(x-4y)-2$

~~$\sin(2\alpha+2\beta)=$~~

$\log_{\beta} 5^{\log_{\beta 2}(x^2+18x)}$ =

$\frac{8\cdot 19}{5\cdot 3}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\log_a x^{\log_a b} = \log_a b \cdot \log x$

№3

$x^2+18x>0$ по ОДЗ

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13} - 18x$

$\log_{12}(5^{\log_{12}(x^2+18x)}) + \log_{12}x^2 \geq \log_{12}(x^2+18x)^{\log_{12}13} - \log_{12}18x$

$\log_{12}(x^2+18x)\log_{12}5 + \log_{12}x^2 \geq \log_{12}13\,\log_{12}(x^2+18x) - \log_{12}18x$

$\log_{12}(x^2+18x)(\log_{12}5 - \log_{12}13) + \log_{12}x^2 + \log_{12}18x \geq 0;$

$\log_{12}$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} - (x^2+18x)^{\log_{12}13} \geq -(x^2+18x)$

$\log_{12}\left(5^{\log_{12}(x^2+18x)} - (x^2+18x)^{\log_{12}13}\right) \geq \log_{12} -(x^2+18x)$

№2 №5 $f(ab) = f(a)+f(b)$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$ p-простое

$p(3) = \left[\frac{3}{4}\right]$

$p(5) = \left[\frac{5}{4}\right] = 1$

$p(9) = \left[\frac{9}{4}\right] = 2$

$p(11) = \left[\frac{11}{4}\right] = 2$ $\quad p(13) = \left[\frac{13}{4}\right] = 3$

$p(5)+p(9) = p(45) = 1$

$1 \leq x \leq 24$

$1 \leq y \leq 24$

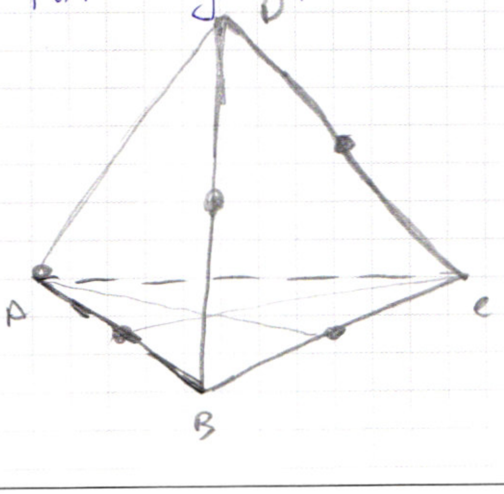
$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$f\left(\frac{1}{7}\right) = 1$

$f\left(\frac{1}{2}\right)$

$f\left(\frac{1}{3}\right)$

$f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f($



AB=1

BD=2 ; CP=3

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12; \end{cases}$$

$x-2y\geq 0$

$y\leq \frac{x}{2}$

$xy-x-2y+2\geq 0$

$x(y-1)-2(y-1)\geq 0$

$(y-1)(x-2)\geq 0$

$$\left[\begin{cases} x\geq 2 \\ y\geq 1 \end{cases}\right. \qquad \left[\begin{cases} y\leq 1 \\ x\leq 2 \end{cases}\right.$$

$$\begin{cases} (x-2y)^2=xy-x-2y+2 \quad (*) \\ x^2-4x+4+9y^2-18y+9=25 \quad (\#) \end{cases}$$

$*:\ x^2-4xy+4y^2=yx-x-2y+2;$

$x^2-5yx+4y^2+2y-2=0$

$x^2+(-5y+1)x+4y^2+2y-2=0$

~~$x=-(-5y+1)\pm$~~

$D=(5y-1)^2-4(4y^2+2y-2)=25y^2-10y+1-16y^2-8y+8$

$=9y^2-18y+9=(3y-3)^2$

$x_1=\frac{5y-1+3y-3}{2}=4y-2$ т.е

$x_2=\frac{5y-1-3y+3}{2}=y+1$

~~$\left[\begin{array}{l} y=\frac{x-2}{4} \\ y=x+2 \end{array}\right.$~~

~~$\#:\ (x-2)^2+(3y-3)^2=5^2$~~

(ш) ~~$x=4y+2$~~

~~$(4y+2)^2+9y^2-4(4y+2)-18y=12$~~

~~$16y^2+16+4+9y^2-16y-8-18y-12=0;$~~

~~$25y^2-34y=0$~~

~~$y(25y-34)=0$~~

~~$\left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=\frac{34}{25} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=0 \\ x=2 \end{cases} \text{ – луд} \\ y=\frac{34}{25} \end{array}\right.$~~

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

1ш) $x = 4y+1$

$\cancel{(4y-1)^2 + 9y^2 - 4(4y-1) - 18y - 12 = 0;}$

$\cancel{16y^2 - 8y + 1 + 9y^2 - 16y + 4 - 18y - 12 = 0;}$

$\cancel{25y^2 - 34y - 7 = 0}$

$\cancel{25y^2 - 42y - 7 = 0}$

$D = 42^2 + 4\cdot 7\cdot 25 = 7^2 \cdot 6^2 + 4\cdot 7\cdot 25 = 7\cdot 4(7\cdot 3^2 + 25) = 28(63+25)$

$\times\frac{42}{42}$ ... 84, 168, 1764

88

$\frac{63 + 25}{88}$

2ш) $x = y-2$

$(y-2)^2 + 9y^2 - 4(y-2) - 18y - 12 = 0;$

$y^2 - 4y + 4 + 9y^2 - 4y + 8 - 18y - 12 = 0;$

$10y^2 - 8y - 26y = 0$

$y(10y - 26) = 0$

$\left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = \frac{26}{10} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 0 \\ x = -2 \end{cases} \text{- неуд} \\ \begin{cases} y = \frac{26}{10} \\ x = \frac{6}{10} \end{cases} \text{- неуд.} \end{array}\right.$

~~№5~~

~~$D(f)$~~

$f(ab) = \cancel{f(a) + f(b)}$

1ш) $x = 4y+1$

$(4y+1)^2 + 9y^2 - 4(4y+1) - 18y - 12$

$16y^2 + 8y + 1 + 9y^2 - 16y - 4 - 18y - 12 = 0;$

$25y^2 - 26y - 15 = 0$

$y_{1,2} = \frac{13 \pm 4\sqrt{34}}{25} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y_1 = \frac{13-4\sqrt{34}}{25} \\ x = 1 + \frac{4(13-4\sqrt{34})}{25} \end{cases} \\ \begin{cases} y = \frac{13+4\sqrt{34}}{25} \\ x = 1 + \frac{4(13+4\sqrt{34})}{25} \end{cases} \end{array}\right.$

$1 + \frac{4(13-4\sqrt{34})}{25} \vee 2$

$\frac{4(13-4\sqrt{34})}{25} \vee 1$

$13 - 4\sqrt{34} \vee \frac{25}{4}$

$-4\sqrt{34} \vee \frac{25-13\cdot 4}{4}$

$-\sqrt{34} \vee \frac{25-13\cdot 4}{16}$

$\sqrt{34} \wedge \frac{27}{16}$

$34 \wedge \frac{27^2}{16^2}$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№2

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, (*) \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-2y)^2=xy-x-2y+2, \\ (x-2)^2+(3y-3)^2=5^2 \end{cases}$$

$*$: $x-2y\geq 0$

$y\leq \frac{x}{2}$

$xy-x-2y+2\geq 0$

$y(x-2)-(x-2)\geq 0$

$(y-1)(x-2)\geq 0$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y\geq 1 \\ x\geq 2 \end{cases} \\ \begin{cases} y\leq 1 \\ x\leq 2 \end{cases} \end{array}\right.$$

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$-\frac{4}{5}=\sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha)=2\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right)$$

$$=2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta$$

$$=2\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)\cos 2\beta$$

Значит $\cos 2\beta=\frac{2}{\sqrt5}$

$$\sin(2\beta)=\pm\sqrt{1^2-\left(\frac{2}{\sqrt5}\right)^2}=\pm\frac{1}{\sqrt5}$$

I. если $\sin(2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$

то есть $\sin(2\alpha+2\beta)=\sin(2\beta)$

$$\left[\begin{array}{l} 2\alpha=2\pi n,\ n\in\mathbb{Z} \\ 2\alpha+2\beta+2\beta=\pi \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \alpha=\pi n,\ n\in\mathbb{Z} \\ \alpha=\frac{\pi}{2}-2\beta \end{array}\right.$$

Тогда либо $\operatorname{tg}\alpha=0$, либо $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{ctg}2\beta=-2$

II. если $\sin(2\beta)=\frac{1}{\sqrt5}$

т.е $\sin(2\alpha+2\beta)=-\sin(2\beta)$

$$\left[\begin{array}{l} 2\alpha=2\pi n+\pi,\ n\in\mathbb{Z} \\ 2\alpha+2\beta+2\beta=0 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \alpha=\pi n+\frac{\pi}{2} - \operatorname{tg}\alpha - \text{не сущ.} \\ \alpha=-2\beta \end{array}\right.$$

Значит. $\operatorname{tg}\alpha=-\operatorname{tg}(2\beta)=-\frac{1}{2}$ Ответ $\{-\frac{1}{2}; -2; 0\}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17;$

$x \in \left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$ $\qquad -\frac{11}{4} = -2\frac{3}{4}$

$x \in \left[-2\frac{3}{4}; -\frac{3}{4}\right)$

при $x = \cancel{-11}$ $x=-2$

$\frac{-24+11}{-8+3} \le \cancel{ax+b}\ {-2a+b} \le \cancel{-8x^2}\ -8\cdot 4+30\cdot 2-17;$

$\frac{-13}{-5} \le -2a+b \le -32-17+60$

$\frac{13}{5} \le -2a+b \le 60-49$

$2\frac{3}{5} \le -2a+b \le 11$

при $x=-1$:

$\frac{-12+11}{-4+3} \le -a+b \le -8+30-17;$

$1 \le -a+b \le 5$

$1\frac{3}{5} \le -a \le 6$

$-1\frac{3}{5} \ge a \ge -6$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1ш) $x = 4y-2$

$(4y-2)^2 + 9y^2 - 4(4y-2) - 18y = 12;$

$16y^2 - 16y + 4 + 9y^2 - 16y + 8 - 18y - 12 = 0;$

$25y^2 - 50y = 0$

$25y(y-2) = 0 \qquad \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=0 \\ x=-2 \end{cases} - \text{неуд} \\ \begin{cases} y=2 \\ x=6 \end{cases} - \text{уд} \end{array}\right.$

2ш) $\cancel{y=}\ x = y+1$

$(y+1)^2 + 9y^2 - 4(y+1) - 18y - 12 = 0;$

$y^2 + 2y + 1 + 9y^2 - 4y - 4 - 18y - 12 = 0;$

$10y^2 - 20y - 15 = 0$ $\qquad y = \frac{2 \pm \sqrt{10}}{2}$

$2y^2 - 4y - 3 = 0$

2.1) $y = \frac{2+\sqrt{10}}{2} \Rightarrow x = \frac{2+\sqrt{10}}{2} + 1$

$\frac{2+\sqrt{10}}{2} \overset{>}{\vee} 1 \Rightarrow \frac{2+\sqrt{10}}{2} + 1 > 2$

$2+\sqrt{10} \overset{>}{\vee} 2$

$\sqrt{10} \overset{>}{\vee} 0$

$\frac{2+\sqrt{10}}{2} \overset{>}{\vee} \frac{2+\sqrt{10}}{4} + \frac{1}{2}$, т.е неуд.

$4 + 2\sqrt{10} \overset{>}{\vee} 2 + \sqrt{10} + 2$

$4 + \sqrt{10} \overset{>}{\vee} 4 + \cancel{\sqrt{10}}$