МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1 ШИФР ________________

Заполняется ответственным секретарём

1. **[3 балла]** Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg} \alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. **[4 балла]** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

3. **[5 баллов]** Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant \left|x^2 + 18x\right|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

4. **[5 баллов]** Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

5. **[5 баллов]** Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 24$, $1 \leqslant y \leqslant 24$ и $f(x/y) < 0$.

6. **[5 баллов]** Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 - 30x - 17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

7. **[6 баллов]** Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

③ $5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$

ОДЗ: $x^2+18x>0 \to x(x+18)>0$

$-18 \quad 0 \quad x$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2+18x \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}$

$t = x^2+18x>0$ (ОДЗ) $\to |t| = t$

$2^3 \vee 2^2$

$(2-1)(3-2)>0$

$5^{\log_{12} t} + t \geq t^{\log_{12}13}$

$t^{\log_{12}5} + t \geq t^{\log_{12}13}$

$t^{\log_{12}5} + t^{\log_{12}12} \geq t^{\log_{12}13}$

~~$t^a > 0 \to$ можно сократить~~

~~$1+\log_{12}7 \geq \log$~~

~~$1+t^{\log_{12}7} \geq t^{\log_{12}8}$~~

~~$t^{\log_{12}8} - t^{\log_{12}7} \geq 1$~~

~~$t^{\log_{12}7}$~~

$1+t^{\log_{12}12-\log_{12}5} \geq t^{\log_{12}13-\log_{12}5}$

$1+t^{\log_{12}2{,}4} \geq t^{\log_{12}2{,}6}$

$t^{\log_{12}2{,}6} - t^{\log_{12}2{,}4} \leq 1$

$(t-1)(\log_{12}2{,}6 - \log_{12}2{,}4) \leq 1$

$(t-1)\cdot\log_{12}\frac{26}{24} \leq 1$

$(t-1)\cdot\log_{12}\frac{13}{12} \leq 1$

~~$(t-1)$~~ $t-1 \leq \log_{12}\frac{12}{13}$

$t-1 \leq 1-\log_{12}13$

$t \leq \underbrace{2-\log_{12}13}_{>0}$

$x^2+18x \leq 2-\log_{12}13$

$x^2+18x-2+\log_{12}13 \leq 0$

$D = 4\cdot(81+2-\log_{12}13) = 4(83-\log_{12}13)$

$x = \frac{-18 \pm 2\sqrt{83-\log_{12}13}}{2} = -9 \pm \sqrt{83-\log_{12}13}$

• $-9+\sqrt{83-\log_{12}13} \vee 0$

$83-\log_{12}13 \vee 81$

$2-\log_{12}13 > 0 \to x_1>0$

• $-9-\sqrt{83-\log_{12}13} \vee -18$

$-\sqrt{83-\log_{12}13} \vee -9$

$\sqrt{} \wedge 9$

$83-\log_{12}13 \wedge 81$

$2-\log_{12}13 > 0 \to -9-\sqrt{\ldots} < -18$

$\Rightarrow x \in$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Черновик

$y(x-2)-(x-2)=(x-2)(y-1)$

(2) $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \quad (*) \end{cases}$

$(*)$ $(x-2)^2+9(y-1)^2=12+\overset{13}{4+9}=25$

$a=x-2$, $b=y-1$ ↳ $a^2+9b^2=25$

~~$x\geq 2y$~~

~~$x^2+4xy+4y^2=xy-x-2y+2$~~

$a-2b=x-2-2y+2=x-2y$

$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$

$a^2-4ab+4b^2=ab$

$a^2-5ab+4b^2=0$

$(a-b)(a-4b)=0$

$\left[\begin{array}{l} a=b \to b^2+9b^2=25 \to 10b^2=25 \to b^2=\frac{5}{2} \to b=\pm\sqrt{\frac{5}{2}} \\ a=4b \to 16b^2+9b^2=25 \to b=\pm 1 \end{array}\right.$

• $b=\frac{\sqrt5}{2}=a \to$ $a-2b=-\frac{\sqrt5}{2}<0\to\varnothing$

• $b=-\frac{\sqrt5}{2}=a \to -\frac{\sqrt5}{2}-\left(-2\frac{\sqrt5}{2}\right)=\frac{\sqrt5}{2}$ ✓

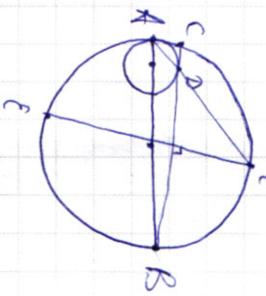
$\begin{cases} x-2=-\frac{\sqrt5}{2} \\ y-1=-\frac{\sqrt5}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x=2-\frac{\sqrt5}{2} \\ y=1-\frac{\sqrt5}{2} \end{cases}$

• $b=1 \to a=4$: $4-2=\sqrt{4\cdot 1}$ ✓

$\begin{cases} x-2=4 \\ y-1=1 \end{cases} \to \begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases}$

• $b=-1 \to a=-4$: $-4-2(-1)<0\to\varnothing$

Ответ: $(2-\frac{\sqrt5}{2}; 1-\dots$



$CD=8$
$BD=17$
$R_1-?$
$R_2-?$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Черновик

$CD=8$ $R_1-?$ $\angle AFE-?$
$BD=17$ $R_2-?$ $S_{AEF}-?$

$\sin\angle AFE = \frac{AE}{EF}$

$\left.\begin{matrix}AC\perp BC\\ OD\perp BC\end{matrix}\right\} \to \frac{CD}{BD}=\frac{AO}{OB}$

$\frac{8}{17}=\frac{R_1}{2R_2-R_1}$

$16R_2-8R_1=17R_1 \to 16R_2=25R_1$

$R_1=\frac{16}{25}R_2$

$\triangle OBD$: $BD^2+R_1^2=OB^2$

$17^2+R_1^2=(2R_2-R_1)^2$

$289+\cancel{R_1^2}=4R_2^2-4R_1R_2+\cancel{R_1^2}$

$R_1=\frac{16}{25}R_2 \to 289=4x^2-4x^2\cdot\frac{16}{25}$ $1\cdot 25$

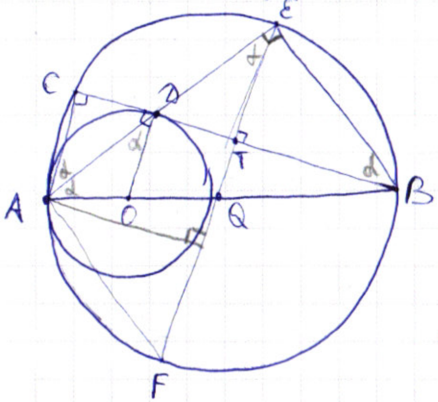
$17^2\cdot5^2=4x^2(25-16)=4x^2\cdot3^2$

$x^2=\left(\frac{17\cdot5}{2\cdot3}\right)^2 \to x=\frac{17\cdot5}{6}=R_2=\frac{85}{6}$

$\to R_1=\frac{16}{25}\cdot\frac{17\cdot5}{6}=\frac{8\cdot17}{5\cdot3}=\frac{136}{15}$

$80+56=136$

$\begin{array}{r}36\\ \times25\\ \hline 180\\ 72\\ \hline 900\end{array}$



$\frac{85}{3}=28\frac{1}{3}$

$\cup CE=\cup AF=\cup EB$

$BC=8+17=25$

$\frac{17^2\cdot25}{36}-\frac{4\cdot25^2}{4}=$

$=\frac{17^2\cdot25}{36}-25^2=$ $25\cdot\left(\frac{17^2}{36}-25\right)=25\cdot289$

$\begin{array}{r}125\\ \times17\\ \hline 875\\ 125\\ \hline 2125\end{array}$ $2125 : 12 = 177$, -12, 92, -84, 85, -84, 1

$h=12{,}5$

$R=$

$R^2-h^2=\frac{17^2\cdot25}{36}-\frac{25^2}{4}=\frac{25}{4}\left(\frac{17^2}{9}-25\right)=$

$=\frac{25}{4}\left(\frac{17}{3}-5\right)\left(\frac{17}{3}+5\right)=$

$=\frac{25}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{32}{3}=\frac{25\cdot64}{4\cdot9}=\left(\frac{5\cdot8}{2\cdot3}\right)^2=\left(\frac{40}{6}\right)^2=\left(\frac{20}{3}\right)^2$

$b^4-4b^2R^2+4h^2R^2=0$

$D=16R^4-16h^2R^2=R^2(R^2-h^2)16$

$b=\frac{4R^2\pm4R\sqrt{\ }}{2}=2R^2\pm2R\sqrt{\ }$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$\frac{22}{4} = \frac{11}{2} = 5{,}5$ $\quad 2\frac{3}{4} = \frac{11}{4}$ $\quad \frac{3}{2} + 1 = 2{,}5$ $\quad \frac{29}{8} = 3\frac{5}{8}$ $\quad 18+5=23$ $\quad \frac{15}{8}a + \frac{23}{8}$

$a = -1 \to 23 - 15 = 8$

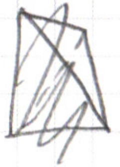
$f(ab) = f(a) + f(b)$, $f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

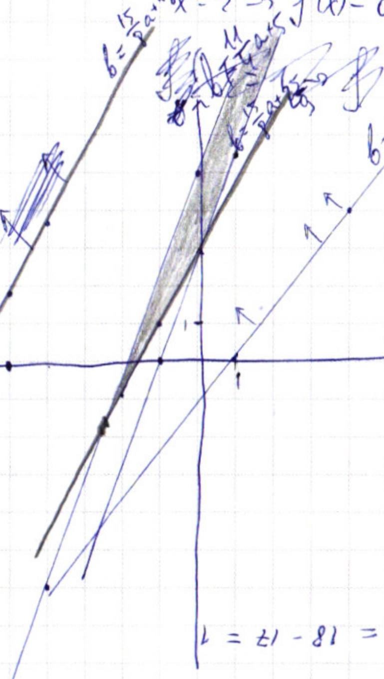
$x \in [1;24]$
$y \in [1;24]$, $x, y \in \mathbb{N}$

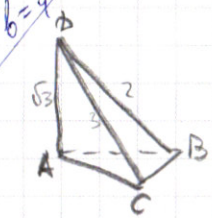
$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$; $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$x = 2 \to f(x) = 0$

$f(1) = f\left(\frac{2}{2}\right) = \dots f\left(\frac{24}{24}\right)$







$AB = 1$
$AC = \sqrt{6}$
$BC = \sqrt{7}$

$\frac{15}{8}a + \frac{89}{8}$

$89 - 60 = 29$

~~$89 - 6 \cdot 15 = 1$~~

$89 - 75 = 14$

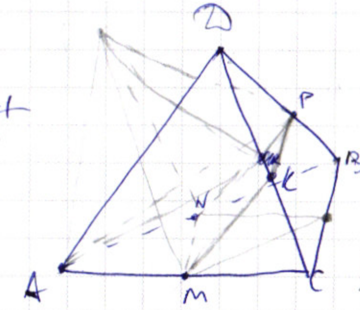
$\frac{14}{8} = \frac{7}{4}$

$a = -5$

$-8 \cdot \frac{225}{64} + 30 \cdot \frac{15}{8} - 17 =$

$= -\frac{225}{8} + \frac{450}{8} - 17 = \frac{225}{8} - 17 = \frac{25+88}{8} = 14\frac{1}{8}$

$BC^2 =$



$AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$

$BC - ?$

$\frac{-30+23}{8} = -\frac{7}{8}$

$DK = KC = 1{,}5$

$DP = PB = 0{,}5$

$\frac{AD}{2} = KM = NP$ (ср. л. в $\triangle ADC$ и $\triangle ADB$)

$\frac{BC}{2} = NM = KP$ (ср. л. в $\triangle ABC$ и $\triangle DBC$)

$\to MNPK$ — $\square$

$MNPK$ — вписан $\to \angle M + \angle P = 180^\circ$
$\angle N + \angle K = 180^\circ$ } $\angle M = \angle \dots = 90^\circ \to$

Но в $\square$ ...

$\to MNPK$ — $\square$

$63 \cdot 2 = 126$ $\quad 176 - 126 = 50$

$\frac{12x+11}{4x+3} \leq ax + b \leq -8x^2 - 30x - 17$, $x \in \left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right]$

$3 + \frac{2}{4x+3} \leq ax + b \leq$

$x = -\frac{11}{4} \to 3 + \frac{2}{-11+3} = 3 + \frac{2}{-8} = 3 - \frac{1}{4} = 2\frac{3}{4}$

$x = -\frac{3}{4} \to 3 + \frac{2}{-3+3} \to -\infty$

$x = -\frac{7{,}5}{4} \to 3 + \frac{2}{-7{,}5+3} =$

$= 3 - \frac{2}{4{,}5} = 3 - \frac{4}{9} =$

$x = -\frac{3}{4} \to -a\frac{3}{4} + b \leq 1$

$-3a + 4b \leq 1$

$= 2\frac{5}{9}$

$x = -\frac{7{,}5}{4} \to 2\frac{5}{9} \leq -\frac{15}{8}a + b \leq 11\frac{1}{8}$

$x = -\frac{11}{4} \to 2\frac{3}{4} \leq -\frac{11}{4}a + b \leq 5$

$D = 900 - 32 \cdot 17 = 900 - 544 = 356$

$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{30}{-16} = -\frac{15}{8} = -\frac{7{,}5}{4} \in \left(-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$

$y_0 = -\frac{D}{4a} = \frac{356}{32} = \frac{320+36}{32} = \frac{352+4}{32} = 11\frac{1}{8}$

$|-11+7{,}5| = 3{,}5$
$|-7{,}5+3| = 4{,}5$ $\to$

$y\left(-\frac{11}{4}\right) = -8 \cdot \frac{121}{16} + 30 \cdot \frac{11}{4} - 17 = -\frac{121}{2} + 15 \cdot \frac{11}{2} - 17 =$

$= \frac{165-121}{2} - 17 = \frac{44}{2} - 17 = 22 - 17 = 5$

$y\left(-\frac{3}{4}\right) = -8 \cdot \frac{9}{16} + 30 \cdot \frac{3}{4} - 17 = -\frac{9}{2} + 15 \cdot \frac{3}{2} - 17 =$

$= \frac{45-9}{2} - 17 = \frac{36}{2} - 17 = 18 - 17 = 1$

$\to y \in \left[1; 11\frac{1}{8}\right]$

$176 : 4 = 44$

$63 \cdot 7 = 441$

$84 - 41 = 43$

$32 \cdot 17 = 224 + 32 = 544$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$ $\quad tg\,\alpha - ?$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right) = -\frac{4}{5}$

$2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)\cdot\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$

$\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5} \rightarrow \sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{4}{5}} = \pm\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

(1) $\sin 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5} + \cos 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5}$, $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$4\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1 = -1$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha + \cos^2\alpha = 0$

$\left[\begin{array}{l} \cos\alpha = 0 \rightarrow tg\,\alpha \text{ не сущ.} \rightarrow \cos\alpha \neq 0 \\ 2\sin\alpha + \cos\alpha = 0 \end{array}\right.$

(т.к. иначе $\sin\alpha = 0 \Rightarrow$ противоречие осн. триг. тожд-ву)

$\cos\alpha \neq 0 \rightarrow 2\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + 1 = 0 \rightarrow tg\,\alpha = -\frac{1}{2}$

(2) $\sin 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5} - \cos 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5}$, $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$.

$4\sin\alpha\cos\alpha - \cos 2\alpha = -1$

$4\sin\alpha\cos\alpha - (1-2\sin^2\alpha) = -1$

$2\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha = 0$

$\left[\begin{array}{l} \sin\alpha = 0 \rightarrow tg\,\alpha = 0 \text{ и } \cos\alpha = 1 \\ 2\cos\alpha + \sin\alpha = 0 \end{array}\right.$

$\cos\alpha \neq 0 \rightarrow 2 + tg\,\alpha = 0 \rightarrow tg\,\alpha = -2$

(иначе $2\cdot 0 + 1 = 0 \rightarrow 1 = 0$)

Ответ: $-\frac{1}{2}$; 0; -2.

② $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$

$\begin{cases} x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$

Пусть $a=x-2$, $b=y-1 \Rightarrow a-2b=x-2-2y+2=x-2y$. Тогда:

$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$

$a^2-4ab+4b^2=ab \rightarrow a^2-5ab+4b^2=0 \rightarrow (a-b)(a-4b)=0$

$\begin{cases} (a-b)(a-4b)=0 \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=b \\ a=4b \end{array}\right. \\ a^2+9b^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=b \\ b^2=\frac{5}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} a=4b \\ b^2=1 \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{ll} a=b=-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} & (1) \\ a=b=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} & (2) \\ \begin{cases} b=1 \\ a=4 \end{cases} & (3) \\ \begin{cases} b=-1 \\ a=-4 \end{cases} & (4) \end{array}\right.$

Проверка:

(1): $\left.\begin{array}{l} -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}+2\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ ✓

$\frac{5}{2}+9\cdot\frac{5}{2}=\frac{5}{2}\cdot 10=25$ ✓

$25=25$

$\rightarrow a=b=-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{10}}{2}$.

$\begin{cases} x-2=-\frac{\sqrt{10}}{2} \\ y-1=-\frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x=2-\frac{\sqrt{10}}{2} \\ y=1-\frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases}$

(2): $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}-2\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \Rightarrow$ корень из числа $<0 \rightarrow \varnothing$
(там где $a-2b=\sqrt{ab}$)

(3): $\left.\begin{array}{l} 4-2=2 \\ \sqrt{4\cdot 1}=2 \end{array}\right\} \rightarrow 2=2 \rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x-2=4 \\ y-1=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases}$

(4): $-4+2=-2 \rightarrow$ корень из числа $<0 \rightarrow \varnothing$

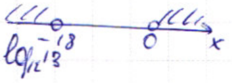
Ответ: $\left(2-\frac{\sqrt{10}}{2};\ 1-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$ и $(6;2)$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

③ $5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$

ОДЗ: $x^2+18x>0$



$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2+18x \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}$

$t = x^2+18x>0$ (по ОДЗ) $\to |t|=t$

$5^{\log_{12}t}+t\geq t^{\log_{12}13}$

$t^{\log_{12}5}+t\geq t^{\log_{12}13}$

$t^{\log_{12}5}+t^{\log_{12}12}\geq t^{\log_{12}13}$

$t^a>0 \Rightarrow$ можно обе части нер-ва поделить на $t^{\log_{12}5}$ без смены знака нер-ва

$1+t^{\log_{12}12-\log_{12}5}\geq t^{\log_{12}13-\log_{12}5}$

$t^{\log_{12}13-\log_{12}5} - t^{\log_{12}12-\log_{12}5} \leq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (t-1)(\log_{12}13-\log_{12}5-\log_{12}12+\log_{12}5)\leq 1$

$(t-1)(\log_{12}13-\log_{12}12)\leq 1$

$(t-1)\cdot\log_{12}\frac{13}{12}\leq 1 \longrightarrow t-1\leq \log_{12}\frac{12}{13} \to \boxed{t\leq 2-\log_{12}13}$

По усл., $t>0$. ~~на~~ $2-\log_{12}13 \vee 0$: $1<\log_{12}13<2$

(т.к. $\log_{12}x$ — $\uparrow$ функция $\to$ $\log_{12}12<\log_{12}13<\log_{12}12^2$)

$\to 2-\log_{12}13>0 \to$ нет противоречий, $0<t\leq 2-\log_{12}13$.

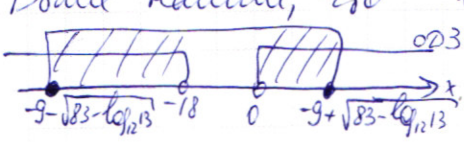
$t=x^2+18x\leq 2-\log_{12}13$

$x^2+18x-2+\log_{12}13\leq 0$

$D=4(81+2-\log_{12}13)=4(83-\log_{12}13)$

$x=\frac{-18\pm2\sqrt{83-\log_{12}13}}{2} = -9\pm\sqrt{83-\log_{12}13}$

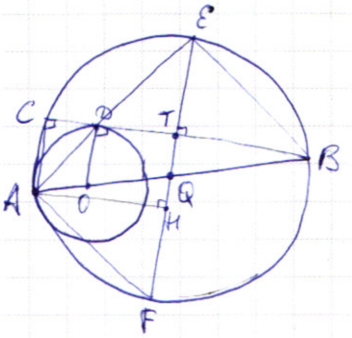
Выше нашли, что $\log_{12}13<2 \to \sqrt{83-\log_{12}13}>\sqrt{81}=9 \to x_1>0$, $x_2<-18$



Ответ: $x\in[-9-\sqrt{83-\log_{12}13}; -18)\cup(0; -9+\sqrt{83-\log_{12}13}]$.

4

$CD = 8$
$BD = 17$



Найти: R_1 - ? R_2 - ? $\angle AFE$ - ? S_{AEF} - ?

1) O - центр меньшей окр $\Rightarrow$

$\Rightarrow OD \perp BC$ (BC - касат. по усл.)

AB - диам. большей окр $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ACB = 90^\circ \Rightarrow AC \perp BC$

$\Rightarrow \begin{cases} OD \perp BC \\ AC \perp BC \end{cases} \Leftrightarrow AC \parallel OD \Rightarrow$ по т. Фалеса $\dfrac{CD}{BD} = \dfrac{AO}{BO} \Rightarrow 8BO = 17AO$

$BO = AB - AO$
AB - диам $\Rightarrow AB = 2R_2$
$AO = R_1$

$\Rightarrow 8(2R_2 - R_1) = 17R_1$
$16R_2 = 25R_1$ (1)

2) $\triangle OBD$: $OD \perp BC$ (п.1) $\Rightarrow \triangle OBD$ - п/у $\Rightarrow$ по т. Пифагора: ~~окр.~~

$OD^2 + BD^2 = OB^2$; O - центр меньшей окр. (п.1) $\Rightarrow OD = R_1$

$R_1^2 + 17^2 = (2R_2 - R_1)^2$

$R_1^2 + 289 = 4R_2^2 - 4R_2 \cdot R_1 + R_1^2 \Rightarrow 289 = 4R_2^2 - 4R_1R_2$.

(1): $16R_2 = 25R_1 \Rightarrow R_1 = \dfrac{16}{25}R_2 \Rightarrow 289 = 4R_2^2 - 4 \cdot \dfrac{16}{25}R_2^2 \quad | \cdot 25$

$17^2 \cdot 5^2 = 4R_2^2(25 - 16)$
$17 \cdot 5 = 2R_2 \cdot 3 \Rightarrow R_2 = \dfrac{17 \cdot 5}{2 \cdot 3} = \dfrac{85}{6}$

$R_1 = \dfrac{16}{25}R_2 = \dfrac{16}{25} \cdot \dfrac{17 \cdot 5}{2 \cdot 3} = \dfrac{8 \cdot 17}{5 \cdot 3} = \dfrac{136}{15}$

3) $\angle CBE = \alpha \Rightarrow \angle FEB = 90^\circ - \alpha$; AB - диам. $\Rightarrow \angle AEB = 90^\circ \Rightarrow \angle AEF = \alpha$.

$\begin{rcases} EF \perp BC \text{ (усл)} \\ OD \perp BC \text{ (п. 1)} \end{rcases} \Leftrightarrow EF \parallel OD \Rightarrow \angle ADO = \angle AEF$ (~~[illegible]~~ AE - секущая)

O - ц. окр $\Rightarrow AO = OD = R_1 \Rightarrow \angle OAD = \angle ADO = \alpha$; $\angle OAD = \angle BAE = \alpha$.

Тогда в большей окр.: $\angle BAE = \angle CBE = \alpha \Rightarrow \smile BE = \smile CE$

$CB \cap EF = T \Rightarrow CT = BT$, $EF \perp BC$, $CT = TB \Leftrightarrow EF$ - диаметр, $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle FAE = 90^\circ$ и $EF \cap AB = Q$, Q - центр большей окр.
$BC = CD + DB = 7 + 18 = 25$ (усл.) $\Rightarrow CT = TB = 12{,}5$.

$AH \perp EF$, $H \in EF$: $CT \perp EF$ (усл), $AH \perp EF$ (постр), $\Rightarrow CT \parallel AH$.

Ранее: $AC \parallel EF \Rightarrow AC \parallel TH \Rightarrow ACTH - \square \Rightarrow CT = AH$.

См продолжение!

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Продолжение №4.

$AH \perp EF \to AH$ - высота $\to S_{AEF} = \frac{1}{2} AH \cdot EF$

Ранее: EF - диаметр $\to EF = 2R_2 = 2 \cdot \frac{85}{6} = \frac{85}{3}$.

$\to S_{AEF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{2} \cdot \frac{85}{3} = \frac{125 \cdot 17}{12} = \frac{2125}{12} = 177\frac{1}{12}$

4) $\cancel{AH = \sqrt{FH \cdot HE}}$, $\cancel{FH = a \to HE = R_2 - a}$, $\cancel{AH = h}$

$\cancel{h^2 = a(R_2 - a)}$

$AF = a$, $AE = b \to$ По т. Пиф-ра в $\triangle AEF$: $a^2 + b^2 = 4R_2^2$

$S_{AEF} = \frac{1}{2} ab = \frac{1}{2} h 2R_2 \to ab = 2hR_2 \to a = \frac{2hR_2}{b} \to \frac{4h^2R_2^2}{b^2} + b^2 = 4R_2^2$

$4h^2R_2^2 + b^4 - 4R_2^2 \cdot b^2 = 0$

$D = (R_2^4 - h^2R_2^2) \cdot 4^2$

$b^2 = \frac{4R_2^2 \pm R_2\sqrt{R_2^2 - h^2} \cdot 4}{2} = 2R_2(R_2 \pm \sqrt{\dots})$

$\cancel{b^2 > 0 \to b^2 = \frac{R_2(1 + \sqrt{R_2^2 - 4h^2})}{2} = \frac{1 + \sqrt{(\frac{85}{6})^2 - 4 \cdot (\frac{25}{2})^2}}{2} \cdot (\frac{85}{6})}$

$b^2 > 0 \to b^2 = 2R_2 \cdot (R_2 + \sqrt{R_2^2 - h^2}) = 2 \cdot \frac{85}{6}\left(\frac{85}{6} + \frac{40}{6}\right) = 2 \cdot \frac{85}{6} \cdot \frac{125}{6} =$

$= \frac{2 \cdot 17 \cdot 5 \cdot 25 \cdot 5}{36} = \frac{25^2}{6^2} \cdot 34 \to b = \frac{25}{6} \cdot \sqrt{34} = AE$

$\sin\angle AFE = \frac{AE}{EF} = \frac{25}{6} \cdot \sqrt{34} \cdot \frac{3}{85} = \frac{5 \cdot \sqrt{34}}{2 \cdot 17} = \frac{5\sqrt{34}}{34} \to \angle AFE = \arcsin\frac{5\sqrt{34}}{34}$.

Ответ: $R_1 = \frac{136}{15}$, $R_2 = \frac{85}{6}$, $\angle AFE = \arcsin\frac{5\sqrt{34}}{34}$, $S_{AEF} = 177\frac{1}{12}$.

⑥ $\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$, $x \in [-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$

• $y_1 = \frac{12x+11}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4x+3}$; $\frac{1}{x}\downarrow \to y_1 = 3 + \frac{2}{4x+3} \downarrow$

$\to y(-\frac{11}{4}) > y(-\frac{3}{4})$. $y(-\frac{11}{4}) = 2\frac{3}{4}$, $y(-\frac{3}{4}) \to -\infty$. Значит, $y \le 2\frac{3}{4}$ на нужном промежутке.

• $y_2 = -8x^2 - 30x - 17$

$x_0 = \frac{30}{-16} = -\frac{15}{8} = -\frac{7.5}{4} \in [-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}]$, $x_0 = -\frac{15}{8}$ – т. max

$y_2(x_0) = 11\frac{1}{8}$ – max функции.

$y_2(-\frac{11}{4}) = 5$, $y_2(-\frac{3}{4}) = 1$

$\Big\}$ $y_2 \in [1; 11\frac{1}{8}]$ на исх. промежутке

$y_2 \uparrow$ на $x \in [-\frac{11}{4}; -\frac{15}{8}]$, $y_2 \downarrow$ на $x \in (-\frac{15}{8}; -\frac{3}{4})$.

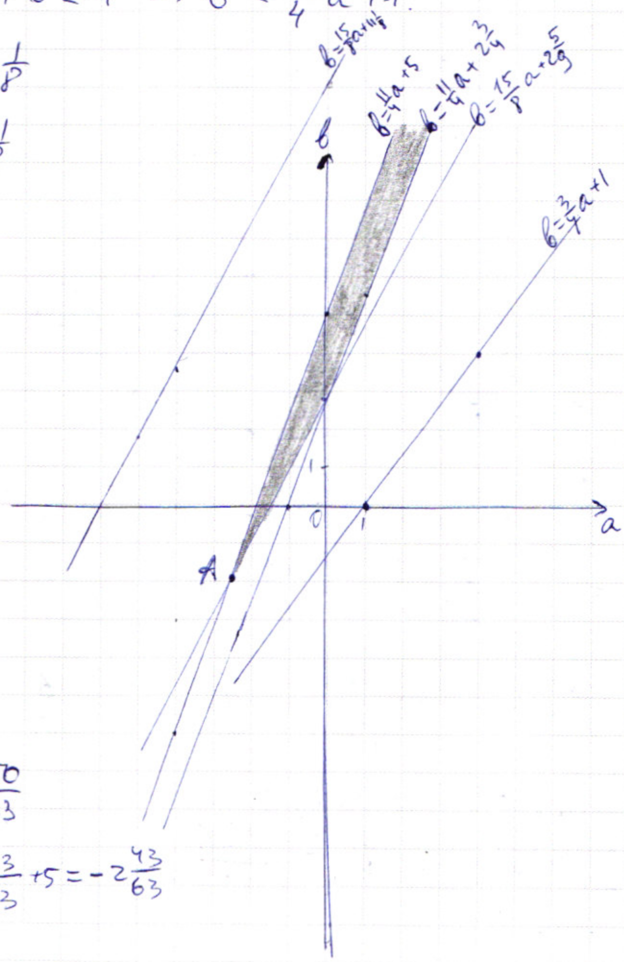
при $x \to -\frac{3}{4}$: $ax + b \le 1 \to -a\frac{3}{4} + b \le 1 \to b \le \frac{3}{4}a + 1$.

при $x = -\frac{15}{8}$: $2\frac{5}{9} \le -a \cdot \frac{15}{8} + b \le 11\frac{1}{8}$

$$\begin{cases} b \le \frac{15}{8}a + 11\frac{1}{8} \\ b \ge \frac{15}{8}a + 2\frac{5}{9} \end{cases}$$

при $x = -\frac{11}{4}$: $2\frac{3}{4} \le -\frac{11}{4}a + b \le 5$.

$$\begin{cases} b \le \frac{11}{4}a + 5 \\ b \ge \frac{11}{4}a + 2\frac{3}{4} \end{cases}$$



Построим в осях aOb:

Решением системы всех нер-в будет

A: $\frac{11}{4}a + 5 = \frac{15}{8}a + 2\frac{5}{9}$

$\frac{22-15}{8}a = -2\frac{4}{9} \to \frac{7}{8}a = -\frac{22}{9}$ $a = -\frac{8\cdot 22}{7\cdot 9}$

$a = \frac{-176}{63} = -2\frac{50}{63}$

$b = \frac{11}{4}\cdot\frac{-176}{63} + 5 = 11\cdot\frac{-44}{63} + 5 = -\frac{484}{63} + 5 = -7\frac{43}{63} + 5 = -2\frac{43}{63}$

$$\to \begin{cases} a \ge -2\frac{50}{63} \\ b \ge -2\frac{43}{63} \end{cases}$$

Ответ: $a \ge -2\frac{50}{63}$ и $b \ge -2\frac{43}{63}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

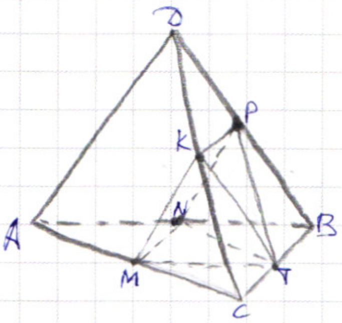
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(7)



M, K, P, N, T – середины ребер

$A, M, K, P, N, T \in$ сфера (O, R)

$AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$

BC – ? R_{min} – ?

1) A, M, K, P, N, T лежат на сфере → (то, что они в одной плоскости, доказано далее) → K, P, N и M $\in$ некой окр-ти →

→ $\angle K + \angle N = \angle M + \angle P = 180^\circ$ в 4-уг. $KPNM$ (св-во впис. 4-уг.)

K – сер. DC, P – сер. DB } → KP – ср. л. $\triangle DCB$ (опр) → $KP = \frac{1}{2} BC$, $KP \parallel BC$ (св-во ср. л.)

Ан-чно в $\triangle ABC$: $MN \parallel BC$ (ср. линия) и $MN = \frac{1}{2} BC$

→ $MN = KP = \frac{1}{2} BC$ и $MN \parallel BC \parallel KP$.

Ан-чно $KM = NP = \frac{1}{2} AD$ и $KM \parallel KP \parallel AD$

} → K, P, M и N лежат в одной плоскости, $KPNM$ – ▱ (опр. 4) →

→ в $KPNM$: $\angle K + \angle P = 180^\circ = \angle N + \angle M$

Но выше нашли, что $\angle K + \angle N = 180^\circ = \angle M + \angle P$ } →

→ $\angle K = \angle N = \angle M = \angle P = 90^\circ$ → $KMNP$ – ▭

2) $AN = MT = \frac{1}{2} AB$ (MT – ср. л. в $\triangle ABC$)
$NT = \frac{1}{2} AC = AM$ (NT – ср. л. в $\triangle ABC$) } → $ANTM$ – ▱

$A, N, T, M \in$ некой сфере → ан-чно п. 1 $ANTM$ – ▭ →

→ $\angle BAC = 90^\circ$

3) ~~KPNM – ▭ → KM ⊥ MT; ANTM – ▭ → AM ⊥ MT → MT ⊥ (ADC)~~ $KM \perp MT$, $KM \perp AM$ } →

~~Ан-чно~~ $KM \perp (ABC)$ → $(KMNP) \perp (ABC)$ → это прямоуг. пирамида, $\angle A$ – прямой

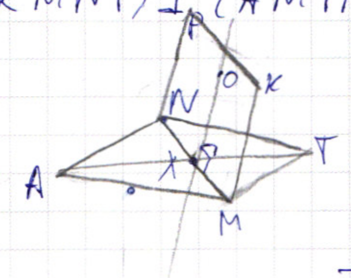
→ $\triangle ADB$ – п/у → по т. Пиф-ра $AD = \sqrt{BD^2 - AB^2} = \sqrt{3}$

В п/у $\triangle ADC$: $AC = \sqrt{DC^2 - AD^2} = \sqrt{9 - 3} = \sqrt{6}$ → в п/у $\triangle ABC$:

$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{1 + 6} = \sqrt{7}$.

Центр сферы равноуд. от всех точек, которые лежат на ней.
Если l_1 - прямая, такая, что K, M, N и P равноуд. от всех ее точек, то $l_1 \perp KMNP$ и проходит через ~~середи~~ точку перес. диагоналей $\square KMNP$: $KN \cap MP = Y \in l_1$
Ан-чно, l_2 - прямая, A, M, T и N равноуд. от всех её точек → $AT \cap MN = X \in l_2$

Все K, M, N, P, A, T равноудалены от центра сферы →
→ O - ц. сферы и $O = l_1 \cap l_2$
$(KMNP) \perp (AMTN)$



$$\left.\begin{array}{l} AT \cap MN = X \\ X \in MN \\ MN \subset MKPK \end{array}\right\} \to X \in MNPK \to$$

→ l_2 принадл. плоскости ~~проходит через~~ MNPK →

→ $O \in (MNPK)$

$AM = \frac{\sqrt{6}}{2}$ (т.к. $AC = \sqrt{6}$)

$X(0;0;0) \to O(0;0;z_0)$

~~A~~: Зная длины всех сторон (мы их ранее нашли), найдем без труда коорд. точек A, M, K

$AO = MO = KO$

$\sqrt{(x_A - x_0)^2 + (y_A - y_0)^2 + (z_A - z_0)^2} = \ldots = R$

Ан-чно с другими точками

~~Достаточно~~ Составим и решим систему, найдем z_0 →
→ R (не успеваю)

Ответ: $BC = \sqrt{7}$; (алгоритм поиска для R)