МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6}, \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2 - 26x\right|^{\log_5 12} + 26x \geqslant x^2 + 13^{\log_5\left(26x - x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 12$, $BD = 13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $4 \leqslant x \leqslant 28$, $4 \leqslant y \leqslant 28$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8 - 6x}{3x - 2} \geqslant ax + b \geqslant 18x^2 - 51x + 28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3}; 2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY = \sqrt{3}$, $TX = \sqrt{2}$, $TZ = 2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17} \end{cases}$$

$$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2} =$$

$$= 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta$$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{1}{17} \end{cases} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$2\beta = \pm\arccos\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\cos 2\beta = -\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\beta\right) = \sin\left(2\beta-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\left[\begin{array}{l} 2\alpha+2\beta = 2\beta-\frac{\pi}{2}+2\pi n \\ 2\alpha+2\beta = \pi-2\beta+\frac{\pi}{2}+2\pi n \end{array}\right., n\in\mathbb{Z} \qquad \left[\begin{array}{l} \alpha = -\frac{\pi}{4}+\pi n \\ \alpha = \frac{3\pi}{4}-2\beta+\pi n \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \alpha = -\frac{\pi}{4}+\pi n \\ \alpha = \frac{3\pi}{4}-\arccos\frac{1}{\sqrt{17}}+\pi n \\ \alpha = \frac{3\pi}{4}+\arccos\frac{1}{\sqrt{17}}+\pi n \end{array}\right., n\in\mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1$$

$$\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = \frac{\frac{4}{\sqrt{17}}}{\frac{1}{\sqrt{17}}} = 4.$$

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\alpha = -1 \\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{-1+4}{1-(-1)\cdot 4} = \frac{3}{5} \\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{-1-4}{1+(-1)(4)} = \frac{-5}{-3} = \frac{5}{3} \end{array}\right.$$

Ответ: -1; $\frac{3}{5}$; $\frac{5}{3}$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№3

$$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26-x^2)}$$

ОДЗ: $\begin{cases} 26x-x^2>0 \\ |x^2-26x|>0 \end{cases} \Leftrightarrow 26x-x^2>0$

Т.к. $26x-x^2>0$, $|x^2-26x|=26x-x^2$

Пусть $26x-x^2=t$, $t>0$

$$t^{\log_5 12}+t \geq 13^{\log_5 t}$$

$$12^{\log_5 t}+t^{\log_5 5} \geq 13^{\log_5 t}$$

$$12^{\log_5 t}+5^{\log_5 t} \geq 13^{\log_5 t}$$

$$\log_5 t \leq 2$$

$$0<t\leq 25$$

$$0<26x-x^2\leq 25$$

$x^2-26x<0$

$x(x-26)<0$

$x\in(0;26)$

$x^2-26x+25\geq 0$

$(x-1)(x-25)\geq 0$

$x\in(-\infty;1]\cup[25;+\infty)$

Пересекая, получим $x\in(0;1]\cup[25;26)$.

Ответ: $(0;1]\cup[25;26)$.

□ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} & (1) \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 & (2) \end{cases}$$

(1): $y-6x=\sqrt{y(x-1)-6(x-1)}$

$(y-6)-6(x-1)=\sqrt{(x-1)(y-6)}$

(2): $9x^2-18x+9+y^2-12y+36=90$

$9(x-1)^2+(y-6)^2=90$

Пусть

$a=x-1$

$b=y-6$

$$\begin{cases} b-6a=\sqrt{ab} & (3) \\ 9a^2+b^2=90 & (4) \end{cases}$$

(3): $b^2-12ab+36a^2=ab$, $\begin{cases} b-6a\geq 0 \\ ab\geq 0 \end{cases}$ (*)

$b^2-13ab+36a^2=0$

$D=169a^2-144a^2=25a^2$

$b=\dfrac{13a\pm 5a}{2}$

$b=4a$ $\qquad$ $b=9a$

в (4): $9a^2+16a^2=90$ $\qquad$ $9a^2+81a^2=90$

$a^2=\dfrac{90}{25}=\dfrac{18}{5}$ $\qquad$ $a^2=1$

~~$a = \pm\sqrt{\frac{18}{5}}$~~ $a = \pm 3\sqrt{\frac{2}{5}}$ $a = \pm 1$

~~$b = \pm 4\sqrt{\frac{18}{5}}$~~ $b = \pm 12\sqrt{\frac{2}{5}}$ $b = \pm 9$

Проверка (*):

~~$-\sqrt{\frac{18}{5}} - 4\sqrt{\frac{18}{5}} \geq 0$ – неверно~~

~~$-1 - 4 \geq 0$ – неверно~~

~~$4\sqrt{\frac{18}{5}} - 6\sqrt{\frac{18}{5}} \geq 0$ – неверно, $a = \sqrt{\frac{18}{5}}$, $b = 4\sqrt{\frac{18}{5}}$ не удовл.~~

~~$4 - 6 \geq 0$ – неверно, $a = 1$, $b = 1$ не удовл.~~

~~Остальные~~

~~$a = -\sqrt{\frac{18}{5}}, b = -4\sqrt{\frac{18}{5}}$ и $a = -1, b = -4$ удовлетв.~~

~~Отв:~~

~~$x = -\sqrt{\frac{18}{5}} + 1 = 1 - 3\sqrt{\frac{2}{5}}$ $x = -1 + 1 = 0$~~

~~$y = -4\sqrt{\frac{18}{5}} + 6 = 6 - 12\sqrt{\frac{2}{5}}$ $y = -4 + 6 = 2$.~~

~~Ответ: $\left(1 - \sqrt{\frac{18}{5}}; 6 - 4\sqrt{18}\right.$~~

~~Ответ: $\left(1 - 3\sqrt{\frac{2}{5}}; 6 - 12\sqrt{\frac{2}{5}}\right), (0; 2)$.~~

$4\sqrt{\frac{18}{5}} - 6\sqrt{\frac{18}{5}} \geq 0$ – неверно, $a = \sqrt{\frac{18}{5}}$, $b = 4\sqrt{\frac{18}{5}}$ не удовл.

~~Остальные значе удовл. (*)~~

$-9 + 6 \geq 0$ – неверно, $a = -1$, $b = -9$ не удовл.

Остальные знач. удовл. (*)

$x = 1 - 3\sqrt{\frac{2}{5}}$ $x = 2$

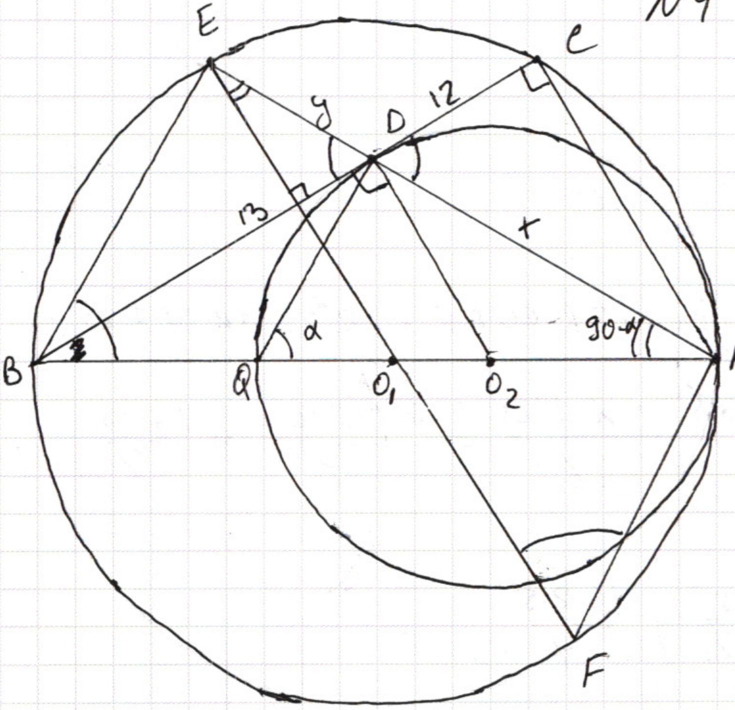
$y = 6 - 12\sqrt{\frac{2}{5}}$ $y = 9 + 6 = 15$

Ответ: $\left(1 - 3\sqrt{\frac{2}{5}}; 6 - 12\sqrt{\frac{2}{5}}\right), (2; 15)$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



1) $\triangle BO_2D \sim \triangle BAC$

$$\frac{BO_2}{BA} = \frac{13}{25}$$

Пусть R – рад. окр. Ω,

r – рад. окр. ω.

$BO_2 = 2R - r$

$BA = 2R$

$50R - 25r = 26R$

$24R = 25r \quad r = \frac{24}{25}R$

$BD^2 = BQ \cdot BA$

$169 = (2R-2r)\cdot 2R = 4R^2 - 4Rr = 4R^2 - 4R\cdot\frac{24}{25}R = \frac{4}{25}R^2$

$R = \sqrt{169\cdot\frac{25}{4}} = \frac{13\cdot 5}{2} = \frac{65}{2} \qquad r = \frac{65}{2}\cdot\frac{24}{25} = \frac{156}{5}$

2) $\angle CDA = \angle DQA$ – уг. между касат. и хордой

$\angle \cancel{B}ED = 90 - \angle EDB = 90 - \angle DQA = \angle QAD$

$\Downarrow$

EF проходит через т. O_1, $\triangle EO_1A$ – р/б

$\Downarrow$

EF – диаметр Ω

$\angle AFE = \angle ABE = \alpha$.

$DA = 2r\sin\alpha = x$, $EA = 2R\sin\alpha = x+y$

$BD\cdot DC = AD\cdot DE$

$13\cdot 12 = xy$, $y = \frac{156}{x}$

$2R\sin\alpha = 2r\sin\alpha + \frac{156}{2r\sin\alpha}$

$4r^2\sin^2\alpha + 156 = 4rR\sin^2\alpha$

$\sin^2\alpha = \dfrac{39}{rR - r^2} = \dfrac{39}{\frac{156}{5}\left(\frac{65}{2} - \frac{156}{5}\right)} = \dfrac{39\cdot 5}{156\cdot\frac{13}{10}} = \dfrac{25}{26}$

$\sin\alpha = \dfrac{5}{\sqrt{26}}$ $\quad$ $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{26}}$

$\alpha = \arcsin\dfrac{5}{\sqrt{26}}$

3) т.к. EF – диам., $\angle EAF = 90°$

$S_{\triangle AEF} = \dfrac{1}{2}\cdot AF\cdot AE = \dfrac{1}{2}\cdot 2R\sin\alpha\cdot 2R\cos\alpha = 2R^2\sin\alpha\cos\alpha =$

$= 2\cdot\left(\dfrac{65}{2}\right)^2\cdot\dfrac{5}{\sqrt{26}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{26}} = \dfrac{65\cdot 2\cdot 5\cdot 65}{4\cdot 26} = \dfrac{25\cdot 65}{4} = \dfrac{1625}{4}.$

Ответ: $\dfrac{65}{2}$ и $\dfrac{156}{5}$; $\arcsin\dfrac{5}{\sqrt{26}}$; $\dfrac{1625}{4}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

Пусть C – составное число, $C = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}$, $p_1, \ldots, p_n$ – прост. числа, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ – нат. числа.

Тогда:

$$f(C) = f\left(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}\right) = f(p_1^{\alpha_1}) + f(p_2^{\alpha_2}) + \ldots + f(p_n^{\alpha_n}) =$$

$$= \alpha_1 f(p_1) + \alpha_2 f(p_2) + \ldots + \alpha_n f(p_n) = \alpha_1 \left[\frac{p_1}{4}\right] + \alpha_2 \left[\frac{p_2}{4}\right] + \ldots + \alpha_n \left[\frac{p_n}{4}\right]$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y), \text{ т.к. } \frac{1}{C} = p_1^{-\alpha_1} \cdot p_2^{-\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{-\alpha_n}$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \qquad f(x) < f(y).$$

Найдем $f(C)$ для $4 \le C \le 28$

$f(4) = 2\left[\frac{2}{4}\right] = 0$

$f(5) = \left[\frac{5}{4}\right] = 1$

$f(6) = \left[\frac{2}{4}\right] + \left[\frac{3}{4}\right] = 0$

$f(7) = \left[\frac{7}{4}\right] = 1$

$f(8) = 0$

$f(9) = 2\left[\frac{3}{4}\right] = 0$

$f(10) = \left[\frac{2}{4}\right] + \left[\frac{5}{4}\right] = 1$

$f(11) = \left[\frac{11}{4}\right] = 2$

$f(12) = 2\left[\frac{2}{4}\right] + \left[\frac{3}{4}\right] = 0$

$f(13) = \left[\frac{13}{4}\right] = 3$

$f(14) = \left[\frac{2}{4}\right] + \left[\frac{7}{4}\right] = 1$

$f(15) = \left[\frac{3}{4}\right] + \left[\frac{5}{4}\right] = 1$

$f(16) = 4\left[\frac{2}{4}\right] = 0$

$f(17) = \left[\frac{17}{4}\right] = 4$

$f(18) = \left[\frac{2}{4}\right] + 2\left[\frac{3}{4}\right] = 0$

$f(19) = \left[\frac{19}{4}\right] = 4$

$f(20) = \left[\frac{5}{4}\right] + 2\left[\frac{2}{4}\right] = 1$

$f(21) = \left[\frac{3}{4}\right] + \left[\frac{7}{4}\right] = 1$

$f(22) = \left[\frac{2}{4}\right] + \left[\frac{11}{4}\right] = 2$

$f(23) = \left[\frac{23}{4}\right] = 5$

$f(24) = \left[\frac{3}{4}\right] + 3\left[\frac{2}{4}\right] = 0$

$f(25) = 2\left[\frac{5}{4}\right] = 2$

$f(26) = \left[\frac{2}{4}\right] + \left[\frac{13}{4}\right] = 3$

$f(27) = 3\left[\frac{3}{4}\right] = 0$

$f(28) = 2\left[\frac{2}{4}\right] + \left[\frac{7}{4}\right] = 1$

1) Если $f(y) = 1$, подходят только такие x, что $f(x) = 0$

$f(x) = 1$ дают 8 чисел

$f(x) = 0$ дают 9 чисел

$8 \cdot 9 = 72$

2) Если $f(y) = 2$, подходят $f(x) = 0$, $f(x) = 1$

$f(x) = 2$ дают 3 числа

$3 \cdot (8 + 9) = 3 \cdot 17 = 51$

3) Если $f(y) = 3$, подходят $f(x) = 0$, $f(x) = 1$, $f(x) = 2$

$f(x) = 3$ дают 2 числа

$2 \cdot (8 + 9 + 3) = 2 \cdot 20 = 40$

4) Если $f(y) = 4$, подходят $f(x) = 0$, $f(x) = 1$, $f(x) = 2$, $f(x) = 3$

$f(x) = 4$ дают 2 числа

$2 \cdot (8 + 9 + 3 + 2) = 2 \cdot 22 = 44$

5) Если $f(y) = 5$, подходят $f(x) = 0$, $f(x) = 1$, $f(x) = 2$, $f(x) = 3$, $f(x) = 4$

$f(x) = 5$ даёт 1 число

$1 \cdot (8 + 9 + 3 + 2 + 2) = 24$

$\sum = 72 + 51 + 40 + 44 + 24 = 231.$

Ответ: 231 пара.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \geq 18x^2-51x+28 \qquad \left(\frac{2}{3}; 2\right].$$

$f(x) = \frac{8-6x}{3x-2} = -2 + \frac{4}{3x-2} = -2+\frac{\frac{4}{3}}{x-\frac{2}{3}}$; $g(x) = 18x^2-51x+28$

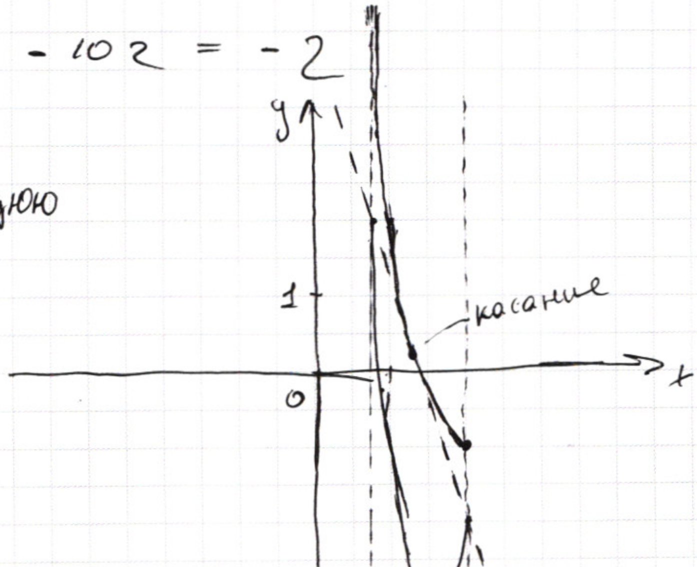
$y = ax+b$ – ур-е прямой.

Чтобы неравенство выполнялось, прямая $y=ax+b$ должна лежать под графиком $y=f(x)$ и над графиком $y=g(x)$ на пром. $\left(\frac{2}{3}; 2\right]$.

$f(2) = \frac{8-12}{6-2} = \frac{-4}{4} = -1 \qquad f(1) = \frac{8-6}{3-2} = 2$

$g\left(\frac{2}{3}\right) = 18\cdot\frac{4}{9} - 51\cdot\frac{2}{3} + 28 = 8-34+28 = 2$

$g(2) = 18\cdot 4 - 51\cdot 2 + 28 = 100 - 102 = -2$



Рассмотрим прямую, проходящую через $\left(\frac{2}{3}; 2\right)$ и $(2; -2)$

$$\begin{cases} 2 = \frac{2}{3}\alpha + \beta \\ -2 = 2\alpha + \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -3 \\ \beta = 4 \end{cases}$$

$y = -3x+4.$

Найдем ~~в~~ точки пересечения этой прямой и $y = f(x)$.

$-3x+4 = \frac{8-6x}{3x-2}$

$(3x-2)(-3x+4) = 8-6x, \qquad x \neq \frac{2}{3}$

$-9x^2+6x+12x-8=8-6x$

$9x^2-24x+16=0$

$(3x-4)^2=0$

$x=\frac{4}{3}$

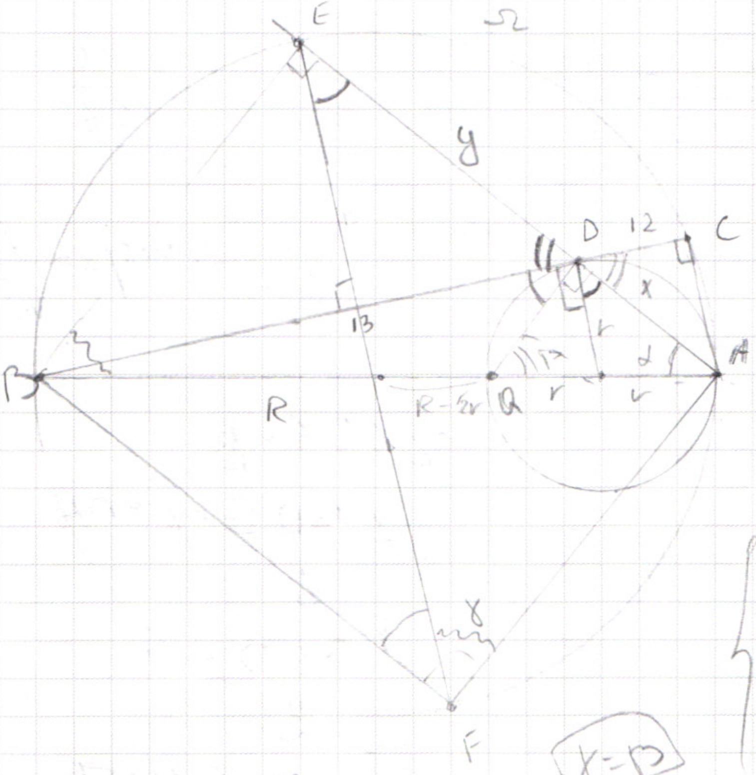
Единственная точка пересечения говорит о том, что данная прямая касается $g(x)$.

Значит единственная пара $(a;b)$ это $(-3;4)$, т.к. при других значениях параметров прямая $y=ax+b$ будет пересекать либо $y=f(x)$, либо $y=g(x)$ на $[\frac{2}{3};2]$, а значит неравенство выполняться не будет.

Ответ: $(-3;4)$.

□ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\beta = \frac{1}{2}\cup BE + \frac{1}{2}\cup CA =$

$= \alpha + \angle CBA$

$\alpha + \beta = 90$

$\beta = 90 - \alpha$

$90 - \alpha = \alpha + \angle CBA$

$\angle CBA = 90 - 2\alpha$

степень точки B.

$13^2 = (2R - 2r)\cdot 2R$

Т Пифа:

KB

$KB^2 = (2R - r)^2 + r^2 \quad (2R-r)^2 = 169 - r^2$

~~$4R^2 - 4Rr + r^2 = 169 - r^2$~~

$\boxed{\gamma = \beta}$

$$\begin{cases} 169 = 4R^2 - 4rR \\ 169 = 4R^2 - 4Rr + r^2 + r^2 \end{cases}$$

$\frac{2R - r}{13} = \frac{2R}{25} \qquad 50R - 25r = 26R$

$24R = 25r.$

$r = \frac{24}{25}R$

$12 \cdot 13$: $36 + 12 = 156$

$169 = 4R^2 - 4R\cdot\frac{24}{25}R = 4R^2 - \frac{96}{25}R^2 = \frac{100-96}{25}R^2 = \frac{4}{25}R^2$

$R^2 = 169\cdot\frac{25}{4}, \quad R = 13\cdot\frac{5}{2} = \boxed{\frac{65}{2}}, \quad r = \frac{24}{25}\cdot 13\cdot\frac{5}{2} = \boxed{\frac{156}{5}}$

$xy = 12\cdot 13 \qquad y = \frac{12\cdot 13}{x} = \frac{156}{x}$

$QD = 2\cdot r\cos\beta, \quad BE = 2R\cos\beta, \quad x = 2r\sin\beta$

$x + y = 2R\sin\beta.$

~~$2R\sin\beta$~~ $\quad 2r\sin\beta + \frac{156}{2r\sin\beta} = 2R\sin\beta$

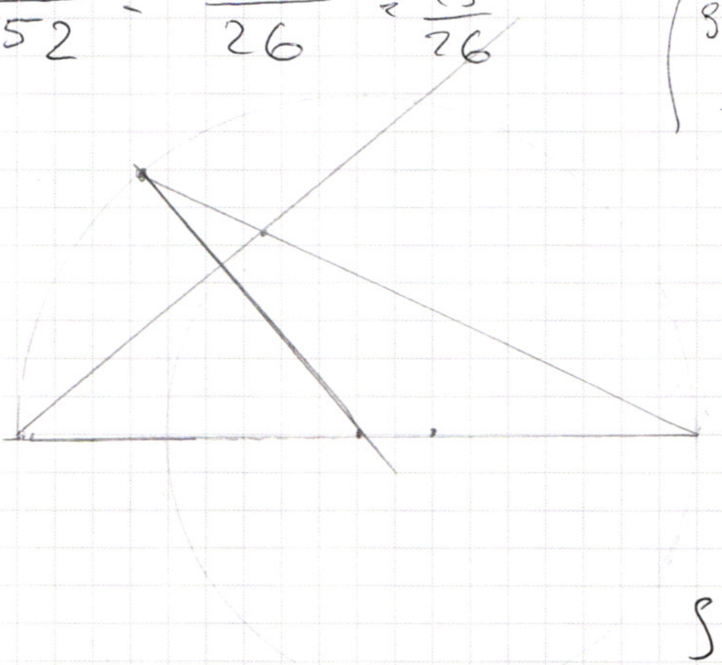
$4r^2 \sin$ $\quad 4r^2\sin^2\beta + 156 = 4rR\sin^2\beta$

$r^2\sin^2\beta + 39 = rR\sin^2\beta$

$\sin^2\beta = \frac{39}{rR - r^2} = \frac{39}{\frac{65}{2}\cdot\frac{156}{5} - \left(\frac{156}{5}\right)^2} =$

$= \frac{39}{\frac{156}{5}\left(\frac{65}{2} - \frac{156}{5}\right)} = \frac{39\cdot 5}{156\ \frac{325-312}{10}} = \frac{\cancel{39}^{3}\cdot 5}{156\cdot\frac{\cancel{13}}{10}} = \frac{3\cdot 5\cdot 10}{156} =$

$= \frac{5\cdot 10}{52} = \frac{5\cdot 5}{26} = \frac{25}{26}$ $\quad \boxed{\sin\beta = \frac{5}{\sqrt{26}}} \Rightarrow \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{26}}.$



$\angle CDA = \beta$

$\angle BDE = \angle CDA$

$\Downarrow$

$\angle BED = \alpha$

$\Downarrow$

EF - диаметр.

$S_{FEA} = \frac{1}{2} FA\cdot EA =$

$= \frac{1}{2}\cdot 2R\sin\beta \cdot 2R\cos\beta =$

$= 2R^2\cdot\frac{5}{\sqrt{26}}\cdot\frac{1}{\sqrt{26}} = \frac{10}{26}R^2 = \frac{\cancel{10}^{5}}{\cancel{26}_{2}}\cdot\frac{\cancel{65}^{5}}{\cancel{2}} = \boxed{\frac{25}{2}}$

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times\ 65 \\ \hline 125 \\ +\ 150\ \ \\ \hline 1625 \end{array}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$90 - 9a^2 - 13ab + 36a^2 = 0$

$27a^2 - 13ab + 90 = 0$

$D = 169b^2 - 2430 =$

$= 169(90 - 9a^2) - 2430 = 15210 - 1521a^2 - 2430$

$=$

$\begin{array}{r} 6 \\ \times 90 \\ 27 \\ \hline 2430 \end{array}$ $\begin{array}{r} 68 \\ \times 169 \\ 9 \\ \hline 1521 \end{array}$

$72 + 51 + 110 + 68^2$
$72 + 51 + 108^2$
$= 72 + 51 + 110 =$
$= 70 + 51 + 110 =$
$= 180 + 51 =$
$= 131$

$|x^2 - 26x|^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + 13^{\log_5(26x - x^2)}$

из ОДЗ $26x - x^2 > 0$

$|x^2 - \cancel{28}26x| = 26x - x^2.$

$26x - x^2 = t$

$t^{\log_5 12} + t \geq 13^{\log_5 t}.$

$t^{\log_5 12} = a$

$\log_5 12 \log_{\circ} t = \log_{\circ} a$

$\log_5 12 = \frac{\log_{\circ} a}{\log_{\circ} t} = \log_t a.$

$\cancel{12^{\log_5 t}}$ $t^{\log_5 12}$ $12^{\log_5 t}$ $t^{\log_5 13}.$

$= \log_5 t \log_5 12 = \log_5 a.$

$\log_5 12 = \frac{\log_5 a}{\log_5 t} = \log_t a$

$\cancel{13^{\log_5 t} = 13^2 = 169}$

$t^{\log_5 \cancel{13}}$

$t = 25$

$\cancel{5^{\log_5 t} = 25}$

$\cancel{25^{\log_5 5} = 5}$

$\log_5 t = 2.$

$\cancel{125^2 = 5^6.}$

$\cancel{5^{2 \cdot \log_5 5^3} =}$

$t^{\log_5 12} + t \geq t^{\log_5 13}$

$f(ab) = f(a) + f(b)$ $f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$ для прост. p.

$4 \leq x \leq 28$
$4 \leq y \leq 28.$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$ $f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

Пусть есть сост. число $C = p_1^{d_1} p_2^{d_2} \dots p_n^{d_n}$

$f(C) = d_1 f(p_1) + d_2 f(p_2) + \dots + d_n f(p_n) = d_1 \left[\frac{p_1}{4}\right] + d_2\left[\frac{p_2}{4}\right] + \dots + d_n\left[\frac{p_n}{4}\right].$

~~разл. для y больше~~ ~~разл. для x.~~

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$\times \frac{18}{4}$
$72 + 28 = 80 + 20 = 100$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ — ?

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17} \end{cases}$$

$2\alpha = x$

$2\beta = y$

~~$\sin 2\alpha \cos 2\alpha + \sin 2\beta$~~

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$.

$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\sin x \cos y + \cos x \sin y = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin x \cos 2y + \cos x \sin 2y + \sin x = -\frac{2}{17}$.

$2\cos^2 y - 1 \qquad 2\sin y \cos y$

$4 = 2\cdot[\frac{2}{4}] = 0$
$5 = [\frac{5}{4}] = 1$.
$6 = [\frac{2}{4}] + [\frac{3}{4}] = 0$
$7 = [\frac{7}{4}] = 1$
$8 = 3[\frac{2}{4}] = 0$
$9 = 2[\frac{3}{4}] = 0$
$10 = [\frac{2}{4}] + [\frac{5}{4}] = 1$
$11 = [\frac{11}{4}] = 2$
$12 = 2[\frac{2}{4}] + [\frac{3}{4}] = 0$
$13 = [\frac{13}{4}] = 3$
$14 = [\frac{2}{4}] + [\frac{7}{4}] = 1$
$15 = [\frac{3}{4}] + [\frac{5}{4}] = 1$
$16 = 4[\frac{2}{4}] = 0$
$17 = [\frac{17}{4}] = 4$
$18 = 2[\frac{3}{4}] + [\frac{2}{4}] = 0$

+

$$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6} \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45 \end{cases}$$

$= \sqrt{y(x-1) - 6(x-1)} = \sqrt{(x-1)(y-6)}$

$(y-6) - 6(x-1) = y - 6 - 6x + 6 = y - 6x$

$9x^2 - 18x + 9 + y^2 - 12y + 36 = 90$.

$9(x-1)^2 + (y-6)^2 = 90$.

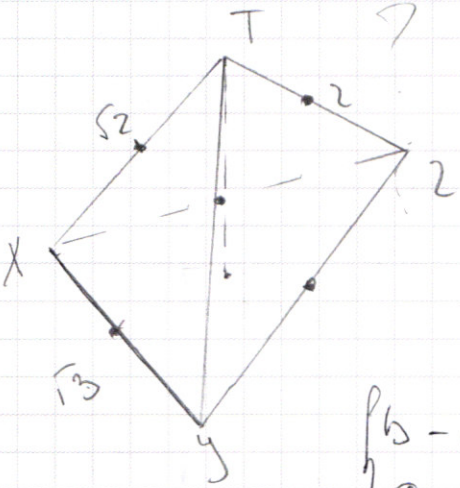
$x - 1 = a$
$y - 6 = b$

$$\begin{cases} b - 6a = \sqrt{ab} \\ 9a^2 + b^2 = 90 \end{cases} \qquad \begin{cases} b^2 - 12ab + 36a^2 = ab \\ 9a^2 + b^2 = 90 \end{cases}$$

$b^2 = 90 - 9a^2$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{(y-6)(x-1)} \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \end{cases}$$

$$\left(3(x-1)+(y-6)\right)^2=\underbrace{9(x-1)^2+(y-6)^2}_{90}+6(x-1)(y-6)$$

$$y-6=b$$
$$x-1=a$$

$$b-6a=y-6x.$$

$$\begin{cases} b-6a=\sqrt{ab} \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2-12ab+36a^2=ab \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2-13ab+36a^2=0 \\ b^2+9a^2=90 \end{cases}$$

$$9a^2+13ab-36a^2=90$$
$$13ab-27a^2=90$$
$$27a^2-13ab+90=0$$

$$4b^2-b^2+13ab=360$$
$$3b^2+13ab-360=0.$$

$$b^2-13ab+36a^2=0$$
$$D=169a^2-144a^2=25a^2$$
$$b=\frac{13a\pm5a}{2}$$

$$b=4a$$
$$16a^2+9a^2=90$$
$$25a^2=90$$
$$a^2=\frac{9\cdot5\cdot2}{5\cdot5}=\frac{18}{5}$$
$$a=\pm\sqrt{\frac{18}{5}}\Rightarrow b=\pm4\sqrt{\frac{18}{5}}.$$
$$x=\pm\sqrt{\frac{18}{5}}+1,\quad y=\pm4\sqrt{\frac{18}{5}}+6.$$

$$b=9a$$
$$81a^2+9a^2=90$$
$$90a^2=90$$
$$a^2=1$$
$$a=\pm1\Rightarrow b=\pm9$$
$$ab>0.$$
$$x=\pm1+1\quad y=\pm9+6$$
$$b-6a\geq0.$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

$y = -3x + 4$

$y = \frac{8-6x}{3x-2}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax + b \geq 18x^2 - 51x + 28$ $\cdot 8$ $\left[\frac{2}{3}; 2\right]$

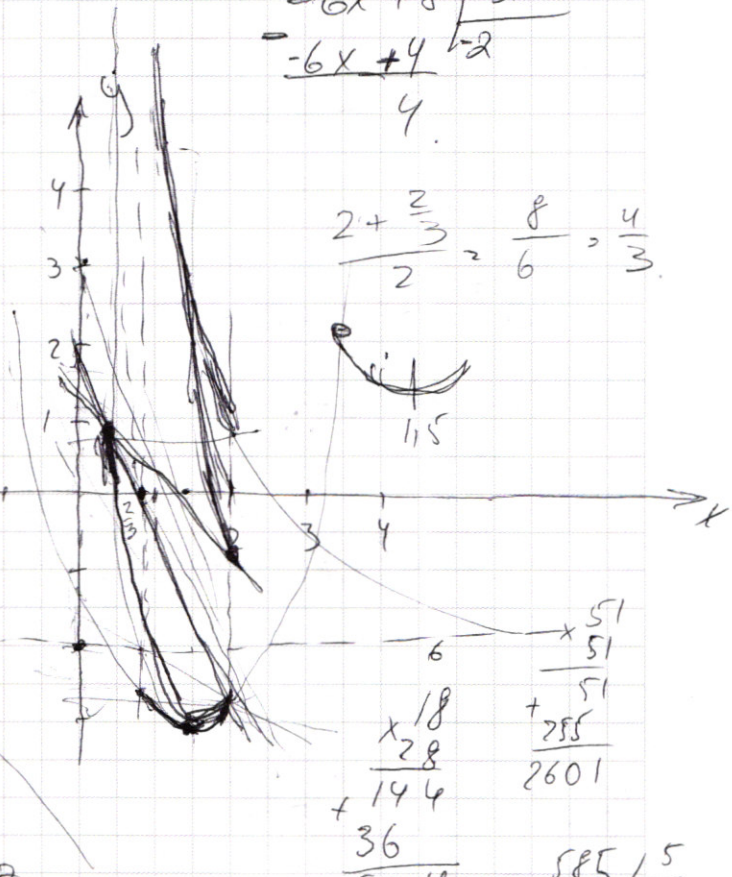
гипербола, ур-е прямой, парабола

$$\begin{array}{r|l} -6x+8 & 3x-2 \\ -6x+4 & -2 \\ \hline 4 & \end{array}$$

$y = \frac{8-6x}{3x-2} = -2 + \frac{4}{3x-2}$

$\frac{2+\frac{2}{3}}{2} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

$\left(\frac{2}{3}; 2\right)$ $(2; -2)$



1,5

$\begin{cases} 2 = a\cdot\frac{2}{3} + b \\ -2 = 2a + b \end{cases}$ $4 = -\frac{4}{3}a$

$a = -3$

$b = 2 + 2 = 4$

$y = 18x^2 - 51x + 28$

$y = 0 \quad 18x^2 - 51x + 28 = 0$

$D = 2601 - 4\cdot 18\cdot 28 = 2601 - 4\cdot 504 =$

$= 2601 - 2016 = 585 = 5\cdot 117$

$51 \cdot 51 = 2601$; $18 \cdot 28 = 504$; $585 : 5 = 117$

$x_в = \frac{51}{2\cdot 18} = \boxed{\frac{17}{12}} = 1\frac{5}{12}$

$y(x_в) = 18\cdot\frac{17^2}{12^2} - 51\cdot\frac{17}{12} + 28 = \frac{17^2}{8} - \frac{17^2}{4} + 28 = \frac{17^2}{8} - \frac{17^2}{4} + 28 =$

$= -\frac{17^2}{8} + 28 = -\frac{289 - 224}{8} = -\frac{65}{8}$

$17 \cdot 17 = 289$

$g\left(\frac{2}{3}\right) = 18\cdot\frac{4}{9} - 51\cdot\frac{2}{3} + 28 = 8 - 34 + 28 = 2$

$g(2) = \frac{8-12}{6-2} = \frac{-4}{4} = -1$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\, tg\beta} = \frac{tg(\frac{3\pi}{4}) \pm tg(\arccos\frac{1}{\sqrt{17}})}{1 \mp tg(\frac{3\pi}{4})\, tg(\arccos\frac{1}{\sqrt{13}})}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

МФТИ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$144 \times 12 = 288 + 144 = 1728$

$169 \times 13 = 507 + 169 = 2197$

$(26x - x^2)^{\log_5 12} + 26x - x^2 \geq 13^{\log_5(26x - x^2)}$

$26x - x^2 = t.$

$p \leq 2.$ $\log_5 t \leq 2$

$t^{\log_5 12} + t \geq 13^{\log_5 t}.$

$t^{\log_5 12} + t \geq t^{\log_5 13}.$

$12^{\log_5 t} + t \geq 13^{\log_5 t}$

$\cancel{t\left(t^{\log_5 \frac{12}{5}} + 1\right) \geq t^{\log_5 13}}$

$\log_5 t = p, \quad t = 5^p.$

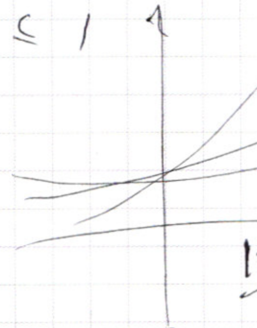
$t^{\log_5 \frac{12}{5}} + 1 \geq t^{\log_5 \frac{13}{5}}.$

$12^p + 5^p \geq 13^p$

$t^{\log_5 \frac{13}{5}} - t^{\log_5 \frac{12}{5}} \leq 1$

при $p = 2$. равенство

$12^p \ln 12 + 5^p \ln 5 \qquad 13^p \ln 13.$



$12^p + 5^p = 13^p$ при $p < 2$

$\left(\frac{12}{13}\right)^p + \left(\frac{5}{13}\right)^p \geq 1. \quad 12^p + 5^p \geq 13^p.$

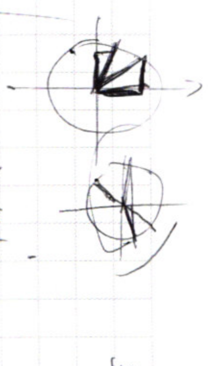
$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$2\sin\frac{2\alpha + 4\beta + 2\alpha}{2} \cos\frac{2\alpha + 4\beta - 2\alpha}{2} = -\frac{2}{17}$

$\sin(2\alpha + 2\beta)\cos 2\beta = -\frac{1}{17}$

$\Rightarrow \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$



$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}.$

$\sin 2\beta = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}.$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}.$

$\sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} \pm \frac{4}{\sqrt{17}} \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}.$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\cos 2\beta = -\sin(\frac{\pi}{2} - 2\beta).$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = \sin(2\beta - \frac{\pi}{2}).$

$\alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi n \qquad 2\alpha + 2\beta = 2\beta - \frac{\pi}{2} + 2\pi n \qquad 2\alpha + 2\beta = \pi - 2\beta + \frac{\pi}{2} + 2\pi n.$

$\boxed{tg\alpha = -1}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$2\alpha = \frac{3\pi}{2} - 4\beta + 2\pi n, \quad \alpha = \frac{3\pi}{4} + \pi n - \arccos\frac{1}{\sqrt{17}}$

$p \le 2$

$\log_5 t \le 2$

$0 < t \le 25$

$0 < 26x - x^2 \le 25$

$x^2 - 26x < 0$

$x(x-26) < 0$

0 26

$\cancel{28^{\log_8 12}}$ ~~144 + 28 ≥ 132~~

$t^{\log_5 12} + t \ge t^{\log_5 13}$

x

$-3x + 4 = \frac{8-6x}{3x-2}$

$(-3x+4)(3x-2) = 8 - 6x$

$-9x^2 + 6x + 12x - 8 = 8 - 6x$

$-9x^2 + 24x - 16 = 0$

$9x^2 - 24x + 16 = 0$

$\frac{D}{4} = 144 - 16 \cdot 9 = 0$

$x = \frac{12 \pm}{9} = \frac{4}{3}$ — касание в этой точке

$12^p + 5^p \ge 13^p$

$f(x) = 12^p + 5^p - 13^p$

$f'(x) = \ln 12 \cdot 12^p + \ln 5 \cdot 5^p - \ln 13 \cdot 13^p$

$x^2 - 26x + 25 \ge 0$

$(x-1)(x-25) \ge 0$

1 25

$[0;1] \cup [25;26)$

$12^p + 5^p \ge 13^p$

$0 < t \le 25$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)