

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg} \alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6}, \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω , а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D . Луч AD повторно пересекает Ω в точке E . Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC , повторно пересекает Ω в точке F . Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF , если известно, что $CD = \frac{15}{2}$, $BD = \frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leq x \leq 25$, $2 \leq y \leq 25$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x - 16}{4x - 5} \leq ax + b \leq -32x^2 + 36x - 3$$

выполнено для всех x на промежутке $[\frac{1}{4}; 1]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN . Известно, что $KL = 3$, $KM = 1$, $MN = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM . Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$$

$$\begin{aligned} \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha &= 2 \cdot \cos \frac{2\alpha + 4\beta - 2\alpha}{2} \cdot \sin \frac{2\alpha + 4\beta + 2\alpha}{2} = \\ &= 2 \cdot \cos 2\beta \cdot \sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{2}{5} \end{aligned}$$

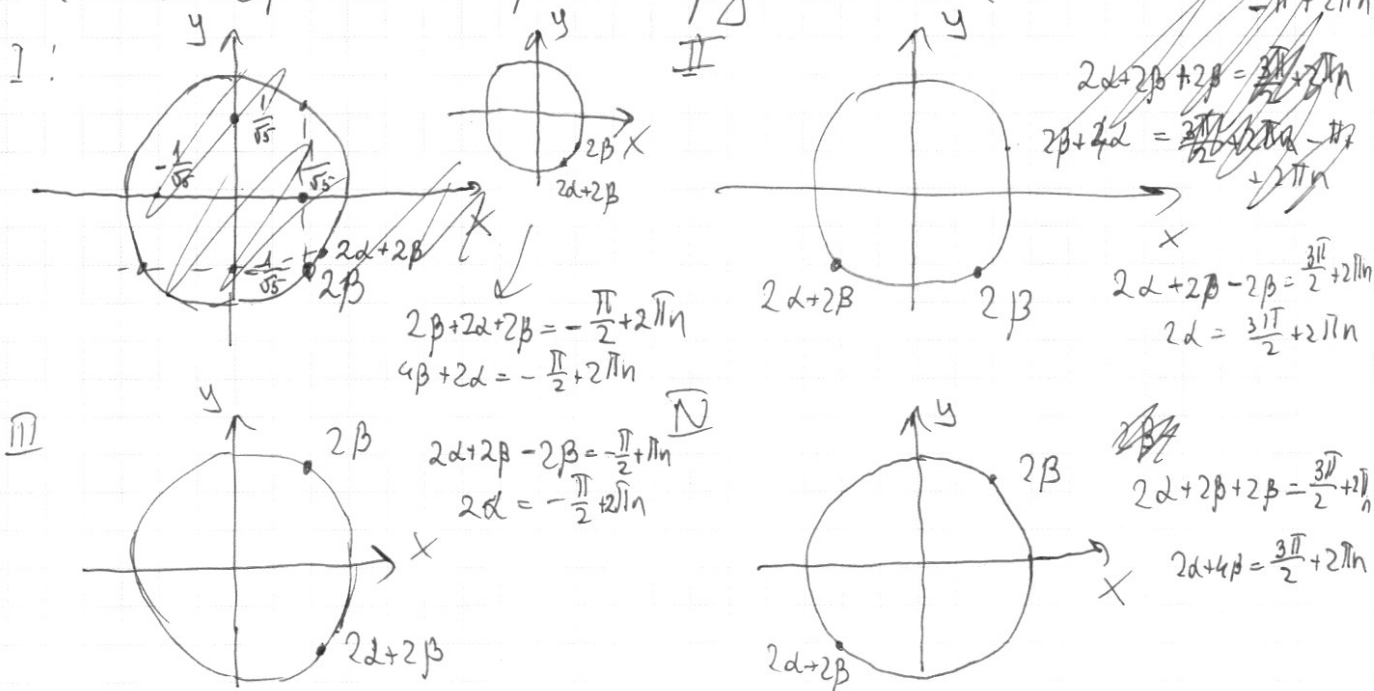
$$\cos 2\beta \cdot \sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{5}$$

$$\cos 2\beta \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{1}{5}$$

$$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{при этом заметим, что}$$

$$|\cos 2\beta| = |\sin(2\alpha + 2\beta)| \Rightarrow 2\alpha + 2\beta + 2\beta = \frac{\pi}{2}$$

изобразим возможные расположения углов 2β
и $2\alpha + 2\beta$ на трем окружностях



для удобства пусть $\pi=0$

тогда для I: $4\beta + 2\alpha = -\frac{\pi}{2}$

$$\sin(-\frac{\pi}{2}) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$$

$$\text{т.е. } -1 + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{3}{5} \quad \cos 2\alpha = \frac{4}{5}$$

$$2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{3}{5}$$

$$2 \cos^2 \alpha - 1 = \frac{4}{5}$$

$$\cos 2\alpha = -\frac{4}{5}$$

$$2 \cos^2 \alpha - 1 = -\frac{4}{5}$$

$$\sin \alpha = \frac{3}{10 \cos \alpha}$$

$$2 \cos^2 \alpha = \frac{9}{5}$$

$$2 \cos^2 \alpha = \frac{1}{5}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{9}{10}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{10}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3}{10 \cos^2 \alpha} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \quad \cos \alpha = \pm \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{10 \cos^2 \alpha} = 3$$

$$= \frac{1}{3}$$

~~для III~~

$$2\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$\sin(2\alpha) = \sin(\frac{\pi}{2} + 2\pi k)$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin(\frac{\pi}{4})}{\cos(\frac{\pi}{4})} = 1$$

для II $2\alpha = \frac{3\pi}{2}$

$$\alpha = \frac{3\pi}{4}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -1$$

~~для III~~

~~$2\alpha = -\frac{\pi}{2}$ и IV аналогично~~

~~для II~~

$$4\alpha + 2\beta = -\pi$$

$$\sin(-\pi) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$$

$$\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$$

для III и IV аналогично

I и II \Rightarrow

Ответ $\operatorname{tg} \alpha = \{-1; \frac{1}{3}; 3\}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sqrt{2} \begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6} \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45 \end{cases} \quad \begin{cases} (x-6) - 6(2y-1) = \sqrt{(x-6)(2y-1)} \\ x^2 - 12x + 36 + 36y^2 - 36y + 9 - 45 = 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-6) - 6(2y-1) = \sqrt{(x-6)(2y-1)} \\ (x-6)^2 + (6y-3)^2 = 90 \end{cases}, \text{ пусть } \begin{cases} x-6 = a \\ 2y-1 = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - 6b = \sqrt{ab} \\ a^2 + (3b)^2 = 90 \end{cases} \quad \begin{cases} a - 6b = \sqrt{ab} \Rightarrow a \geq 6b \\ a^2 + 9b^2 = 90 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{но если } a = 6b \\ 0 = \sqrt{ab} \Rightarrow a = 0 \text{ } b = 0 \\ 0 + 0 = 90, \text{ неверно} \\ a > 6b \end{array}$$

$$a - 6b = \sqrt{ab}$$

$$(a - 6b)^2 = ab$$

$$a^2 - 12ab + 36b^2 = ab$$

$$a^2 - 13ab + 36b^2 = 0$$

$$D = (13b)^2 - 4 \cdot 36b^2 = 169b^2 - 144b^2 = 25b^2$$

$$a = \frac{13b \pm 5b}{2} = \begin{cases} 9b, \text{ если } b > 0 \\ 4b, \text{ если } b < 0 \end{cases}$$

$$a^2 + 9b^2 = 90$$

$$a = 9b$$

$$81b^2 + 9b^2 = 90$$

$$b^2 = 1 \quad b = \pm 1$$

$$b = -1 \text{ не подходит} \Rightarrow b = 1$$

$$a = 4b$$

$$16b^2 + 9b^2 = 90$$

$$b^2 = \frac{90}{25} = \frac{18}{5}$$

$$b = \pm 3\sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$b = 3\sqrt{\frac{2}{5}} - \text{не подходит, } m < 0$$

$$\Rightarrow b = -3\sqrt{\frac{2}{5}} \\ a = -12\sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$2y-1=1 \quad x-6=9$$

$$y=1 \quad x=15$$

$$y = \frac{-3\sqrt{\frac{2}{5}} + 1}{2}$$

$$\downarrow$$

$$2y-1 = -3\sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$x-6 = -12\sqrt{\frac{2}{5}}$$

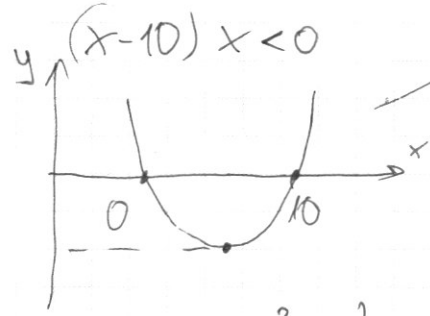
$$x = -12\sqrt{\frac{2}{5}} + 6$$

Ответ: (15; 1)

$$\left(-12\sqrt{\frac{2}{5}} + 6; \frac{-3\sqrt{\frac{2}{5}} + 1}{2} \right)$$

$$10x + |x^2 - 10x| \log_3 4 \geq x^2 + 5 \log_3 (10x - x^2)$$

ОДЗ: $10x - x^2 > 0$



парабола ветвями вниз
~~или~~ минимум в вершине $\Rightarrow x_{\min} = \frac{-b}{2a} = \frac{10}{2} = 5$
 $x \in (0; 10)$ $y_{\min} = 25 - 50 = -25$

пусть $10x - x^2 = t$, $t > 0$
 $t \in (0; 25]$

$$10x - x^2 + (10x - x^2) \log_3 4 \geq 5 \log_3 (10x - x^2)$$

$$t + t \log_3 4 \geq 5 \log_3 t$$

заметим, что при $t=9$, при $t > 9$ неравенство неверно, тк пусть

$$9 + 9 \log_3 4 \geq 5 \log_3 9$$

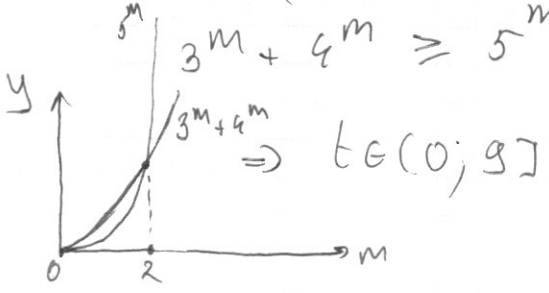
$$9 + 3 \log_3 4^2 \geq 5^2$$

$$9 + 16 \geq 25$$

$$25 \geq 25$$

$t = 3^m$, тогда
 $3^m + (3 \log_3 4)^m \geq 5 \log_3 3^m$

$$3^m + 4^m \geq 5^m$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$0 < 10x - x^2 \leq 9$$

$$\begin{cases} 10x - x^2 > 0 \\ 10x - x^2 \leq 9 \end{cases}$$

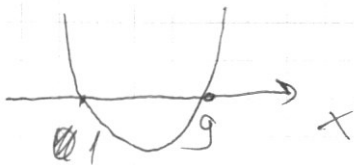
$$\begin{cases} x \in (0; 10) \\ x^2 - 10x + 9 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (0; 10) \\ x \in (-\infty; 1] \cup [9; +\infty) \end{cases}$$

$$x \in (0; 1] \cup [9; 10)$$

$$x^2 - 10x + 9 \geq 0$$

$$(x-1)(x-9) \geq 0$$



$$x \in (-\infty; 1] \cup [9; +\infty)$$

Ответ: $x \in (0; 1] \cup [9; 10)$

№5

Запишем $f(x)$ для простых

$$f(2) = [0, 5] = 0 \quad f(11) = [2, 75] = 2$$

$$f(3) = [0, 75] = 0 \quad f(13) = [3, 25] = 3$$

$$f(5) = [1, 25] = 1 \quad f(17) = [4, 25] = 4$$

$$f(7) = [1, 75] = 1 \quad f(19) = [4, 75] = 4$$

$$f(23) = [5, 75] = 5, \text{ тогда}$$

$$f(4) = f(2 \cdot 2) = f(2) + f(2) = 0 + 0 = 0$$

$$f(6) = f(2 \cdot 3) = f(2) + f(3) = 0 + 0 = 0$$

$$f(8) = f(4 \cdot 2) = f(4) + f(2) = 0 + 0 = 0$$

$$f(9) = f(3 \cdot 3) = f(3) + f(3) = 0$$

$$f(10) = f(5 \cdot 2) = f(5) + f(2) = 1 + 0 = 1$$

$$f(12) = f(4 \cdot 3) = f(4) + f(3) = 0$$

$$f(14) = \overset{f(7 \cdot 2)}{f(7)} + f(2) = 1 + 0 = 1$$

$$f(15) = f(5 \cdot 3) = f(5) + f(3) = 1 + 0 = 1$$

$$f(16) = f(4 \cdot 4) = f(4) + f(4) = 0$$

$$f(18) = f(9 \cdot 2) = f(9) + f(2) = 0$$

$$f(20) = f(4 \cdot 5) = f(4) + f(5) = 1$$

$$f(21) = \overset{f(7 \cdot 3)}{f(7)} + \overset{f(11 \cdot 2)}{f(3)} = 1$$

$$f(22) = f(11) + f(2) = 2 + 0 = 2$$

$$f(24) = f(12 \cdot 2) = f(12) + f(2) = 0$$

$$f(25) = f(5 \cdot 5) = f(5) + f(5) = 2$$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$, также заметим, что

$$f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y) = f\left(\frac{x}{y} \cdot y\right) = f(x), \text{ но т.к. } f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$$

$\Rightarrow f(y) > f(x)$, посчитаем

сколько $f(t) \in 0$, затем 1, затем 2 ... 5

0: 10

1: 7

2: 3

3: 1

4: 2

5: 1

- заметим, что 10 чисел, при которых $f=0$,

будут меньше остальных 14 \Rightarrow в этом

случае ~~и~~ комбинаций, когда $f(y) > f(x)$

будет: $14 \cdot 10 = 140$

для $f=1$: $7 \cdot (3+1+2+1) = 49$

для $f=2$: $3 \cdot (1+2+1) = 12$

для $f=3$: $1 \cdot (2+1) = 3$

для $f=4$: $2 \cdot 1 = 2$

для $f=5$: 0

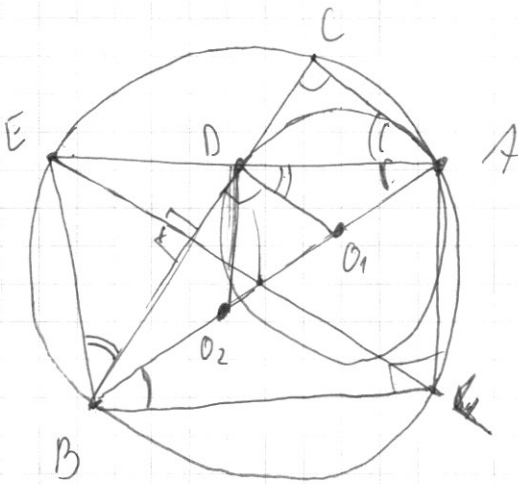
$$140 + 49 + 12 + 3 + 2 =$$

$$\Rightarrow \text{всего} = 206$$

\Rightarrow Ответ: 206

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4.



$$CD = \frac{15}{2}$$

$$BD = \frac{17}{2}$$

O_1 - центр ω

O_2 - центр Ω

точка A, точка касания \Rightarrow
если через неё провести касательную ℓ и из центров окр. провести к точке A прямые, то эти прямые будут \perp кас. \Rightarrow

эти прямые совпадают, тогда AB - проходит через O_1 и O_2

пусть радиус $\omega = r$
радиус $\Omega = R$

1) Проведём O_1D (радиус к т. касательной)
 $O_1D \perp BC$

2) $\angle BCA$ - прямой, тк опирается на диаметр
 $\Rightarrow AC \perp BC$

3) $\triangle BO_1D \sim \triangle BAC$, тк. BC общ. прям.
AB общ. прям.

и $AC \parallel DO_1$ (перпендикулярны одной прямой)
 $\Rightarrow \frac{BD}{BD+DC} = \frac{BO_1}{AB}$ $\begin{matrix} AB = 2R \\ BO_1 = 2R - r \end{matrix}$

$$\frac{\frac{17}{2}}{\frac{17}{2} + \frac{15}{2}} = \frac{2R - r}{2R}$$

$$\frac{17}{32} = \frac{2R - r}{2R}$$

$$34R = 64R - 32r$$

$$30R = 32r$$

$$r = \frac{15}{16}R$$

$$BO_1 = 2R - \frac{15}{16}R = \frac{17}{16}R$$

4) Рассмотрим $\triangle O_1BD$

по теор. Пифагора

$$BO_1^2 = O_1D^2 + BD^2$$

$$\left(\frac{17}{16}R\right)^2 = r^2 + \left(\frac{17}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{17}{16}R\right)^2 = \left(\frac{15}{16}\right)^2 R^2 + \left(\frac{17}{2}\right)^2$$

$$\frac{289 - 225}{256} R^2 = \frac{289}{4}$$

$$\frac{64}{256} R^2 = \frac{289}{4}$$

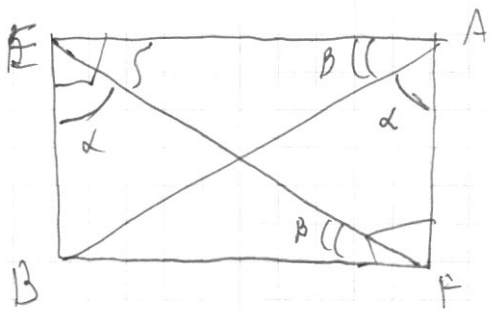
$$\frac{8}{16} R = \frac{17}{2}$$

$$R = \frac{2 \cdot 17}{2} = 17$$

$$r = \frac{15}{16} \cdot 17 = \frac{255}{16}$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times 17 \\ \hline 105 \\ 150 \\ \hline 255 \end{array}$$

5) Рассмотрим $AFBE$, он вписанный



Ответ: $R_{\Omega} = 17$

$$r_{\omega} = \frac{255}{16}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.

$$\frac{16x-6}{4x-5} \leq ax+b \leq -32x^2+36x-3$$

$$\frac{16x-6}{4x-5} = \frac{(16x-20)+4}{4x-5} = 4 + \frac{4}{4x-5} - \text{гипербола}$$



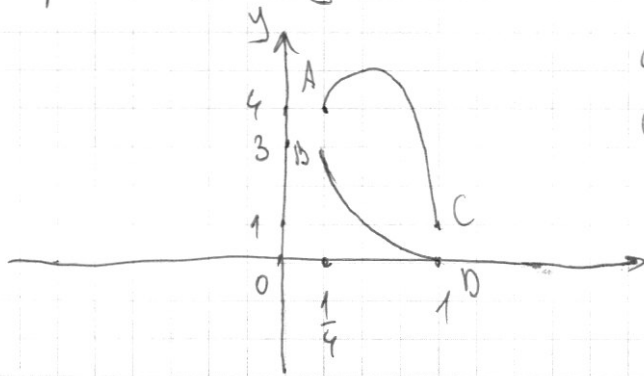
при $x = \frac{1}{4}$ $y = 3$
при $x = 1$ $y = 0$

$$-32x^2 + 36x - 3 = 0$$

вершина $x = \frac{-b}{2a} = \frac{36}{2 \cdot (-32)} = \frac{9}{16}$

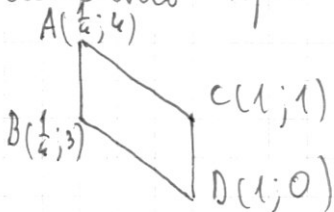
при $x = \frac{1}{4}$ $y = -\frac{32}{16} + \frac{36}{4} - 3 = 4$

при $x = 1$ $y = -32 + 36 - 3 = 1 \Rightarrow$ на графике.



$ax+b$ - прямая, которая
должна всегда проходить
~~через параллельные параллельные~~

лежит при $x \in [\frac{1}{4}; 1]$ в четырёх параллельных границах ABCD



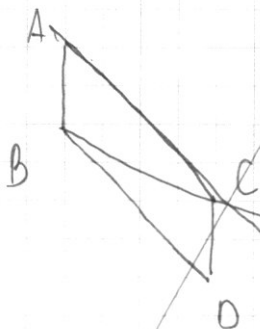
\Rightarrow если из крайних условий прямая
ещё проходит через точку C, тогда крайние
точки A и B
прямая должна входить через отрезок AB,
а выходить через CD

если A и C

$$\begin{aligned}
 1 &= a + b \\
 4 &= \frac{1}{4}a + b \\
 3 &= -\frac{3}{4}a \\
 a &= -4 \\
 b &= 5
 \end{aligned}$$

если B и C

$$\begin{aligned}
 1 &= a + b \\
 3 &= \frac{1}{4}a + b \\
 2 &= -\frac{3}{4}a \\
 a &= -\frac{8}{3} \\
 b &= \frac{11}{3}
 \end{aligned}$$



если A и D

$$\begin{aligned}
 0 &= a + b \\
 4 &= \frac{1}{4}a + b \\
 4 &= -\frac{3}{4}a \\
 a &= -\frac{16}{3} \\
 b &= \frac{16}{3}
 \end{aligned}$$

если B и D

$$\begin{aligned}
 0 &= a + b \\
 3 &= \frac{1}{4}a + b \\
 3 &= -\frac{3}{4}a \\
 a &= -4 \\
 b &= 4
 \end{aligned}$$

\Rightarrow точка на AB $(\frac{1}{4}; t)$ $t \in [3; 4]$
 на CD $(1; m)$ $m \in [0; 1]$

$$\begin{aligned}
 t &= \frac{a}{4} + b \\
 m &= a + b \\
 (t - m) &= -\frac{3}{4}a \\
 a &= \frac{4}{3}m - \frac{4}{3}t \\
 b &= \frac{4}{3}t - \frac{1}{3}m
 \end{aligned}$$

Ответ: $(\frac{4}{3}m - \frac{4}{3}t; \frac{4}{3}t - \frac{1}{3}m)$,
 где $t \in [3; 4]$
 $m \in [0; 1]$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

--	--

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y) = f(x)$$

$$f(x) < f(y)$$

2 3 5 7 11 13 17 19 23

$f(17)$

$$f(2) = 0$$

$$f(11) = 2$$

$$f(23) = 5$$

$$f(3) = 0$$

$$f(13) = 3$$

$$f(5) = 1$$

$$f(17) = 4$$

$$f(7) = 1$$

$$f(19) = 4$$

$$f(4) = f(2) + f(2) = 0$$

$$f(6) = f(2) + f(3) = 0$$

$$f(8) = f(4) + f(2) = 0$$

$$f(9) = 2f(3) = 0$$

$$f(10) = f(2) + f(5) = 1$$

$$f(12) = f(4) + f(3) = 0$$

$$f(14) = f(7) + f(2) = 1$$

$$f(15) = f(5) + f(3) = 1$$

$$f(16) = f(8) + f(2) = 0$$

$$f(18) = f(9) + f(2) = 0$$

$$f(20) = f(4) + f(5) = 1$$

$$f(21) = f(7) + f(3) = 1$$

$$f(22) = f(11) + f(2) = 2$$

$$f(24) = f(12) + f(2) = 0$$

$$f(25) = 2f(5) = 2$$

$$0! = 10$$

$$130$$

$$1! = 7$$

$$42$$

$$2! = 3$$

$$9$$

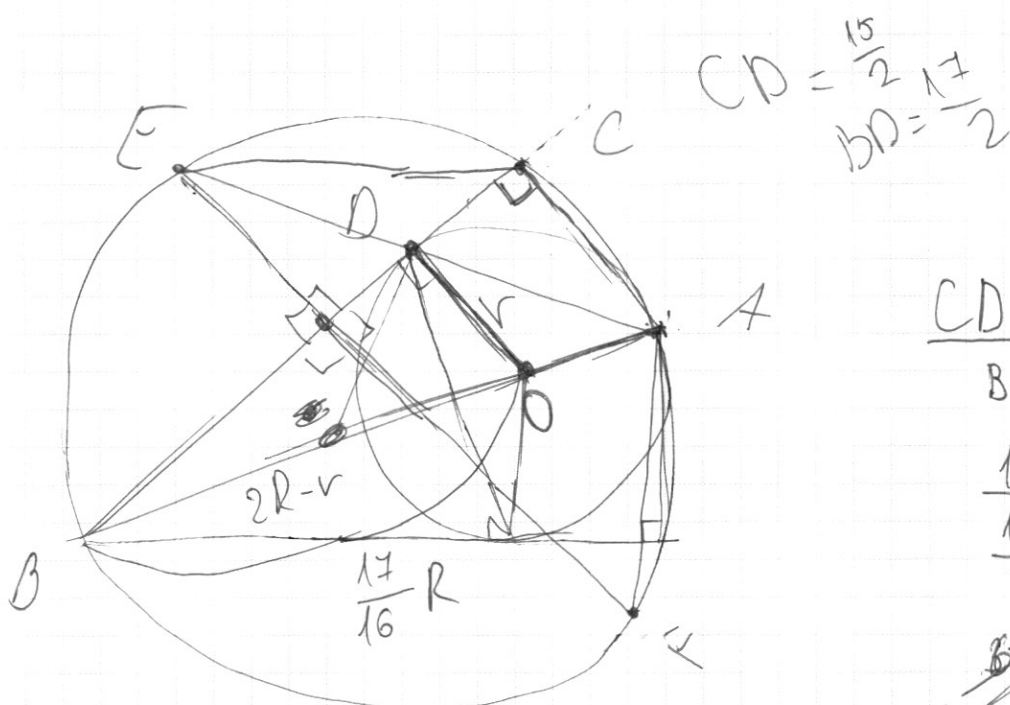
$$3! = 1$$

$$2$$

$$4! = 2$$

$$183$$

$$5! = 1$$



$$CD = \frac{15}{2}$$

$$BD = \frac{17}{2}$$

$$\frac{CD + BD}{BD} = \frac{r}{AC} = \frac{2R - r}{2R}$$

$$\frac{16}{\frac{17}{2}} = \frac{2R - r}{2R}$$

~~$$\frac{16}{17} = \frac{2R - r}{2R}$$~~

$$\frac{16}{\frac{17}{2}} = \frac{2R - r}{2R - r}$$

~~$$\frac{16}{17} = \frac{R}{2R - r}$$~~

~~$$32R - 16r = 17R$$~~

~~$$15R = 16r$$~~

~~$$\frac{R}{r} = \frac{16}{15}$$~~

~~$$\frac{R}{r} = \frac{16}{15}$$~~

$$-20 \quad 30 \quad b = -5$$

$$a - 6b > 0$$

$$a > 6b$$

$$4 \cdot -5 > 6 \cdot -5 \quad r = \frac{15}{16} R$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{5}$$

$$(4 < 6) \quad 2R - \frac{15}{16} R \quad \frac{1}{9} + \frac{1}{16} = \frac{1}{25}$$

$$\frac{17}{16} R \quad t = 1 \quad 1 + \dots \geq 1$$

$$\left(\frac{17}{16} R\right)^2 = \left(\frac{15}{16} R\right)^2 + \left(\frac{17}{2}\right)^2$$

$$\frac{17^2}{16^2} R^2 = \frac{15^2}{16^2} R^2 + \frac{17^2}{2^2}$$

~~$$\frac{289}{256} R^2 = \frac{225}{256} R^2 + \frac{289}{4}$$~~

$$\frac{8^2}{16^2} R^2 = \frac{17^2}{2^2}$$

$$\frac{8}{16} R = \frac{17}{2}$$

$$R = \frac{17 \cdot 17}{15 \cdot 16}$$

$$r = \frac{15 \cdot 17}{16}$$

$$t = 3^m$$

$$3^m + 4^m = 5^m$$

$$\frac{3\pi}{6}$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{5\pi}{6}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin 0 + \sin$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2 \cdot \frac{\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}}{2}$$

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}$$

$$\sin(\alpha + \beta) =$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \cdot \left(\sin$$

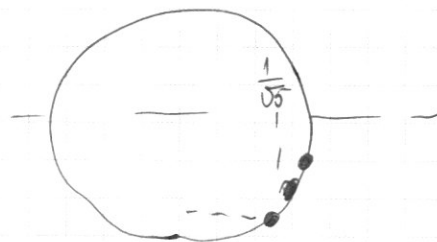
$$\sin(\alpha) + \sin\beta = 2 \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\frac{2\alpha + 4\beta - 2\alpha}{2}$$

$$2 \cos 2\beta \cdot \sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{2}{5}$$

$$\cos 2\beta \cdot \sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{5}$$

$$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$



$$2\alpha + 2\beta + 2\beta = 90^\circ$$

$$2\alpha$$

$$ax+b \geq \frac{16x-16}{4x-5}$$

$$\frac{16x-20+4}{4x-5}$$

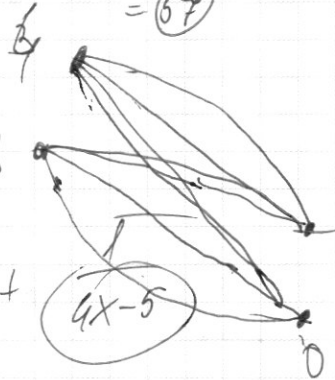
$$\frac{4(4x-5)+4}{4x-5} = 4 + \frac{4}{4x-5}$$

$$4 + \frac{4}{4}$$

$$4^2 \cdot 9^2 - 4 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 3$$

a

$$31-24 = 7$$



$$4x-5 = -1$$

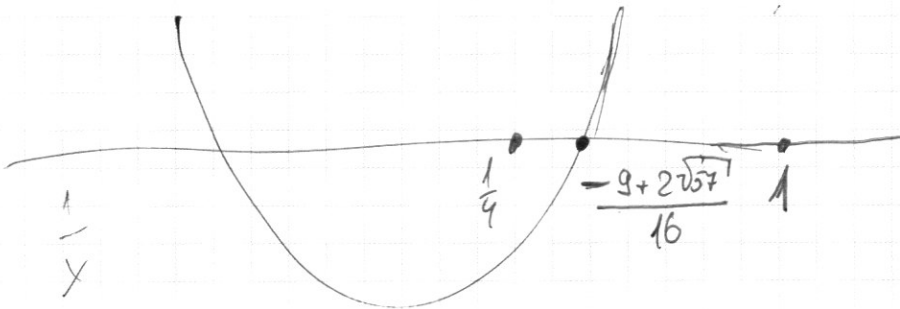
$$4x = 4$$

$$x = 1$$

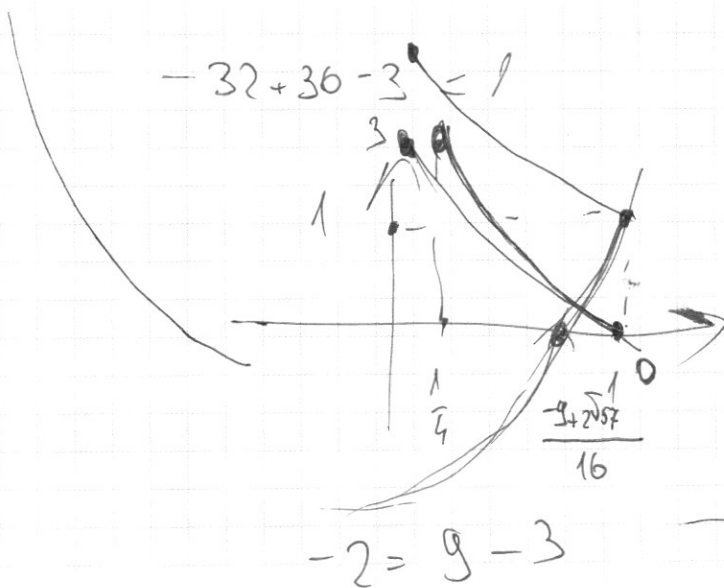
$$ax+b \leq -32x^2 + 36x - 3$$

$$D = 18^2 - 96 = 324 - 96 = 228 = 57 \cdot 4$$

$$x_{1,2} = \frac{-18 \pm 2\sqrt{57}}{-32} = \frac{-9 \pm 2\sqrt{57}}{-16} = 9 \mp$$



1-5



$$\frac{4-16}{1-5} = \frac{-12}{-4} = 3$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x - 12y = \sqrt{(2y-1)(x-6)}$$

$$\begin{cases} x \geq 6 \\ y \geq 0,5 \end{cases}$$

$$x^2 - 24xy + 144y^2 = 2xy - 12y - x + 6$$

$$\begin{cases} x < 6 \\ y < 0,5 \end{cases}$$

$$x^2 - 26xy + x + 144y^2 + 12y - 6 = 0$$

$$26xy - 13x - 108y^2 - 48y = 39$$

$$\begin{array}{r} 4212 \\ - 576 \\ \hline 3636 \end{array}$$

$$108y^2 + y(48 - 26x) + 39 + 13x = 0$$

$$D = \frac{(24 - 13x)^2 - (39 + 13x) \cdot 108}{4} =$$

$$= \frac{576 + 169x^2 - 624x - 39 \cdot 108 - 13x \cdot 108}{4}$$

$$\begin{array}{r} 108 \\ + 39 \\ \hline 972 \\ 324 \\ \hline 4212 \end{array} \quad \begin{array}{r} 24 \\ + 13 \\ \hline 72 \\ 240 \\ \hline 312 \end{array}$$

$$= 576 + 169x^2 - 24 \cdot 13 \cdot 2x - 39 \cdot 9 \cdot 12 - 13 \cdot 9 \cdot 12x =$$

$$= -3636 + 169x^2 - 5 \cdot 13 \cdot 12x = 169x^2 - 780x - 3636$$

$$x^2 - 12x + 36 + 36y^2 - 36y + 9 = 90$$

$$(x-6)^2 + (6y-3)^2 = 90$$

$$(x-6)^2 + 9(2y-1)^2 = 90$$

$$a - 6b$$

$$x - 6 - 12y + 6$$

$$x - 2y$$

$$a^2 + b^2 = 90$$

$$a - 6b = \sqrt{ab}$$

$$a^2 - 12ab + 36b^2 = ab$$

$$90 + 27b^2 = 13ab$$

$$a = \frac{90}{13b} + \frac{27}{13}b$$

$$\left(\frac{90}{13}\right)^2 \frac{1}{b^2} + \frac{90 \cdot 27 \cdot 2}{169} + \frac{27^2}{13^2} \cdot b^2 + b^2 = 96 \quad | \cdot b^2$$

$$\frac{8100}{169} + \frac{4860 - 90 \cdot 169}{169} b^2$$

$$\begin{array}{r} \times \frac{169}{9} \\ 81 \\ 54 \\ 9 \\ \hline 1521 \end{array}$$

$$\frac{8100}{169} - \frac{1521}{169} b^2 +$$

$$\frac{90^2}{169} + \left(\frac{90 \cdot 27 \cdot 2}{169} - \frac{90 \cdot 169}{169}\right) b^2 +$$

$$+ \frac{27^2 + 169}{169} b^4 = 0$$

$$\begin{array}{r} \cancel{27} \\ 279 \\ + 169 \\ \hline 898 \end{array}$$

$$90 \neq -115b^2 + \frac{27^2 + 169}{90} b^4 = 0$$

$$b^2 = 115^2 - 898 \cdot 4 = 9633$$

$$\begin{array}{r} 115^2 \\ 115 \\ \hline 575 \\ 115 \\ \hline 13225 \\ 13225 \\ - 3592 \\ \hline 9633 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 898 \\ 4 \\ \hline 3592 \end{array}$$

$$9^{\log_3 9} + 9 \geq 5^2$$

$$3^{\log_3 4^2} + 9 \geq 5^2$$

$$4^2 + 9 \geq 5^2$$

$$16 + 9 \geq 25$$

$$a = 3$$

$$10x + |x^2 - 10x| \log_3 a \geq x^2 + 5 \log_3(10x - x^2)$$

$$|a| \log_3 a \geq a + 5 \log_3(-a)$$

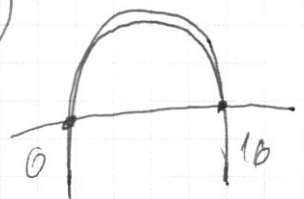
пусть $a = -x^2 + 10x$

$$a \log_3 a + a \geq 5 \log_3 a$$

$$a \left(a^{\log_3 a - \log_3 5} + 1 \right) \geq 5 \log_3 a$$

$$a \in (0; 25]$$

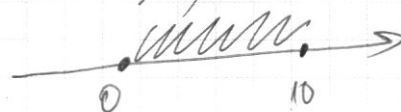
$$a < 0$$



$$10x - x^2 > 0$$

$$(10-x)x > 0 \quad (x-10)x < 0$$

$$x \in (0; 10)$$



$$x \in (0; 10)$$