# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы $\alpha$ и $\beta$ удовлетворяют равенствам

+

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

+

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

+

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant|x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности $\Omega$ и $\omega$ касаются в точке $A$ внутренним образом. Отрезок $AB$ – диаметр большей окружности $\Omega$, а хорда $BC$ окружности $\Omega$ касается $\omega$ в точке $D$. Луч $AD$ повторно пересекает $\Omega$ в точке $E$. Прямая, проходящая через точку $E$ перпендикулярно $BC$, повторно пересекает $\Omega$ в точке $F$. Найдите радиусы окружностей, угол $AFE$ и площадь треугольника $AEF$, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

+

5. [5 баллов] Функция $f$ определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел $a$ и $b$ из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа $p$ ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее $x$). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

+

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех $x$ на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина $P$ которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра $PQ$. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра $RS$. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \end{cases} \qquad tg\,\alpha = ?$$

let $2\alpha = x$; $2\beta = y$:

$$\begin{cases} \sin(x+y) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(x+2y) + \sin x = -\frac{8}{\sqrt{17}} \end{cases} \qquad tg\,x/2 = ?$$

$$\begin{cases} \sin(x+y) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \underbrace{2\sin(x+y)}_{-\frac{1}{\sqrt{17}}} \cos y = -\frac{8}{\sqrt{17}} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\cos y = \frac{4}{\sqrt{17}}}$$

1) $\underline{\sin y > 0} \Rightarrow \sin y = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$$\begin{cases} \cos y = \frac{4}{\sqrt{17}} \\ \sin y = \frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin x \underbrace{\cos y}_{\frac{4}{\sqrt{17}}} + \underbrace{\sin y}_{1/\sqrt{17}} \cos x = -\frac{1}{\sqrt{17}} \end{cases} \Rightarrow 4\sin x + \cos x + 1 = 0$$

$$8\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 2\cos^2\frac{x}{2} = 0$$

По условию $tg\frac{x}{2}$ существует $\Rightarrow \cos\frac{x}{2} \neq 0$

$$4\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{tg\,\frac{x}{2} = -1/4}$$

2) $\underline{\sin y < 0} \Rightarrow \sin y = -1/\sqrt{17}$

$$\begin{cases} \cos y = \frac{4}{\sqrt{17}} \\ \sin y = -1/\sqrt{17} \\ 4\sin x - \cos x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 8\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 2\sin^2\frac{x}{2} = 0$$

$$\left[ \begin{array}{l} \sin\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow tg\,\frac{x}{2} = 0 \\ 4\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow tg\,\frac{x}{2} = -4 \end{array} \right.$$

Ответ: $tg\,\alpha \in \{0; -1/4; -4\}$.

№2

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2} \quad (1) \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4. \quad (2) \end{cases}$$

(1) $3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2}$

$$\begin{cases} 3y \geq 2x \\ 9y^2 + 4x^2 - 12xy = 3xy - 2x - 3y + 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y \geq 2x \\ 9y^2 - 3(5x-1)y + 4x^2 + 2x - 2 = 0. \end{cases}$$

$D = 9(25x^2 - 10x + 1) - 9 \cdot 4 \cdot (4x^2 + 2x - 2) =$

$= 9(25x^2 - 10x + 1 - 16x^2 - 8x + 8) = 9(9x^2 - 18x +$

$+ 9) = 9^2 \cdot (x-1)^2.$

$y_{1,2} = \dfrac{3(5x-1) \pm 9(x-1)}{18} = \dfrac{5x - 1 \pm (3x-3)}{6} = \dfrac{4x-2}{3};$

$\dfrac{x+1}{3}$

(2) <u>Вернёмся к системе:</u>

$$\begin{cases} \begin{cases} 3y \geq 2x \\ \left[ \begin{array}{l} y = \dfrac{4x-2}{3} \quad (2.1.) \\ y = \dfrac{x+1}{3} \quad (2.2.) \end{array} \right. \end{cases} \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 \end{cases}$$

2.1.) $\begin{cases} y = \dfrac{4x-2}{3} \\ 3y \geq 2x. \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 \end{cases}$

$9x^2 + 16x - 16x + \cancel{4} - 18x - 16x + \cancel{8} = \cancel{12}$

!

$25x^2 - 50x = 0 \Rightarrow$ $\left[ \begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = -2/3 \Leftrightarrow 3y \overset{\text{нет!}}{<} 2x \\ x = 2 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow 3y \underset{\text{да!}}{>} 2x \end{array} \right.$

2.2.) $\begin{cases} y = \dfrac{x+1}{3} \\ 3y \geq 2x \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4. \end{cases}$

$9x^2 + x^2 + 2x + 1 - 18x - 4x - 4 = 12.$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N2 (продолжение)

$10x^2 - 20x - 15 = 0$

$2x^2 - 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{10}}{2}$

$\frac{D}{4} = 4 + 6 = 10$

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{2+\sqrt{10}}{2} \Rightarrow y = \frac{4+\sqrt{10}}{6} \Rightarrow 3y = \frac{4+\sqrt{10}}{2},\ 2x = 2+\sqrt{10} \quad 2 + \frac{\sqrt{10}}{2} < 2 + \sqrt{10} \text{ нет!} \\ x = \frac{2-\sqrt{10}}{2} \Rightarrow y = \frac{4-\sqrt{10}}{6} \Rightarrow 2 - \frac{\sqrt{10}}{2} > 2 - \sqrt{10} \text{ - да!} \end{array}\right.$

Ответ: $\left\{ (2; 2); \left( \frac{2-\sqrt{10}}{2}; \frac{4-\sqrt{10}}{6} \right) \right\}$

N3 $\quad 3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$

т.к. $\exists \log_4(x^2+6x)$ $\quad x^2+6x > 0 \Rightarrow$ модуль раскрывается только с „+"!

let $t = x^2 + 6x$

$3^{\log_4 t} + t \geq t^{\log_4 5}$

$3 = 4^{\log_4 3} \Rightarrow 3^{\log_4 t} = 4^{\log_4 3 \cdot \log_4 t} = t^{\log_4 3}$, $(t > 0)$

$t^{\log_4 5} - t^{\log_4 3} - t \leq 0$

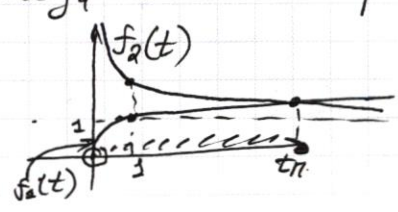
$t\left(t^{\log_4 \frac{5}{4}} - t^{\log_4 \frac{3}{4}} - 1\right) \leq 0$

$t > 0 \Rightarrow t^{\log_4 \frac{5}{4}} - t^{\log_4 \frac{3}{4}} - 1 \leq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow t^{\log_4 5/4} \leq t^{\log_4 3/4} + 1.$

$\log_4 5/4 > 0 \Rightarrow$ при $t > 0$ $f_1(t) = t^{\log_4 5/4}$ — монотонно возрастающ.

$\log_4 3/4 < 0 \Rightarrow$ при $t > 0$ $f_2(t) = t^{\log_4 3/4}$ — монотонно убывающ.




Из этого следует, что у $f_1(t)$ и $f_2(t)$ будет ОДНО пересечение.

N3 (продолжение)

Пусть $t = 16 \Rightarrow f_1(t) = 16^{\log_4 5/4} = \frac{25}{16}$

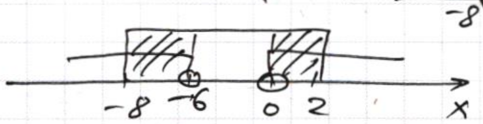
$f_2(t) = 16^{\log_4 3/4} + 1 = \frac{9}{16} + 1 = \frac{25}{16}! \Rightarrow$

$\Rightarrow$ в $t = 16$ $f_1(t)$ и $f_2(t)$ пересекаются.

По графику видно, что решением нер-ва

$f_1(t) - f_2(t) \leq 0$ будет полуинтервал $t \in (0; 16]$.

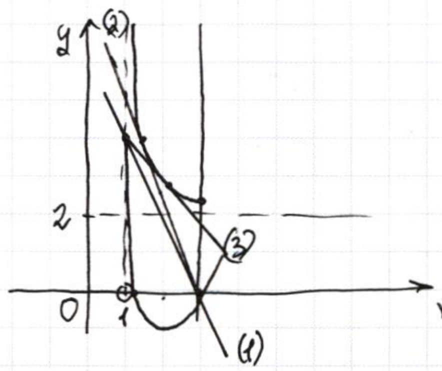
Вернёмся к x: $\begin{cases} x^2 + 6x > 0 \Rightarrow \\ x^2 + 6x - 16 \leq 0 \Rightarrow \end{cases}$




Ответ: $[-8; -6) \cup (0; 2]$.

N6

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax + b \geq 8x^2 - 34x + 30$$




касание $ax+b$ и $\frac{4x-3}{2x-2}$

От (1) до (2) — подходит

От (1) к (3) — подходит

(2): $a_2(x-3)$.

(1): $-2(x-3)$

(3): $a_3(x-1)$

Эти три прямые ограничивают решения для $ax+b$.

$a_2(x-3) = \frac{4x-3}{2x-2}$ $f(x)$

$$\frac{2a_2x^2 - 2a_2x - 6a_2x + 6a_2 - 4x + 3}{2x-2} = 0$$

$$\frac{2a_2x^2 - 2(4a_2+2)x + 6a_2 + 3}{2x-2} = 0$$

$\frac{D}{4} = 16a_2^2 + 16a_2 + 4 - 12a_2^2 - 6a_2$

$= 4a_2^2 + 10a_2 + 4 = 0$

$\frac{D}{4} = 25 - 16 = 9$ да!

$a_2 = \frac{-5 \pm 3}{4} = -2; -\frac{1}{2}$

$a_3$ аналогично:

$a_3 = -2$

а) (1) $\to$ (2)

$\begin{cases} a_2 \leq a \leq -2 \\ 3a_2 \geq b \geq 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a = -2 \\ b = 6 \end{matrix}$

б) $\begin{cases} -2 \geq a \geq -2 \\ 6 \leq b \leq 6 \end{cases}$ $\begin{matrix} a = -2 \\ b = 6 \end{matrix}$

Ответ: $a = -2$, $b = 6$

Это значит, что $\frac{4x-3}{2x-2}$ касается $-2(x-3) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ там всего один ответ.

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 4

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

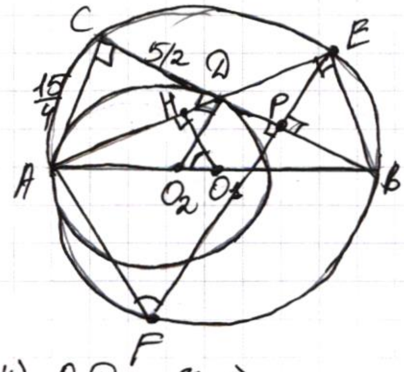
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4




$CD = 5/2$ ; $BD = 13/2$.

а) 1) Проведём $AC$, $O_2D \Rightarrow O_2D \perp BC$

2) Пусть $O_1B = R$, $O_2A = r$.

3) $\triangle BO_2D \sim \triangle BAC$ по двум углам

$$\Rightarrow \frac{O_2B}{AB} = \frac{BD}{BC} = \frac{13}{18}$$

$O_2B = 2R - r$

$AB = 2R$

$$\frac{2R-r}{2R} = \frac{13}{18} \Rightarrow 18R - 9r = 13R \quad \boxed{R = \frac{9}{5}r}$$

4) $O_2D = r \Rightarrow$

$\Rightarrow BD^2 + O_2D^2 = O_2B^2$

$$r^2 + \frac{169}{4} = \frac{169}{25}r^2$$

$$\frac{169}{4} = \frac{144}{25}r^2 \Rightarrow \boxed{r = \frac{5\cdot 13}{2\cdot 12} = \frac{65}{24}} \Rightarrow \boxed{R = \frac{3\cancel{9}\cdot 5\cdot 13}{5\cdot 2\cdot 12\,4} = \frac{39}{8}}$$

б) 1) $\frac{AC}{O_2D} = \frac{BC}{BD} = \frac{18}{13} \Rightarrow AC = \frac{5\cdot\cancel{13}}{2\cdot \cancel{12}_2}\cdot\frac{\cancel{18}3}{\cancel{13}} = \frac{15}{4} \Rightarrow$ ~~[illegible]~~ $\Rightarrow AD = \frac{5\sqrt{13}}{4}$

2) $DE \cdot AD = CD \cdot BD$

~~$DE = \frac{13/2 \cdot 5/2}{25/4} = \frac{13}{5} \Rightarrow AE = \frac{25}{4} + \frac{13}{5} =$~~

~~$= \frac{125 + 52}{20} = \frac{177}{20}$~~

~~3) $\angle AO_1E = 2\angle AFE \Rightarrow$ let $H$: $O_1H \perp AE$, $H \in AE$~~

~~$\Rightarrow AH = \frac{AE}{2}$, $\triangle AO_1E$ – р/б $\Rightarrow \angle AO_1H = \angle AFE$.~~

~~$\sin\angle(AO_1H) = \frac{AH}{R} = \frac{333/80}{39/16} = \frac{111\cdot 13}{13\cdot 5} \Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow \angle AFE = \arcsin$~~

$$DE = \frac{13/2 \cdot 5/2}{5\sqrt{13}/4} = \sqrt{13} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AE = \frac{9\sqrt{13}}{4}.$$

3) $\angle AO_1E = 2\angle AFE \Rightarrow$ let $H$: $O_1H \perp AE$, $H \in AE$

$\Rightarrow AH = \frac{AE}{2} \Rightarrow \triangle AO_1E$ – р/б $\Rightarrow \angle AO_1H = \angle AFE$

N4 (продолжение)

$\cos\angle AFE = \frac{2}{\sqrt{13}}$

3) $\sin\angle AFE = \sin\angle AO_1H = \frac{AH}{R} = \frac{9/8\sqrt{13}}{39/8} = \frac{9}{3\sqrt{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$

$\angle AFE = \arcsin\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$

в) 1) $\underline{\Delta EDB}$: $EP = \frac{DE \cdot EB}{BD}$

$EB = \sqrt{4R^2 - AE^2} = \sqrt{4\frac{9\cdot 13^2}{8^2} - \frac{9^2 \cdot 13}{16}} = \frac{3\sqrt{13}}{4}\sqrt{\frac{13}{\cancel{9}} - 1} =$

$\cancel{= \frac{3\sqrt{13}}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9\sqrt{13}}{4}} = \frac{3\sqrt{13}}{4} \cdot 2\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{39}}{2}.$

2) $\angle CDA = \arcsin\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right) = \angle AFE \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CAE = \frac{\pi}{2} - \angle CDA.$

Также $AC \perp BC \perp FE \Rightarrow AC \parallel FE \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CAF = \pi - \alpha$ (внутр. соотв.), где $\alpha = \angle AFE$

$\angle EAF = \angle CAF - \angle CAE = \pi - \alpha - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\pi}{2}!$

$\Delta EAF$ – п/у! $\Rightarrow EF = \frac{AE}{\sin\alpha} = \frac{3\cancel{8}}{4}\sqrt{13} \cdot \frac{\sqrt{13}}{\cancel{3}} = \frac{39}{4}$

$AF = EF\cos\alpha = \frac{39}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{13}}$

$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$

$S_{AFE} = \frac{1}{2} \cdot EF \cdot AF \cdot \sin\angle AFE =$

$= \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{39}{4} \cdot \frac{\cancel{39}^{3}}{4} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{\sqrt{13}}} \cdot \frac{3}{\cancel{\sqrt{13}}} = \frac{9 \cdot 39}{16} = \frac{351}{16}$

Ответ: радиус $\omega$: $\frac{65}{24}$

радиус $\Omega$: $\frac{39}{8}$

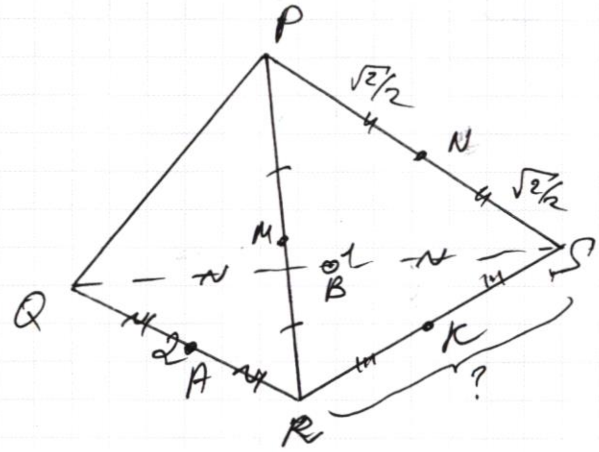
$\angle AFE$: $\arcsin(3/\sqrt{13})$

$S_{AFE}$: $\frac{351}{16}$

N7.

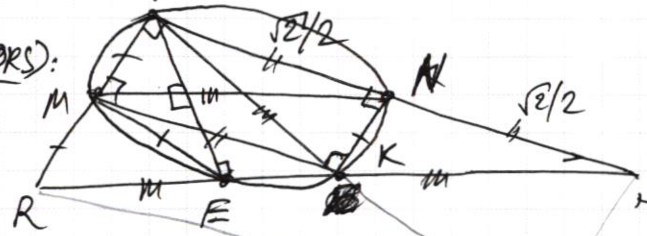
# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7




1) $P, M, N, K \in$ сфере $\omega \Rightarrow P, N, M, K$ лежат на фигуре сечения сферы п-тью $PRS \Rightarrow P, N, M, K \in$ окруж.

2) (PRS):




2.1) ~~KN∥ER~~ $KN, MN, KM$ — ср. лин. ⇒ ⇒ $PMKN$ — п/г по опр. ⇒

$E = (\text{окр-ть } PNM) \cap RS$, $E \neq K$

⇒ $\angle MPN = \angle MKN$

2.2). Но! $PMKN$ - вписан ⇒ $\angle MPN = 180° - \angle MKN$ ⇒

⇒ $\angle MKN = \angle MPN = 90°$ ⇒ $\boxed{PMKN - \text{п/у}}$.

3) окр-ть $ABK$ — сечение сферы $\omega$ п-тью $QRS$.

также $E \in$ окр-ть $ABK$

4) Минимальный радиус описанной сферы пирамиды равен: $R = \frac{3V_п}{S_п}$.

~~5) Т.к. M, N, K, P, A, B лежат на одной сфере, то $R_{\text{описан. } MAPB} = R_{\text{описанн. } NAPB}$ ⇒~~

~~⇒ $V_{MAPB} = V_{NAPB}$ ⇒~~

N7 (продолжи)

5) Вернёмся в PRS:

$ME = NK$, т.к. $MEKN$ – р/б. вписанн. трапец.

$\Rightarrow \angle PEK = 90^\circ! \Rightarrow PE$ – высота $\triangle PRS$!

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

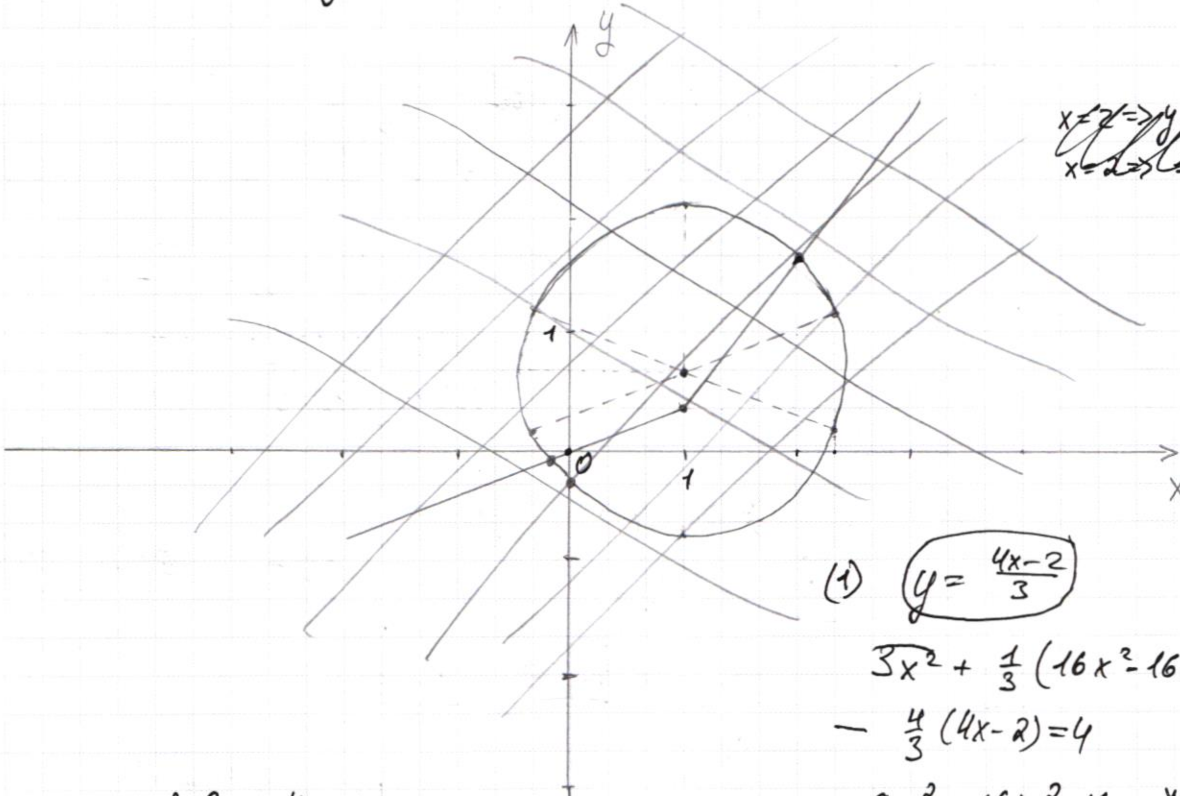
(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 (продолжение)

$$\begin{cases} \begin{cases} 3y \geq 2x \\ \left[\begin{array}{l} 3y = 4x-2 \\ 3y = x+1 \end{array}\right. \end{cases} \\ (x-1)^2 + (y-2/3)^2 = \frac{67}{27} \end{cases}$$

$$\sqrt{\frac{67}{27}} = \sqrt{\frac{7}{3}+\frac{4}{27}}$$




$\cancel{x=2 \Rightarrow y=3}$

$\cancel{x=2 \Rightarrow}$

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3y = 4x-2 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases} (1) \\ \begin{cases} 3y = x+1 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases} (2) \end{array}\right. \\ 3y \geq 2x. \end{array}\right.$$

(1) $y = \frac{4x-2}{3}$

$3x^2 + \frac{1}{3}(16x^2-16x+4)-6x - \frac{4}{3}(4x-2)=4$

$9x^2+16x^2-16x+\cancel{4}-18x-16x+\cancel{8}=\cancel{12}$

$25x^2-50x=0$

$\left[\begin{array}{l} x=0 \text{ — не подх} \\ x=2 \Rightarrow y=2 \end{array}\right.$ !

$3y \geq 2x$

$3x^2+3y^2-6x-4y=4$

$\cancel{12}+\frac{\cancel{00}}{12}-\cancel{12}-\cancel{8}=4?$

(2) $3x^2+\frac{1}{3}(x^2+2x+1)-6x-\frac{4}{3}(x+1)=4$

$9x^2+x^2+2x+1-18x-4x-4=12$

$10x^2-20x+9=0$

$\frac{D}{4}=100-90=10 \Rightarrow x=\frac{10\pm\sqrt{10}}{10}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$$\cancel{x = \frac{10-\sqrt{10}}{10}}$$

$$3x^2 + \frac{1}{3}(x^2+2x+1) - 6x - \frac{4}{3}(x+1) = 4$$

$$9x^2 + x^2 + 2x + 1 - 18x - 4x - 4 = 12.$$

$$10x^2 + \underbrace{2x - 22x}_{-20x} - 15 = 0$$

$$2x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 4 + 6 = 10$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{10}}{2}$$

$$3\left(1 - \sqrt{10} + \frac{5}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(1 - \sqrt{10} + \frac{5}{2} + 2 - \sqrt{10} + 1\right) -$$

$$- 3(2 - \sqrt{10}) - \frac{4}{3}\left(2 - \frac{\sqrt{10}}{2}\right) =$$

$$= 3 - \cancel{3\sqrt{10}} + \frac{15}{2} + \frac{4}{3} - \cancel{\frac{2\sqrt{10}}{3}} + \frac{5}{6} - 6 + \cancel{3\sqrt{10}} -$$

$$- \frac{8}{3} + \cancel{\frac{2\sqrt{10}}{3}} = \frac{15}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{6} + \overbrace{3 - 6}^{-3} - \frac{8}{3} =$$

$$= \frac{15}{2} - \frac{4}{3} + \frac{5}{6} - 3 = \frac{45 - 8 + 5 - 18}{6} = \frac{24}{6} = 4$$

$$\begin{array}{r} 42 \\ -18 \\ \hline 24 \end{array}$$

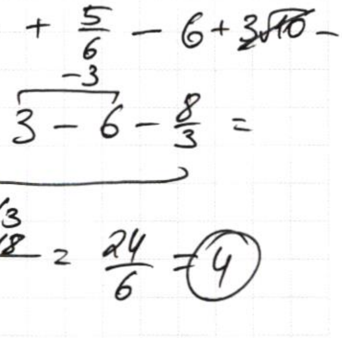
$$x = \frac{2 - \sqrt{10}}{2} \; (!) \Rightarrow y = \frac{x+1}{3} = \frac{4 - \sqrt{10}}{6}$$

Ответ: $\left\{(2;2);\ \left(\frac{2-\sqrt{10}}{2};\ \frac{4-\sqrt{10}}{6}\right)\right\}$

№3

$$3^{\log_4 \overbrace{(x^2+6x)}^{t}} + 6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5} - x^2$$

$$\underbrace{3^{\log_4 t}}_{4^{\log_4 3 \cdot \log_4 t}} + t \geq t^{\log_4 5}$$



$$t^{\log_4 5} - t^{\log_4 3} - t \leq 0 \qquad t^{\log_4 3} + t \geq t^{\log_4 5}$$

$$t(\underbrace{t^{\log_4 \frac{5}{4}} - t^{\log_4 \frac{3}{4}} - 1}_{f(t)}) \leq 0 \qquad t \geq t^{\log_4 5} - t^{\log_4 3}.$$

$$f(t) = t^{\log_4 \frac{5}{4}} - t^{\log_4 \frac{3}{4}} - 1 \vee 0$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№2

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2} \ (1) \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 \ (2) \end{cases}$$

$3x^2 - 6x + 3y^2 - 4y - 4.$

$\cancel{\frac{D}{4} = 9 - 9y^2 + 12y + 12 =}$

$\cancel{= -3y^2 + 12y + 2x}$

(2) $3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4.$

$3(x-1)^2 + 3(y-\frac{2}{3})^2$

$3y^2 - 4y + c =$

$y_в = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$= 3y^2 - 4y + \frac{4}{9}.$

$3(x-1)^2 + 3(y-2/3)^2 =$

$= 4 + 3 + \frac{4}{9}$

$7 + \frac{4}{9} = \frac{63+4}{9} =$

$= \frac{67}{9}$

$(x-1)^2 + (y-2/3)^2 = \frac{67}{27}$

(1) $3y - 2x = \sqrt{(3y-2)(x-1)}$

$$\begin{cases} 9y^2 + 4x^2 - 12xy = 3xy - 2x - 3y + 2. \\ 3y \geq 2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y \geq 2x \\ 9y^2 - 15xy + 4x^2 + 2x + 3y - 2 = 0 \end{cases}$$

$3(5x-1)$

$9y^2 - y(15x-3) + 4x^2 + 2x - 2 = 0$

$D = 9(25x^2 - 10x + 1) -$

$- 9 \cdot 4 \cdot (4x^2 + 2x - 2) = 9(25x^2 - 10x + 1 -$

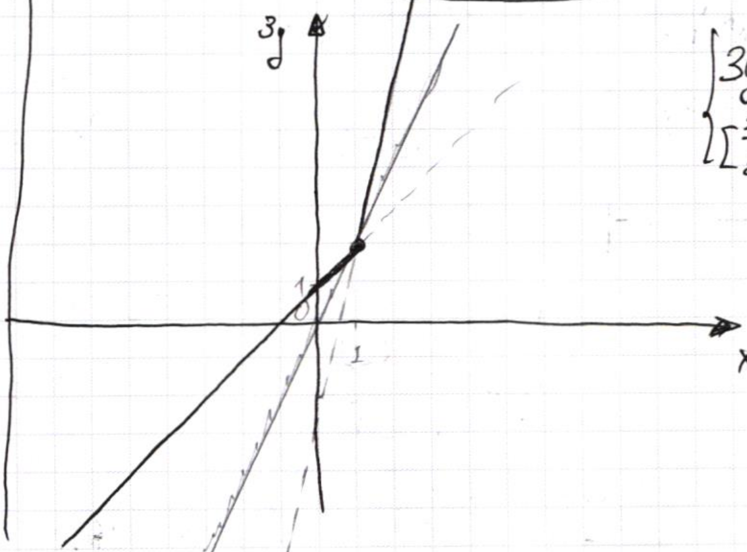
$- 16x^2 - 8x + 8) = 9(9x^2 - 18x + 9) =$

$= 9^2(x^2 - 2x + 1) = 9^2(x-1)^2.$

$y_{1,2} = \frac{15x - 3 \pm (9x-9)}{18} =$

$= \frac{5x - 1 \pm (3x-3)}{6} = \frac{8x-4}{6}; \frac{2x+2}{6} =$

$= \frac{4x-2}{3}; \frac{x+1}{3}$




$$\begin{cases} 3y \geq 2x \\ \left[\begin{array}{l} 3y = 4x - 2 \\ 3y = x + 1 \end{array}\right. \end{cases}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(\underbrace{2\alpha+4\beta}_{2\alpha+2\beta+2\beta}) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \end{cases}$$

$\exists\, tg\alpha$, Значений $tg\alpha \geq 3$

$$\cancel{\sin(\overset{x}{2\alpha+2\beta})\cos\overset{y}{2\beta} + \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{8}{\sqrt{17}}}$$

$$\cancel{\begin{cases} \sin x\cos y + \sin y\cos x = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ -\frac{1}{\sqrt{17}}\cos y \pm \frac{4}{\sqrt{17}}\sin y + \sin x = -\frac{8}{\sqrt{17}}. \end{cases}}$$

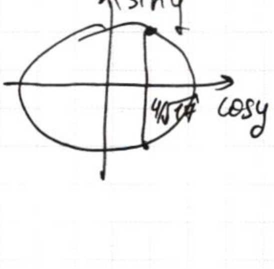
$$\begin{cases} \sin(x+y) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \underbrace{\sin(x+2y) + \sin x}_{} = -\frac{8}{17} \end{cases}$$

$tg\frac{x}{2} = ?$

$$2\cdot\underbrace{\sin(x+y)}_{-\frac{1}{\sqrt{17}}}\cdot\cos y = -\frac{\cancel{8}\,4}{17}$$

$$\cos y = 4/\sqrt{17}$$

$$\begin{cases} \sin x\,\frac{4}{\sqrt{17}} \pm \cos x\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \cos y = 4/\sqrt{17} \end{cases}$$




$4\sin x \pm \cos x = -1.$

$4\sin x \pm \cos x + 1 = 0$

$$\left[\begin{array}{l} 4\sin x + \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \\ 4\sin x - \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} 8\sin\alpha\,\cancel{\cos\alpha} + 2\cos^{\cancel{2}}\alpha = 0 \\ 8\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin^2\alpha = 0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 4\sin\alpha + \cos\alpha = 0 \Rightarrow tg\alpha = -1/4 \\ 4\cos\alpha + \sin\alpha = 0 \Rightarrow tg\alpha = -4 \\ tg\alpha = 0 \end{array}\right.$$

$\cancel{tg\alpha = 0}$

Ответ: $tg\alpha \in \{-1/4; -4; 0\}$.

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

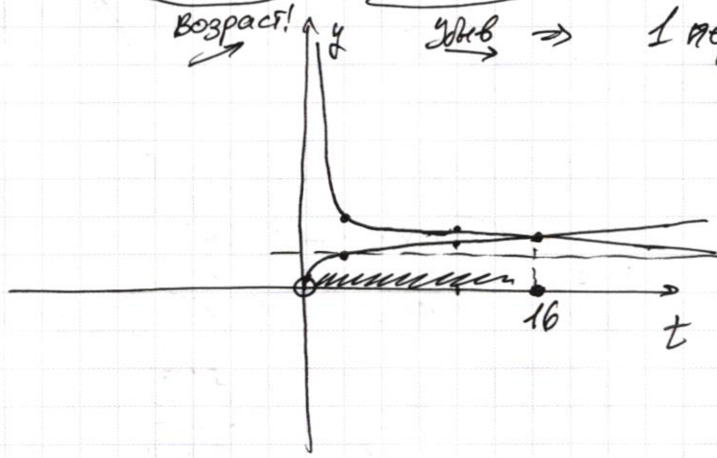
(Нумеровать только чистовики)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N3 (продолжение)

$t^{\log_4 5/4} - t^{\log_4 3/4} - 1 \le 0.$

$\underbrace{t^{\log_4 5/4}}_{\text{возраст!}} \le \underbrace{t^{\log_4 3/4} + 1}_{\text{убыв}} \Rightarrow$ 1 пересечение.



$t^{\log_4 5/4} = t^{\log_4 3/4} + 1$

$16^{\log_4 5/4} = 16^{\log_4 3/4} + 1$

$\frac{25}{16} = \frac{9}{16} + 1$

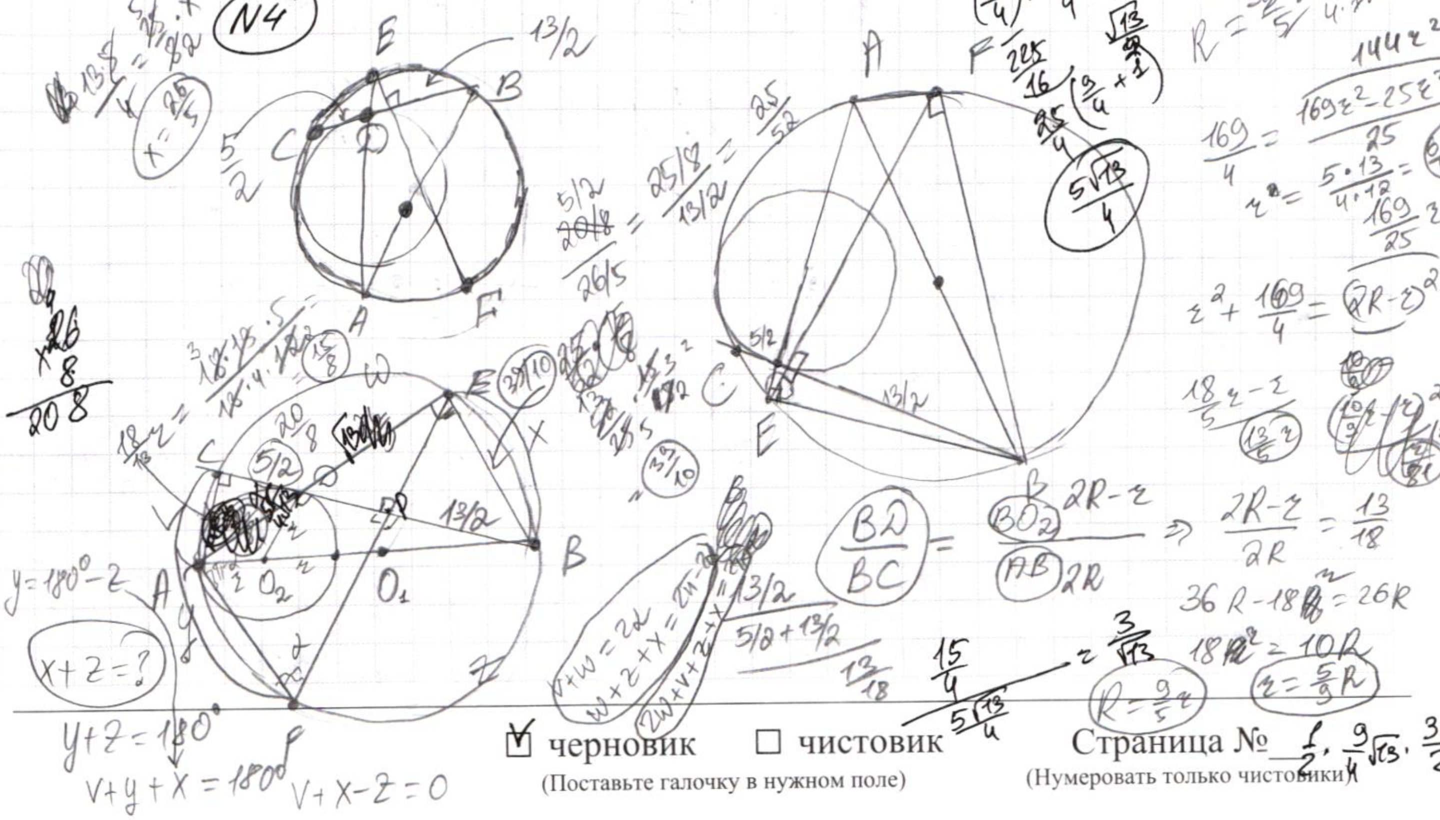
$t = 16$

$16 \ge t > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+6x>0 \Rightarrow \\ x^2+6x-16 \le 0 \Rightarrow \frac{D}{4} = 9+16 = 0 \end{cases}$

$[-8; 2]$

**Ответ:** $[-8;-6) \cup (0;2]$.

N4



$\frac{BD}{BC} = \frac{BO_2}{AB} = \frac{2R-z}{2R} \Rightarrow \frac{2R-z}{2R} = \frac{13}{18}$

$36R - 18z = 26R$

$18z = 10R$

$z = \frac{5}{9}R$

$R = \frac{9}{5}z$

$z^2 + \frac{169}{4} = (2R-z)^2$

$\frac{169}{4} = \frac{144z^2}{25}$

$x+z=?$

$y = 180° - z$

$y+z = 180°$

$v+y+x = 180°$

$v+x-z=0$

$2R = \frac{39}{8}$

$\frac{25}{8} + \frac{26}{5} = \frac{125 + 208}{40} = \frac{333}{40}$

$\times \frac{26}{8} \over 208$ $\;+\frac{125}{333}$

Куча расчётов...

№5

$a, b \in \mathbb{Q}^+$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = [p/4]$ для любого простого $p$.

$3 \leq x \leq 27$, $3 \leq y \leq 27$, $f(x/y) < 0$.

$\frac{1}{3} \geq \frac{1}{y} \geq \frac{1}{27}$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f(1/y) < 0$

$f(x) < -f(1/y)$

Пусть $x \notin \mathbb{N} \Rightarrow$ let $x = \frac{m}{n}$, где $m, n$ - простые

$\Rightarrow f\left(\frac{m}{n}\right) = \underbrace{f(m)}_{[\frac{m}{4}]} + f\left(\frac{1}{n}\right)$

$[1,5] + [1,5] = 2$

$1,5 + 1,5 = 3$

$y = \frac{u}{v} \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{v}{u} \Rightarrow f\left(\frac{1}{y}\right) = \underbrace{f(v)}_{[\frac{v}{4}]} + f\left(\frac{1}{u}\right)$

$[\frac{m}{4}] + f\left(\frac{1}{n}\right) < -[\frac{v}{4}] - f\left(\frac{1}{u}\right)$

$f\left(\frac{mv}{}\right) + f\left(\frac{1}{nu}\right) < 0$

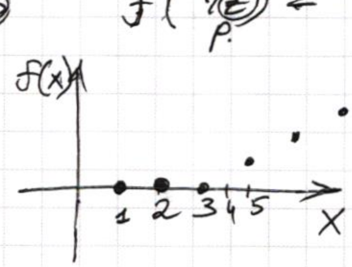
$f\left(\frac{1}{p}\right) =$

$f(1) = 0$

$f(2) = [\frac{1}{2}] = 0$

$f(3) = [\frac{3}{4}] = 0$

$f(5) = 1$





$-2 < a < a_3$

$b < +6$

$-a_3$

(1) → (3)

(1) → (2)

$a \neq a \neq -2$

$b \geq 6$

$[1;3]$

№6

$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax + b \geq 8x^2 - 34x + 30$

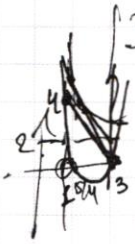
$x = 3$

$\frac{9}{4} \geq 3a + b \geq 72 - 102 + 30 = 0$

$3a + b \geq 0$

$\frac{9}{4} \geq 3a + b$

$2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1}$



$\frac{4x-3}{2x-2} = 8x^2 - 34x + 30$

$\frac{D}{4} = 289 - 240 = 49$

$x_{1,2} = \frac{17 \pm 7}{8} = 3;\ \frac{5}{4}$

$4x - 3 = 16x^3 - 68x^2 + 60x - 16x^2 + 68x - 60$

$16x^3 - 84x^2 + 124x - 57 = 0$

$\frac{3}{2}: \; 16 \cdot \frac{27}{8} - 84 \cdot \frac{9}{4} + 124 \cdot \frac{3}{2} + 186 = 57$

$54 - \frac{21 \cdot 9}{189} + 186 = 57$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

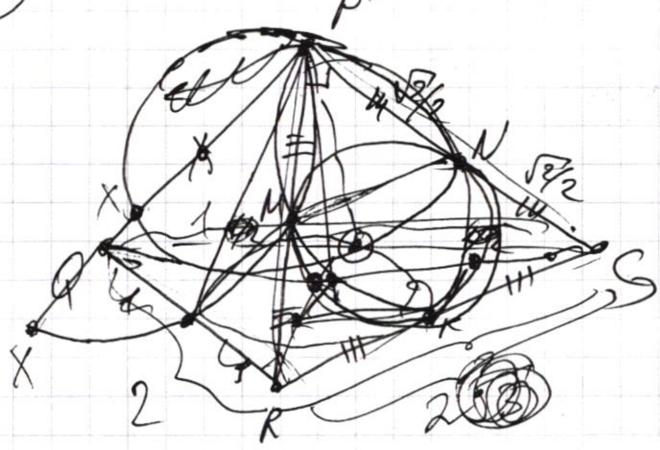
$$a_3(x-1) = \frac{4x-3}{2x-2}.$$

$$\frac{2a_3x^2-4a_3x+2a_3-4x+3}{2x-2}=0$$

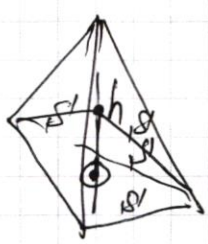
$$\frac{2a_3x^2-4(a_3+1)x+2a_3+3}{2x-2}=0$$

$$\frac{D}{4}=4a_3^2+8a_3+4-4a_3^2-6a_3 =$$
$$= 2a_3+4=-2.$$

№7

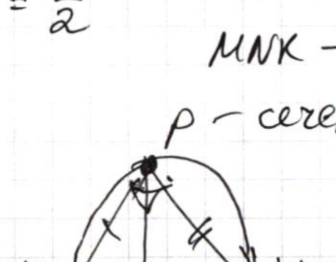


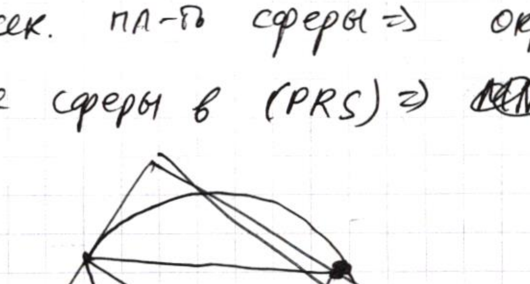

$$\frac{V}{S/2}=\frac{2V}{S}$$



$$\frac{hS}{2S}=\frac{h}{2}$$

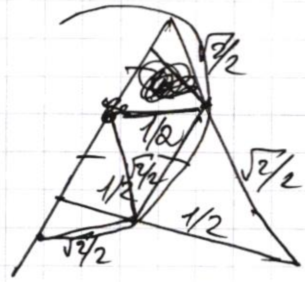
1) Если M, N, K, P лежат на сфере, то MNK — сек. пл-ть сферы => окр-ть MNK — p — сечение сферы в (PRS) => ~~MNK вписанная~~

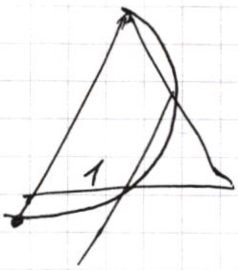


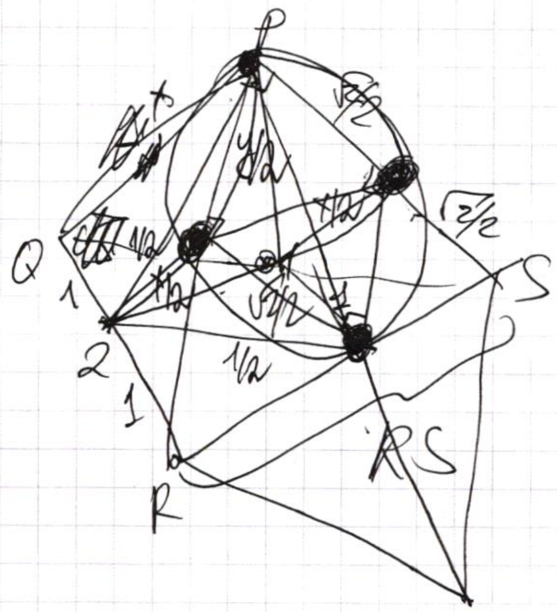




☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)


√2/2
1/2
1/2
√2/2
1/2
√2/2
1/2
√2/2


1


P
√2/2
√2/2
√2/2
Q
1
2
1
R
S
RS
1/2

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)