МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} & (1) \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 & (2) \end{cases}$$

$(1) \Leftrightarrow 9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2 \quad , \quad 3y-2x \geq 0$

$9y^2-15xy+4x^2+2x+3y-2=0$

$4x^2+x(2-15y)+9y^2+3y-2=0$

$D=4-60y+225y^2-144y^2-48y+32=$

$=81y^2-108y+36=(9y-6)^2$

$$x=\frac{15y-2\pm(9y-6)}{8} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=3y-1 \\ x=\frac{3y+2}{4} \end{array}\right.$$

(2) $3x^2+3y^2-6x-4y=4$

I случай: $x=3y-1$: $3(3y-1)^2+3y^2-6(3y-1)-4y=4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3(9y^2-6y+1)+3y^2-18y+6-4y-4=0$

$30y^2-40y+5=0 \Leftrightarrow 6y^2-8y+1=0$

$\frac{D}{4}=16-6=10$

$y=\frac{4\pm\sqrt{10}}{6} \Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=\frac{4+\sqrt{10}}{6} \\ x=\frac{3(4+\sqrt{10})}{6}-1=\frac{4+\sqrt{10}-2}{2}=\frac{2+\sqrt{10}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} y=\frac{4-\sqrt{10}}{6} \\ x=\frac{4-\sqrt{10}}{2}-1=\frac{2-\sqrt{10}}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

II случай: $x = \frac{3y+2}{4}$

$$(2) \Leftrightarrow 3\left(\frac{3y+2}{4}\right)^2 + 3y^2 - \overset{3}{\cancel{6}}\left(\frac{3y+2}{2\cancel{4}}\right) - 4y - 4 = 0$$

$$\frac{3(9y^2+4+12y)}{16} + 3y^2 - \frac{3(3y+2)}{2} - 4y - 4 = 0 \quad \Big| \cdot 16$$

$$27y^2 + \underline{36y} + 12 + 48y^2 \underline{- 24(3y+2)} \underline{- 64y} - 64 = 0$$

$$75y^2 - 100y - 100 = 0$$

$$3y^2 - 4y - 4 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 4 + 12 = 16$$

$$y = \frac{2 \pm 4}{3} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 2 \\ y = -\frac{2}{3} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 2 \\ x = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} y = -\frac{2}{3} \\ x = 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Учтём ~~ОДЗ~~ ~~задачи~~ ограничение: $3y - 2x \geq 0$

① $\begin{cases} x = \frac{2+\sqrt{10}}{2} \\ y = \frac{4+\sqrt{10}}{6} \end{cases}$ $\quad 3y - 2x = \frac{4+\sqrt{10}}{2} + \frac{-4-\sqrt{10}\cdot 2}{2} = \frac{-\sqrt{10}}{2} < 0$ $\quad -$

② $\begin{cases} x = \frac{2-\sqrt{10}}{2} \\ y = \frac{4-\sqrt{10}}{6} \end{cases}$ $\quad 3y - 2x = \frac{4-\sqrt{10}}{2} + \frac{-4+2\sqrt{10}}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2} > 0$ $\quad +$

③ $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$ $\quad 3y - 2x = 6 - 4 = 2 > 0$ $\quad +$

④ $\begin{cases} y = -\frac{2}{3} \\ x = 0 \end{cases}$ $\quad 3y - 2x = -2 - 0 < 0$ $\quad -$

Ответ: $\left\{\left(\frac{2-\sqrt{10}}{2}; \frac{4-\sqrt{10}}{6}\right); (2;2)\right\}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+x^2+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}$

Замена: $t = x^2+6x$, $t>0$ по ОДЗ

$3^{\log_4 t}+t \geq t^{\log_4 5} \Leftrightarrow$

$3^{\log_4 t}+4^{\log_4 t} \geq 5^{\log_4 t}$

Замена: $a = \log_4 t$:

(1) $3^a+4^a \geq 5^a \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^a+\left(\frac{4}{5}\right)^a \geq 1$

т.к. $f(a)=\left(\frac{3}{5}\right)^a+\left(\frac{4}{5}\right)^a$ убывает на R как сумма убывающих ф-й, то решением нер-а будут все $a \leq a_0$, где $f(a_0)=1$: $a_0=2$, подставим:

$\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}+\frac{16}{25}=1$ (+)

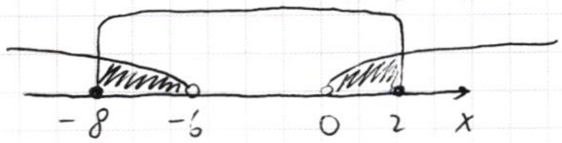
$\Rightarrow$ (1) $\Leftrightarrow a \leq 2$

Вернёмся к t:

$\log_4 t \leq 2 \Leftrightarrow 0<t\leq 16$

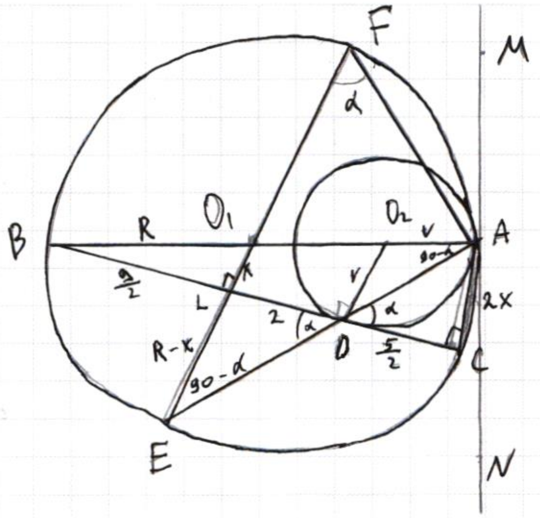
Вернёмся к x:

$\begin{cases} x^2+6x>0 \\ x^2+6x\leq 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+6)>0 \\ x^2+6x-16\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+6)>0 \\ (x-2)(x+8)\leq 0 \end{cases}$



Итог: $x \in [-8;-6) \cup (0;2]$

Ответ: $[-8;-6) \cup (0;2]$



№4

① Пусть $\angle AFE = \alpha \Rightarrow$ если MN - общ. кас-ая к Ω и ω, то $\angle NAH = \alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow$ т.к. $O_2A \perp MN$, то $\angle O_2AD = \angle O_2DA = 90 - \alpha$

② O_2D ~~[illegible]~~ $\perp BC$ (D - т. касания) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \triangle EDL$: $\angle LDE = \alpha$ и $\angle DEL = 90 - \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow$ из $\triangle EAF$: $\angle EAF = 90^\circ \Rightarrow EF$ - диаметр $\Rightarrow O_1 \in EF$

③ Пусть $O_1L = x$, а $L = m$

По условию $BD = \frac{13}{2} \Rightarrow BL = \frac{13}{2} - m$; $DC = \frac{5}{2} \Rightarrow LC = \frac{5}{2} + m$

$O_1L \perp BC$
$O_2B \perp BC$
$AC \perp BC$ $\Rightarrow O_1L \parallel O_2D \parallel AC$, тогда т.к. $O_1B = O_1A$, то O_1L - ср. линия $\triangle BAC \Rightarrow AC = 2 \cdot O_1L = 2x$, а

$BL = LC \Leftrightarrow \frac{13}{2} - m = \frac{5}{2} + m \Rightarrow$ ~~[illegible]~~ $DL = 2$; $BL = \frac{9}{2}$ $DC = \frac{5}{2}$

④ $LE = R - x$, тогда $\triangle LDE \sim \triangle ADC$ по острому углу $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{R-x}{2x} = \frac{2}{\frac{5}{2}} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow 8x = 5R - 5x \Leftrightarrow x = \frac{5R}{13}$

⑤ из $\triangle BO_1L$ (прямоуг): $BL^2 + LO_1^2 = BO_1^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{81}{4} + \frac{25R^2}{169} = R^2 \Leftrightarrow \frac{144}{169}R^2 = \frac{81}{4} \Leftrightarrow R^2 = \frac{81}{4} \cdot \frac{169}{144} \Rightarrow$

$\Rightarrow R = \frac{9 \cdot 13}{2 \cdot 12} =$ ~~[illegible]~~ $\frac{117}{24} = \boxed{\frac{39}{8}}$

⑥ $LE = R - x = R - \frac{5R}{13} = \frac{8R}{13} = \frac{8 \cdot \frac{117}{24}}{13} = 3$, тогда

$tg\,\alpha = \frac{R-x}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \underline{\alpha = arctg\,\frac{3}{2}} = \angle AFE$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Продолжение №4

7) $\triangle AO_2D \sim \triangle AO_1E \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{AD}{AE} \Leftrightarrow \frac{R}{r} = \frac{AD+DE}{AD} = 1 + \frac{DE}{AD} =$

$= 1 + \frac{2}{\frac{5}{2}} = 1 + \frac{4}{5} = \frac{9}{5} \Rightarrow r = \frac{5R}{9} = \frac{5 \cdot \frac{39}{8}}{9} =$

$= \frac{5 \cdot 13}{8 \cdot 3} = \boxed{\frac{65}{24}}$

8) $tg\,\alpha = \frac{3}{2} \Rightarrow$ пусть $AE = 3n$, $AF = 2n$, тогда из прямоуг $\triangle FAE$, где $FE = 2 \cdot R = \frac{39}{4}$:

$9n^2 + 4n^2 = \left(\frac{39}{4}\right)^2 \Leftrightarrow \cancel{13} \cdot n^2 = \frac{13^2 \cdot 9}{16} \Rightarrow n = \frac{3\sqrt{13}}{4} \Rightarrow$

$S_{AEF} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot AF = \frac{1}{2} \cdot 3n \cdot 2n = 3n^2 = 3 \cdot \frac{13 \cdot 9}{16} =$

$= \boxed{\frac{351}{16}}$

Ответ: $R = \frac{39}{8}$; $r = \frac{65}{24}$; $\angle AFE = arctg\,\frac{3}{2}$;

$S_{AEF} = \frac{351}{16}$

№6

$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2 - 34x + 30$

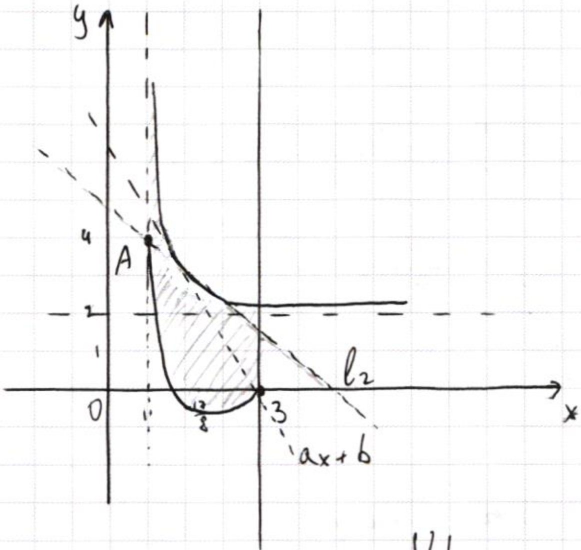
$2 + \frac{1}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2 - 34x + 30$

Рассмотрим $f(x) = 8x^2 - 34x + 30$ – парабола ветвями ↑

$x_в = \frac{17}{4}$ Нули: $x = 3$ $x = \frac{5}{4}$ $f(1) = 4$ $f(3) = 0$

Рассмотрим $g(x) = 2 + \frac{1}{2x-2}$ – гипербола с асимптотами: $y = 2$ и $x = 1$

Построим схематично $g(x)$ и $f(x)$:



Штрихом показана область для $ax+b$, удовлетворяющая условию

~~I Погранич...~~ для $\forall b$ нам подходят a от случая, когда прямая проходит через $(1;4)$ до случая касания с параболой:

$$ax+b = 8x^2 - 34x + 30 \Leftrightarrow 8x^2 - 34x - ax + 30 - b = 0$$

$$D = 34^2 + a^2 + 68a - 32\cdot 30 + 32b = 0 \Leftrightarrow$$

$$1156 + a^2 + 68a + 32b = a^2 + 68a + 196 + 32b = 0$$

$$\Downarrow \quad b = \frac{-a^2 - 68a - 196}{32}$$

через $1;4$: $a + b = 4 \Rightarrow b = 4 - a$

Пограничный случай: l_2: l_2 проходит через $A(1;4)$ и касается $f(x)$: $b = 4 - a = \frac{-a^2-68a-196}{32} \Leftrightarrow 128 - 32a = -a^2 - 68a - 196 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2 + 36a + 324 = 0 \Leftrightarrow \underline{a = -18 \quad b = 22}$, тогда

из ~~полученных значений делаем вывод, что реализуется не случай~~ при $x = 3$: $-18 \cdot 3 + 22 < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow l_2$ пересекает параболу $\Rightarrow$ даже пограничный случай не реализуется $\Rightarrow ax+b$ – не прямая с наклоном $(a = 0)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Продолжение № 6

Итак, $ax+b$ - не прямая, ~~...~~ параллельна к оси O_x $\Rightarrow$ $a=0$, тогда $y=b$ - прямая $\parallel O_x$

Легко заметить, что на $x \in (1;3]$ не найдется ни одного значения для b, т.к. заштрихованная зона нигде не покрывает всю полосу $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ таких значений для b нет $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Не существует таких пар $(a;b)$, чтобы условие выполнялось

Ответ: $\varnothing$

№1

(1) $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

(2) $\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{8}{17} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{-2}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\beta = -\frac{8}{17} \Leftrightarrow \cos 2\beta = \frac{8}{17}\cdot\frac{\sqrt{17}}{2} = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$tg\,\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$

(1) $\left[\begin{array}{l}\sin 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} + \cos 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} + \cos 2\alpha\cdot\left(\frac{-1}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{17}}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1 \\ 4\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1\end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4\sin 2\alpha = -(1+\cos 2\alpha) \\ 4\sin 2\alpha = (\cos 2\alpha+1)-2\end{array}\right. \Leftrightarrow$ $\underline{tg\,\alpha = -\frac{1}{4}}$

Ответ: $-\frac{1}{4}$

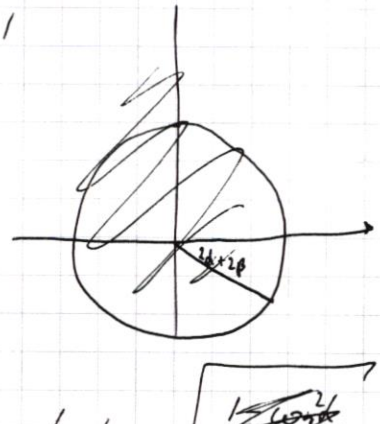
$$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = \overset{a}{\sin 2\alpha}\,(\overset{d}{2\cos^2 2\beta}) + \overset{b}{\cos 2\alpha}\cdot\overset{c}{\sin 4\beta} = -\frac{8}{17}$$

$$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\begin{cases} 2ad^2 + bc = -\frac{8}{17} \\ ad + bc = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ a^2+b^2 = 4 \\ c^2+d^2=1 \end{cases}$$

$$\sin 2\alpha\cos 2\beta - \frac{8}{17} - \sin 2\alpha\cdot 2\cos^2 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin 2\alpha\cos 2\beta\,(1-2\cos 2\beta) = \frac{8}{17}-\frac{1}{\sqrt{17}}$$



$$\begin{cases} tg\, 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}\cdot\cos 2\alpha} \\ tg\, 2\alpha\cdot 2\cos^2 2\beta + 2\sin 2\beta\cdot\cos 2\beta = -\frac{8}{17\cdot\cos 2\alpha} \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 196 \\ +128 \\ \hline 324 \end{array}$$

$$\cancel{tg(2\alpha)} = tg\,\alpha = \sqrt{\cancel{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}} \quad \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}} \quad 324 = 18^2$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times 18 \\ \hline 144 \\ 18 \\ \hline 324 \end{array}$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta) \qquad (a+18)^2$$

$$\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}} \quad \frac{-1}{\sqrt{17}} \qquad -18x+22$$

$$\frac{2}{\cos 2\alpha + 1}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

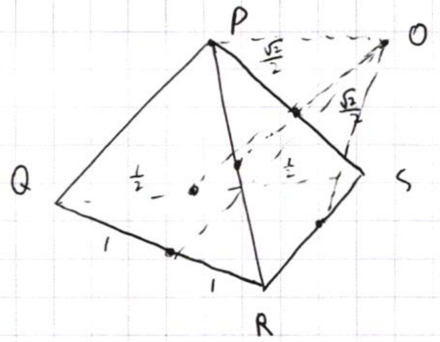
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

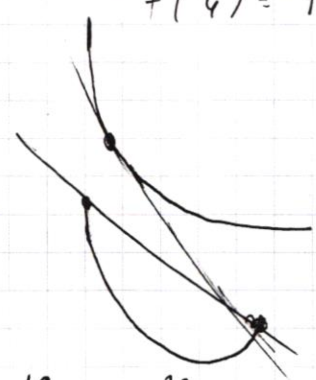
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$f\left(\frac{3}{4}\right) = f(3) + f\left(\frac{1}{4}\right)$

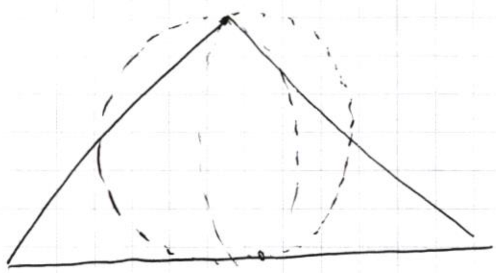


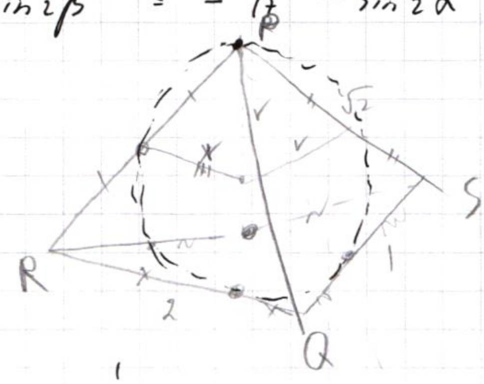
2 3 5 7 11 13 17 19 23

0 0 1 1 1 3 4 4 5

$tg\,\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} =$ $\quad \cos(2\alpha+2\beta) = \frac{4}{\sqrt{17}} \quad \cos(2\alpha+2\beta) = -\frac{4}{\sqrt{17}}$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\beta + \frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\beta = -\frac{8}{17} - \sin 2\alpha$





$ax + b =$ ~~...~~

$3a + b = 0$

34×34: 136, 102, 1156

$32 \times 30 = 960$

$1156 - 960 = 196$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$8-34+30=4$ $\quad f(3) = 72-102+30=0$

$\frac{4x-3}{2x-2} \ge ax+b \ge 8x^2-34x+30$ выполн. для всех x на промежутке $(1;3]$

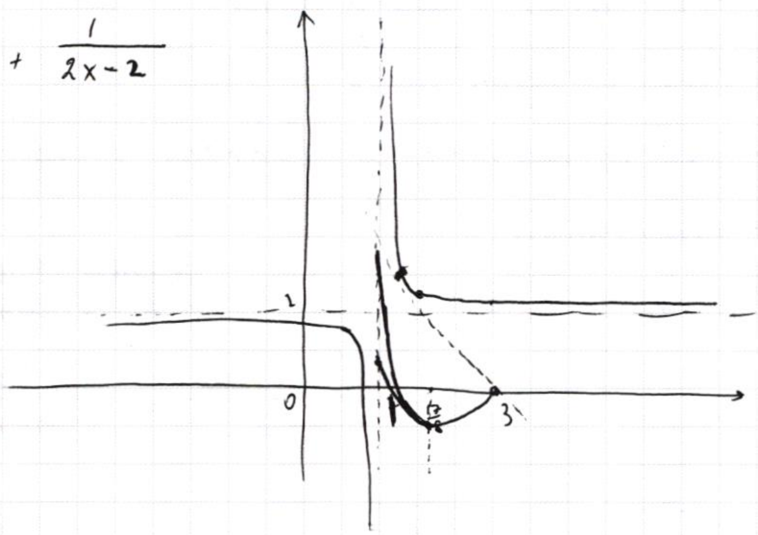
$x_в = \frac{34}{16} = \frac{17}{8}$

$f\left(\frac{17}{8}\right) = 8\cdot\frac{17^2}{8^2} - 34\cdot\frac{17}{8} + 30$

3 и $\frac{10}{8} = \frac{5}{4}$

$2 + \frac{1}{2x-2}$

$8x^2$



$8x^2-34x+30 \le ax+b \Leftrightarrow 8x^2-34x-ax+30-b \le 0$

$D = (a+34)^2 - 32(30-b)$

$\frac{4x-3}{2x-2} \ge ax+b \Leftrightarrow \frac{4x-3-(ax+b)(2x-2)}{2x-2} = \frac{4x-3-2ax^2+2ax-2bx+2b}{\underbrace{2x-2}_{\ge 0}} \ge 0$

$\Rightarrow -2ax^2+2ax+4x-2bx+2b-3 \ge 0$

$-2ax^2+2x(a+2-b)+2b-3 \ge 0$

$\frac{D}{4} = a^2+4+b^2+4a-4b-2ab+4ab-6a =$

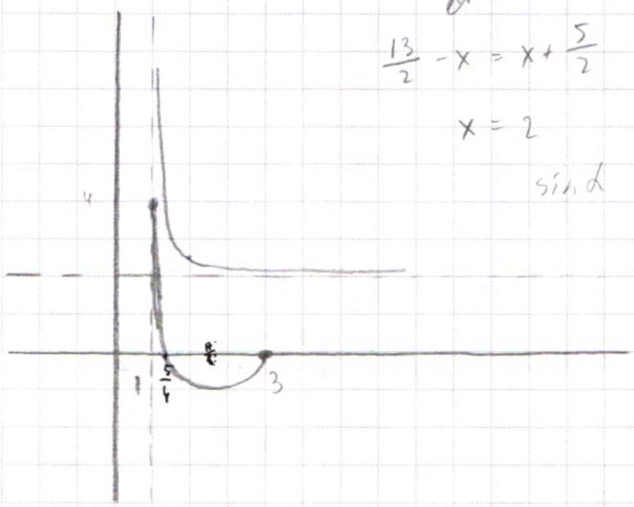
$= a^2+4+b^2-2a-4b+2ab$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$f(x)\ 8x^2-34x+30$

$x_b = \frac{34}{16} = \frac{17}{8}$

$\frac{13}{2} - x = x + \frac{5}{2}$

$x = 2$

$\sin\alpha$

$\frac{D}{4} = 289 - 240 = 49$

$x = \frac{17 \pm 7}{8}$ $\left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = \frac{5}{4} \end{array}\right.$

15 8 17

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$|\cos(2\alpha+2\beta)| = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta+2\beta) = \sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\cdot\sin 2\beta + \sin 2\alpha =$

$= \cancel{-\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\beta + \frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}}$

$\sin 2\alpha + \sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 4\beta = \frac{-8}{\sqrt{17}}$

$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$

Пусть $\sin 2\alpha = a$

$\cos 2\alpha = b$

$\begin{cases} a + a\cdot\cos 4\beta + b\sin 4\beta = -\frac{8}{17} \\ a\cos 2\beta + b\sin 2\beta = \frac{-1}{\sqrt{17}} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\frac{a}{1+b}$ — !

$\cos 2\beta = m \quad \cos 4\beta = 2m^2 - 1$

$\sin 2\beta = n \quad \sin 4\beta = 2mn$

$\begin{cases} a + a(2m^2-1) + b\cdot 2mn = \frac{-8}{17} \\ am + bn = \frac{-1}{\sqrt{17}} \\ a^2+b^2 = 1 \\ m^2+n^2 = 1 \end{cases}$

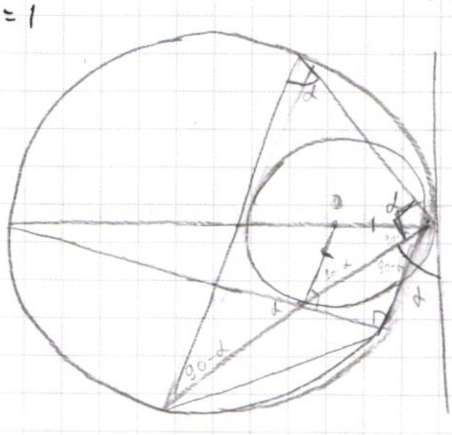
$\frac{R-x}{2x} = \frac{4}{5}$

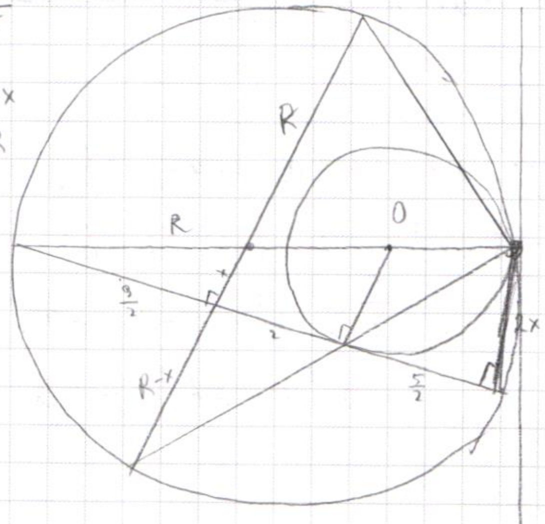
$5R - 5x = 8x$

$13x = 5R$

$x = \frac{5R}{13}$

$30 + 27 = 117$





$27 \times 13 = 351$

$\frac{81}{4} + \frac{25R^2}{169} = R^2 \Leftrightarrow \frac{81}{4} = \frac{144}{169}R^2 \Leftrightarrow R^2 = \frac{81\cdot169}{4\cdot144} \quad R = \frac{9\cdot13}{2\cdot12} = \frac{107}{24}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

№3

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$$

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+x^2+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}$$

Замена $t = x^2+6x > 0$ по ОДЗ

$$3^{\log_4 t} + t \geq t^{\log_4 5}$$

$$3^{\log_4 t} + t \geq 5^{\log_4 t}$$

$\cancel{3^{\log_4 t} - 5^{\log_4 t} \geq -t}$

$$t = 4^{\log_4 t}$$

$$3^{\log_4 t} + 4^{\overbrace{\log_4 t}^{a}} \geq 5^{\log_4 t}$$

$$3^a + 4^a \geq 5^a \quad \Big| : 5^a$$

$$\underbrace{\left(\frac{3}{5}\right)^a + \left(\frac{4}{5}\right)^a}_{\downarrow\downarrow} \geq 1 \qquad a \leq 2$$

$$2^{\log_4 16} = 4$$

$$16^{\log_4 2} = 4$$

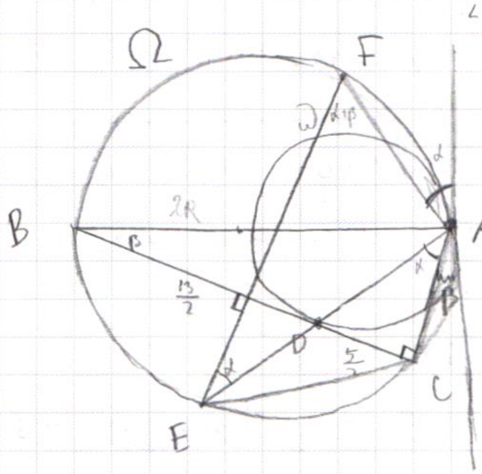
$$t^{\log_4 5} = 5^{\log_4 t}$$

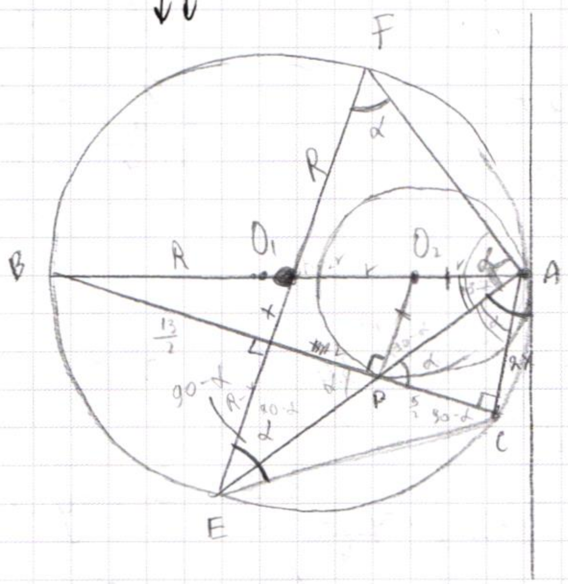
FE

$\angle$ ~~AEF~~

R, r — ?

S_{AEF}





$CD = \frac{5}{2}$

$BD = \frac{13}{2}$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

$f(1) = f(1) + f(1) = 0$

$f(2) = \cancel{f(1)+f(2)}\ \left[\frac{2}{4}\right] = 0$

$f(3) = 0$

$f(4) = f(2) + f(2) = 0$

$f(5) = 1 \quad f(6) = 0$

$f(7) = 1 \quad f(8) = 0$

$f(9) = 0 \quad f(10) = 1$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x\cdot\frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = f(2) + f\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow f\left(\frac{2}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$f(2) = f\left(\frac{1}{2}\right) + f(2) =$$

$\frac{3}{3} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{3}{6}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta+2\beta) = \sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta$

4

$\begin{cases} 3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y-4=0 \end{cases}$

$3x^2-6x+3y^2-4y-4=0$

$\frac{D}{4} = 9 \cancel{+3y^2 \, 24y+4} - 3\cdot(3y^2-4y-4) = 9-9y^2+12y+12 =$

$= 21-9y^2+12y$

$\cancel{3y-2x = \sqrt{3xy-3y+2x-4x+2}}$

$9y^2-12xy+4x^2 = 3xy-2x-3y+2$

$9y^2-15xy+4x^2+2x+3y-2=0$

$16 \times 9 = 144$

$225-144 = 81$

$4x^2+x(2-15y)+9y^2+3y-2=0$

$\cancel{D} = 4+225y^2-60y-16\cdot 9y^2-16\cdot 3y+16\cdot 2 =$

$= 81y^2-108y+36 = (9y-6)^2$

$\frac{(3y-1)4}{4} + \frac{3y+2}{4} = \frac{15y-2}{4}$

$\frac{24y-8}{8} = 3y-1$

$\frac{6y+4}{8} = \frac{3y+2}{4}$

$24\cdot 3 = 72$

$-36-64=-100$

$12-\overset{-36}{48}-64 = -(-36-64)$

$3xy-2x-3y+2 \geq 0 \Leftrightarrow x(3y-2)+2-3y \geq 0 \Leftrightarrow$

$(3y-2)(x-1)\geq 0$

$(x+8)(x-2)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)