МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6}, \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x + \left|x^2 - 10x\right|^{\log_3 4} \geqslant x^2 + 5^{\log_3\left(10x - x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{15}{2}$, $BD = \frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 25$, $2 \leqslant y \leqslant 25$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x - 16}{4x - 5} \leqslant ax + b \leqslant -32x^2 + 36x - 3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL = 3$, $KM = 1$, $MN = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. Пусть $x=2\alpha+2\beta$, $y=2\beta$, тогда $\sin x=-\frac{1}{\sqrt5}$,

$\sin(x+y)+\sin(x-y)=-\frac{2}{5} \Leftrightarrow 2\sin x\cos y=-\frac{2}{5} \Rightarrow \sin x\cos y=-\frac{1}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{1}{\sqrt5}\cos y=-\frac{1}{5} \Rightarrow \cos y=\frac{1}{\sqrt5}$. Тогда $\sin y=\pm\sqrt{1-\frac{1}{5}}=\pm\frac{2}{\sqrt5}$.

$\sin x=\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow$ ~~$\sin 2\alpha\cos 2\beta+\cos 2\alpha\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt5}\sin 2\alpha+\frac{2}{\sqrt5}\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}$~~ $\Rightarrow \sin(2\alpha)=\sin(2\alpha+2\beta-2\beta)=\sin(x-y)=$

$=\sin x\cos y-\cos x\sin y = -\frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac{1}{\sqrt5}-\left(\pm\frac{2}{\sqrt5}\right)\cdot\left(\pm\frac{2}{\sqrt5}\right)=-\frac{1}{5}\pm\frac{4}{5}\in\{-\frac{3}{5};1\}$.

~~$\cos 2\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2 2\alpha} \Rightarrow \cos 2\alpha\in\{0;\pm\frac{4}{5}\}$.~~

Если $\sin 2\alpha=1$: $2\alpha=2\pi n+\frac{\pi}{2}, n\in\mathbb{Z} \Rightarrow \alpha=\pi n+\frac{\pi}{4}, n\in\mathbb{Z} \Rightarrow tg\alpha=1$.

Если $\sin 2\alpha=-\frac{3}{5}$: $\cos 2\alpha=\pm\frac{4}{5}$, тогда $\sin\alpha=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1\pm\frac{4}{5}}{2}} \Rightarrow \sin\alpha\in\{\pm\frac{1}{\sqrt{10}};\pm\frac{3}{\sqrt{10}}\}$.

$\cos\alpha\in\{\pm\sqrt{1-\frac{1}{10}};\pm\sqrt{1-\frac{9}{10}}\}=\{\pm\frac{3}{\sqrt{10}};\pm\frac{1}{\sqrt{10}}\}$.

Если $\sin\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{10}}$, то $tg\alpha=\pm\frac{\frac{1}{\sqrt{10}}}{\frac{3}{\sqrt{10}}}=\pm\frac{1}{3}$; если $\sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}$, то $tg\alpha=\pm\frac{\frac{3}{\sqrt{10}}}{\frac{1}{\sqrt{10}}}=\pm3$.

Но $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha<0$, значит, $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ имеют разные знаки $\Rightarrow$

$\Rightarrow tg\alpha<0 \Rightarrow tg\alpha\in\{-3;-\frac{1}{3}\}$.

Значит, $tg\alpha\in\{-\frac{1}{3};1;-3\}$. Так как не менее 3 ответов, все выполн.

Ответ: $tg\alpha\in\{-\frac{1}{3};1;3\}$

№5. $0=f(1)=f(x\cdot\frac{1}{x})=f(x)+f(\frac{1}{x}) \Rightarrow f(\frac{1}{x})=-f(x)$

$f(\frac{x}{y})=f(x\cdot\frac{1}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})=f(x)-f(y)$

Значит, количество пар (x,y) таких, что $f(\frac{x}{y})<0$, равно количеству пар $(x;y)$ таких, что $f(x)<f(y)$, или половине кол.-ва пар $(x;y)$ таких, что $f(x)\neq f(y)$.

Найдём $f(x)$ для $2\leq x\leq 25$:

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
f(x)	0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0	4	0	4	1	1	2	5	0	2

Всего 0 встретился 10 раз, 1 – 7 раз, 2 – 3 раза, 3 – 1 раз, 4 – 2 раза, 5 – 1 раз.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №1
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Значит, всего пар $(x;y) \mid f(x)=f(y)$

$10^2+7^2+3^2+1^2+2^2+1^2 = 164$ (т.к. если значение повторяется k раз, то существует k^2 пар $(x;y)$ таких, что $f(x)$, $f(y)$ равны этому значению).

Всего любых пар $(x;y) \mid 2 \le x, y \le 25$

$24 \cdot 24 = 576$, значит, пар $(x;y) \mid f(x) \ne f(y)$

$576 - 164 = 412$, тогда пар $(x;y) \mid f(\frac{x}{y}) < 0$

$\frac{412}{2} = 206$. Ответ: 206.

№2. $\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6}; \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-6) - 6(2y-1) = \sqrt{(x-6)(2y-1)}; \\ (x^2 - 12x + 36) + (6y-3)^2 = 36 - 9 = 45. \end{cases}$

$\begin{cases} (x-6) - 6(2y+1) = \sqrt{(x-6)(2y-1)} \\ (x-6)^2 + 9(2y-1)^2 = 90. \end{cases}$ Пусть $a = x+6$, $b = 2y+1$. Тогда

$\begin{cases} a - 6b = \sqrt{ab}; \\ a^2 + 9b^2 = 90. \end{cases}$ При усл. $ab<0$: $\begin{cases} (a-6b)^2 = ab; \\ a^2 + 9b^2 = 90. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 12ab + 36b^2 = ab; \\ a^2 + 9b^2 = 90. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 13ab + 36b^2 = 0; \ (1) \\ a^2 + 9b^2 = 90. \ (2) \end{cases}$

~~Пусть $k = \frac{a}{b}$, тогда поделим~~ Предположим, что $b = 0$. Тогда $a^2 = 90 \Rightarrow a \ne 0$, но по 1-му ур-ю $a^2 - 13a \cdot 0 + 36 \cdot 0^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$, противоречие.

Значит, $b \ne 0$. Поделим (1) на b^2: $\frac{a^2}{b^2} - 13\frac{ab}{b^2} + 36 = 0$

$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 13 \cdot \frac{a}{b} + 36 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b} - 4\right)\left(\frac{a}{b} - 9\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{a}{b} = 4; \\ \frac{a}{b} = 9. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 4b; \\ a = 9b. \end{array}\right.$

Первый случай. $a = 4b$, тогда (2) имеет вид $16b^2 + 9b^2 = 90 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 25b^2 = 90 \Leftrightarrow b = \pm\sqrt{\frac{25}{90}} = \pm\frac{5}{3\sqrt{10}}$, $a = \pm\frac{20}{3\sqrt{10}}$ ($ab > 0 \Rightarrow$ a и b одного знака).

~~Если $(a;b) = \left(\frac{5}{3\sqrt{10}}; \frac{20}{3\sqrt{10}}\right)$, то $a \ldots$~~

Второй случай. $a = 9b$, тогда (2) имеет вид $81b^2 + 9b^2 = 90 \Leftrightarrow 90b^2 = 90 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow b = \pm 1$, $a = \pm 9$ (a и b одного знака). Тогда

$x + 6 = a \Rightarrow x = a - 6$, $2y + 1 = b \Rightarrow y = \frac{b-1}{2}$. $(b, a) \in \left\{\left(\frac{5}{3\sqrt{10}}; \frac{20}{3\sqrt{10}}\right); \left(-\frac{5}{3\sqrt{10}}; -\frac{20}{3\sqrt{10}}\right); (1;9); (-1;-9)\right\} \Rightarrow$

$$\boxed{\Rightarrow (x;y) \in \left\{\left(\frac{20}{3\sqrt{10}} - 6; \frac{5 - 3\sqrt{10}}{6\sqrt{10}}\right), \left(6 - \frac{20}{3\sqrt{10}}; \frac{3\sqrt{10} - 5}{6\sqrt{10}}\right), (3;0), (-3;0)\right\}.}$$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

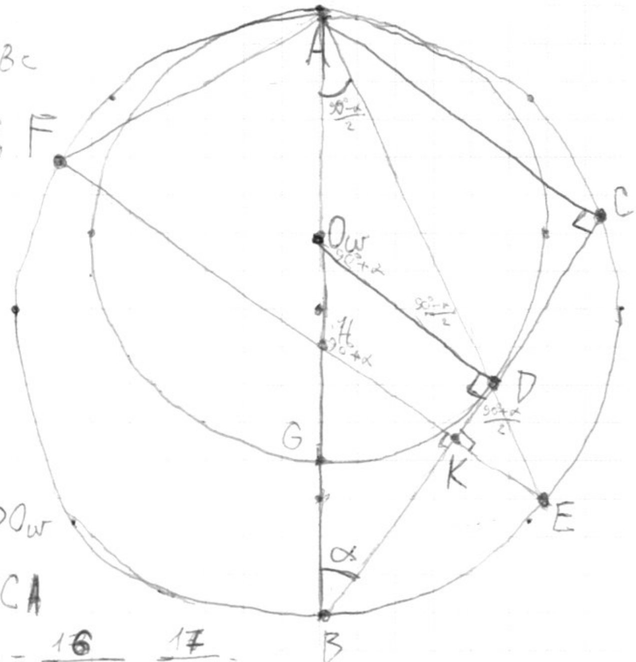
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



№4. ~~Обо~~ Пусть G и H – пересечения AB с ω и EF соотв., K – пересечение BC и EF, R – радиус Ω, r – радиус ω, $\alpha = \angle ABC$. O_ω – центр ω. Ст. точки B отн. ω равна ~~$BD \cdot BC = BD(BD+CD)$~~ $= BD^2 = \left(\frac{17}{2}\right)^2 = \frac{289}{4}$. Значит,

$AB \cdot BO_\omega = \frac{289}{4} \Rightarrow 2R(2R-2r) = \frac{289}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow R(R-r) = \frac{289}{16}$. Из прямоуг. $\triangle BDO_\omega$

$2R-r = BO_\omega = \frac{BD}{\cos\alpha} = \frac{17}{2\cos\alpha}$, из прямоуг. $\triangle BCA$

$2R = AB = \frac{BC}{\cos\alpha} = \frac{16}{\cos\alpha}$. Тогда $r = 2R-(2R-r) = \frac{16}{\cos\alpha} - \frac{17}{2\cos\alpha} =$

$= \frac{32-17}{2\cos\alpha} = \frac{15}{2\cos\alpha}$, $R = \frac{2R}{2} = \frac{8}{\cos\alpha} \Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{\frac{8}{\cos\alpha}}{\frac{15}{2\cos\alpha}} = \frac{16}{15} \Rightarrow R = \frac{16}{15}r$.

Тогда ~~$2R(2R-2r) = \frac{16}{15} \cdot 2r($~~ $R(R-r) = \frac{16}{15}r\left(\frac{16}{15}r - r\right) = \frac{16}{15}r \cdot \frac{1}{15}r =$

$= \left(\frac{4}{15}r\right)^2 = \frac{289}{16} \Rightarrow \frac{4}{15}r = \frac{17}{4} \Rightarrow r = \frac{255}{16}$, $R = \frac{16}{15} \cdot \frac{255}{16} = 17 \Rightarrow$ ~~$\cos\alpha$~~

$17 = R = \frac{8}{\cos\alpha} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{8}{17}$. $\angle AHE = \alpha + 90°$ как внешний угол

$\triangle BKH$, $\angle AFE = \frac{\angle AHE}{2} = \frac{90°+\alpha}{2}$ как вписанный. $\cos\angle AHE = \cos(90°+\alpha) =$

$= -\sin\alpha = -\sqrt{1-\left(\frac{8}{17}\right)^2} = -\frac{15}{17} \Rightarrow$ ~~$\cos 2$~~ $1-2\sin^2\angle AFE = -\frac{15}{17} \Rightarrow 2\sin^2\angle AFE =$

$= \frac{32}{17} \Rightarrow \sin\angle AFE = \pm\sqrt{\frac{16}{17}} = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$ ~~$\Rightarrow AF$~~, $\angle AFE < 90° \Rightarrow \angle AFE = \arcsin\frac{4}{\sqrt{17}}$.

$\triangle AO_\omega D$ – р/б; $O_\omega D, HK \perp BC \Rightarrow O_\omega D \parallel HK \Rightarrow \angle AO_\omega D = \angle AHK = 90°+\alpha$. $\angle O_\omega AD = \angle O_\omega DA \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\angle O_\omega AD + \angle AO_\omega D = 180° \Rightarrow 2\angle O_\omega AD = 180° - (90°+\alpha) = 90°-\alpha \Rightarrow$ $\angle O_\omega DA =$ $\angle O_\omega AD = \frac{90°-\alpha}{2}$

$\Rightarrow \angle ADO_\omega + \angle O_\omega DB + \angle KDE = 180° \Rightarrow \angle ADO_\omega + 90° + \angle KDE = 180° \Rightarrow \angle KDE = 90° - \frac{90°-\alpha}{2} =$

$= \frac{90°+\alpha}{2} \Rightarrow \angle KED = 90° - \frac{90°+\alpha}{2} = \frac{90°-\alpha}{2} \Rightarrow \angle FAE = 180° - \angle AFE - \angle AEF = 90° \Rightarrow$

$\Rightarrow EF$ – диаметр $\Omega \Rightarrow EF = 34$, $AE = EF\sin\angle AFE = 34 \cdot \frac{4}{\sqrt{17}}$, $AF = EF\cos\angle AFE =$

$= 34\sqrt{1-\frac{16}{17}} = \frac{34}{\sqrt{17}} \Rightarrow S_{\triangle AEF} = \frac{AE \cdot AF}{2} = \frac{34 \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} \cdot \frac{34}{\sqrt{17}}}{2} = \frac{34^2 \cdot 4}{2 \cdot 17} = 17 \cdot 8 = 136$. Ответ: $\frac{255}{16}$, 17, $\arcsin\frac{4}{\sqrt{17}}$, 136.

☐ черновик ☑ чистовик

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~№2. Преобразуем 2-е ур-е:~~ $\cancel{(x^2-12x+36)+(36y^2-36y+9)-36-}$

№3.

Обл. опр. нер-ва: $10x-x^2>0$ (чтобы был опр. логарифм).

Значит, $x^2-10x<0 \Rightarrow |x^2-10x| = 10x-x^2$.

$$(10x-x^2)+(10x-x^2)^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3(10x-x^2)}$$

Выполним замену: $t = 10x-x^2$, $t>0$.

$$t+t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$$

$$t+t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 5 \cdot \log_5 t}$$

$$t+t^{\log_3 4} \geq \left(5^{\log_5 t}\right)^{\log_3 5}$$

$$t+t^{\log_3 4} \geq t^{\log_3 5}$$

$$t+t^{\log_3 4} - t^{\log_3 5} \geq 0$$

$$t\left(1+t^{\log_3 4-1}-t^{\log_3 5-1}\right) \geq 0$$

$t>0$, поэтому нер-во эквивалентно $1+t^{\log_3 4-1}-t^{\log_3 5-1} \geq 0$

$$t^{\log_3 5-1}-t^{\log_3 4-1} \leq 1$$

Заметим, что при $t=9$ выполняется равенство:

$$9^{\log_3 5-1}-9^{\log_3 4-1} = \frac{9^{\log_3 5}}{9}-\frac{9^{\log_3 4}}{9} = \frac{25}{9}-\frac{16}{9} = 1.$$

Пусть $f(t) = t^{\log_3 5-1}-t^{\log_3 4-1}$. $f'(t) =$

$= (\log_3 5-1)\,t^{\log_3 5-2}-(\log_3 4-1)\,t^{\log_3 4-2}$. $f'(t)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\log_3 5-1)\,t^{\log_3 5-2} = (\log_3 4-1)\,t^{\log_3 4-2} \Leftrightarrow \dfrac{t^{\log_3 5-2}}{t^{\log_3 4-2}} = \dfrac{\log_3 4-1}{\log_3 5-1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t^{\log_3 5-\log_3 4} = \dfrac{\log_3 \frac{4}{3}}{\log_3 \frac{5}{3}} = \log_{\frac{5}{3}} \frac{4}{3}$. Пусть $\log_{\frac{5}{3}}\frac{4}{3} = a$, $\log_3 5-\log_3 4 = b$.

$\frac{5}{3} > \frac{4}{3}$; $\frac{5}{3}, \frac{4}{3} > 1 \Rightarrow a = \log_{\frac{5}{3}}\frac{4}{3} \in (0;1)$; $b = \log_3 5-\log_3 4 = \log_3 \frac{5}{4}$. $3 > \frac{5}{4}$; $3, \frac{5}{4} > 1 \Rightarrow b = \log_3 \frac{5}{4} \in (0;1)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$t^b = a \Rightarrow t = a^{\frac{1}{b}}$. $b \in (0;1) \Rightarrow \frac{1}{b} \in (1;+\infty) \Rightarrow t = a^{\frac{1}{b}} \in (0;1)$.

При $t=1$ $f'(t) = (\log_3 5 - 1) - (\log_3 4 - 1) = \log_3 5 - \log_3 4 = \log_3 \frac{5}{4} > 0 \Rightarrow$

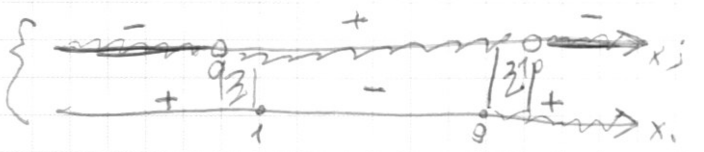
$\Rightarrow$ $f(t)$ уб. при $t \in (0;1)$ и возрастает при $t \in (1;+\infty)$. Значит,

при $t \in (0;1)$ $f(t) < f(0) = 0 \Rightarrow$ нер.-во выполняется;

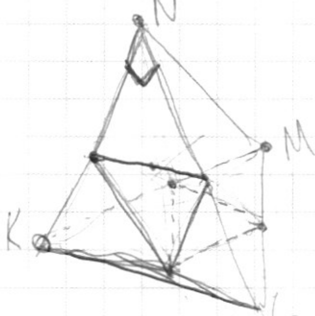
при $t < 9$ $f(t) < f(9) = 1 \Rightarrow$ нер.-во выполн.; при $t > 9$ не выполн.

Значит, $0 < 10x - x^2 \leq 9$

$$\begin{cases} 10x - x^2 > 0; \\ 10x - x^2 \leq 9. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(10-x) > 0; \\ x^2 - 10x + 9 \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(10-x) > 0; \\ (x-1)(x-9) \geq 0. \end{cases}$$



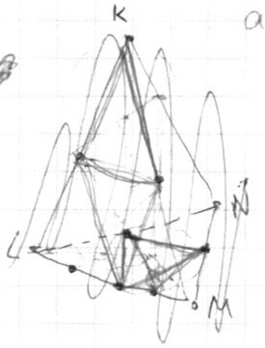
Ответ: $x \in (0;1] \cup [9;10)$.



$t^a - t^b = 1$

$t^a = t^b + 1$

$a = \log_t (t^b + 1)$



$4 + \frac{4}{4x-5}$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(1) = 0$

$f(2) = f(3) = 0$

$f\left(\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}\right) = f\left(\frac{x}{y}\right) + f\left(\frac{y}{x}\right) = 0$

$f\left(\frac{x}{y}\right) + f\left(\frac{2y}{x}\right) = 0$

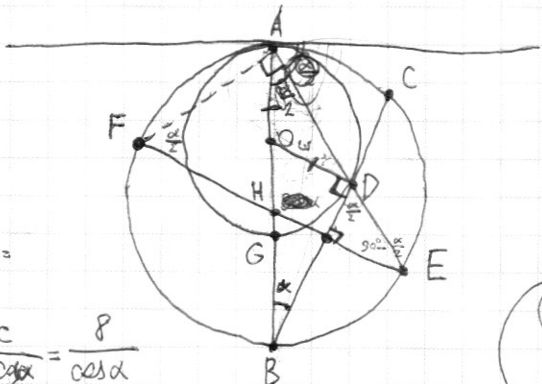
$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y)$

$36^2 + 12 \cdot 3 \cdot 2 =$
$= 2^4 \cdot 3^4 + 2^7 3^4 =$
$= 2^4 \cdot 3^4 (3^3 + 2^3) =$
$= 48 \cdot 35$

$t^{0.5} - t^{0.25}$

0 0 0 1 0 1 0 0 1 2 0 3 1 1 0 4 0 4 1 1 2 5 0 2

0 : 10
1 : 7
2 : 3
3 : 1
4 : 2
5 : 1



$B_\omega = BD^2 = \frac{289}{4}$

$AB \cdot BG = B_\omega = BD^2$

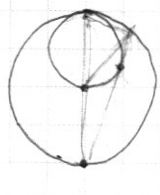
$2R(2R - 2r) = BD^2 \Rightarrow R(R-r) = \frac{BD^2}{4}$

$2R = \frac{BC}{\cos\alpha} \Rightarrow R = \frac{BC}{2\cos\alpha} = \frac{8}{\cos\alpha}$

$2R - r = \frac{BD}{\cos\alpha} = \frac{17}{2\cos\alpha}$

$r = \frac{16}{\cos\alpha} - \frac{17}{2\cos\alpha} = \frac{15}{2\cos\alpha} \Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{16}{15} \Rightarrow \frac{16}{15} r \cdot \frac{1}{15} r = \frac{BD^2}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{4}{15} r = \frac{BD}{2} \Rightarrow r = \frac{15}{8} BD,\ R = 2BD = 17$



$\cos\alpha = \frac{8}{R} = \frac{8}{17},\ \sin\alpha = \frac{15}{17}$

$r = \frac{255}{8}$

$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \frac{8}{17}}{2}} = \sqrt{\frac{9}{34}} = \frac{3}{\sqrt{34}},\ \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{5}{\sqrt{34}}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1 ~~sin(2α+2β)~~ $a = 2\alpha$, $b = 2\beta \Rightarrow \sin(a+b) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin(a+2b) + \sin a = -\frac{2}{5}$

$\sin a \cos b + \cos a \sin b = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin a \cos 2b + \cos a \sin 2b + \sin a = -\frac{2}{5}$

$\sin a(1 - 2\sin a) + 2\cos^2 a \sin b + \sin a = -\frac{2}{5}$

$3\sqrt{10}\sin\alpha =$

$a^2 - 13ab + 36b^2 = 0$ $k^2 - 13k + 36 = 0$ $k \in \{4; 9\}$

N2. $(x-6)^2 + (6y-3)^2 = 0 \Rightarrow x = 6, y = 2$

$\sqrt{(x-6)(2y-1)} = x - 12y$

$(a - 6b)^2 = ab$;

$a^2 + 9b^2 = 90$.

$a^2 - 13ab + 36b^2 = 0$;

$(x-6)^2 + 9(2y-1)^2 = 90$

$a^2 = 90 - 9b^2 \Rightarrow a = 3\sqrt{10 - b^2}$

$3(10 - b^2) - 39b\sqrt{10-b^2} + 36b^2 = 0$

$11b^2 \pm 13b\sqrt{10-b^2} + 10 = 0$

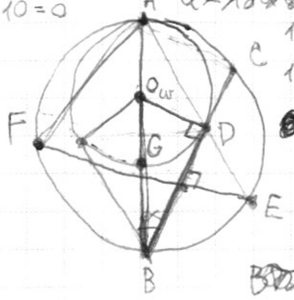
$(x-6)^2 + 6(x-6)(2y-1) + 9(2y-1)^2 =$

$13ab - 27b^2 = 90$ $= 90 + 6(x - 12y)^2$

$13ab + 3a^2 = 360$

$2R\sin\alpha = 16 \Rightarrow R\sin\alpha = 8$;

$(2R - r)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{17}{2}$;



$(x + 6y - 9)^2 \neq$

$x - 6 - 6(2y-1) = x - 12y$

$27b^2 = 13ab + 90 = 0$

$3a^2 + 3ab - 360 = 0$

$b = 13a \pm$

$2R(2R - 2r) = 272 \Rightarrow$

$\Rightarrow R(R - r) = 68$.

$\begin{cases} (x-12y)^2 = (x-6)(2y-1); \\ (x-6)^2 + 9(2y-1)^2 = 90. \end{cases}$

$R - r = \frac{68}{R} = \frac{68}{\frac{8}{\sin\alpha}} = \frac{17}{2}\sin\alpha \Rightarrow r = \frac{8}{\sin\alpha} - \frac{17}{2}\sin\alpha$

$\frac{17}{2}$

N3. $10x^2 - 10x < 0 \Rightarrow 10x + (10x - x^2)^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3(10x - x^2)}$

$t + t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 5 \cdot \log_5(10x - x^2)}$

$t^a(t^b - 1) = 1$

$t^b - 1 = t^{-a}$

$t^{\log_3 4 - 1}(1 - t^{\dots}) = -1$

$1 - t^{\log_3 5 - \log_3 4} = -t^{1 - \log_3 4}$

$t + t^{\log_3 4} \geq t^{\log_3 5}$

$t(t^{\log_3 4 - 1} - t^{\log_3 5 - 1} + 1) \geq 0$

$f(t) = t^{\log_3 4 - 1}\left(1 - t^{\log_3 5 - \log_3 4}\right)$

$f(t) = t^{\log_3 4 - 1} - t^{\log_3 5 - 1}$

$= t^{\log_3 4 - 1} \cdot t^{\log_3 5 - \log_3 4 - 1}(\log_3 5 - \log_3 4) +$

$+ t$

$f'(t) = (\log_3 4 - 1) \cdot t^{\log_3 4 - 2} - (\log_3 5 - 1) \cdot t^{\log_3 5 - 2} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{t^{\log_3 4 - 2}}{t^{\log_3 5 - 2}} = \frac{\log_3 5 - 1}{\log_3 4 - 1}$

$\log_3 4 - \log_3 5$

$t^{\log_3 4 - \log_3 5} = \frac{\log_3 5 - 1}{\log_3 4 - 1}$

$t =$

$\sin(x) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(x+y) + \sin(x-y) = -\frac{2}{5}$

$\sin x \cos y = -\frac{1}{5} \Rightarrow \cos y = \frac{1}{\sqrt{5}}$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)