МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

№2

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$$

выделим полный квадрат в нижнем уравнении:

$$9(x^2-2x)+(y^2-12y)-45=0$$

$$9((x-1)^2-1)+((y-6)^2-36)-45=0$$

пусть $a=x-1$; $b=y-6$ (проведём замену переменных)

$$9(x-1)^2+(y-6)^2-90=0$$

заметим, $b-6a=y-6-6x+6=y-6x$

$$ab=(x-1)(y-6)=xy-y-6x+6$$

тогда изначальная система принимает вид:

$$\begin{cases} b-6a=\sqrt{ab} \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases}$$

заметим, $\cancel{ab}\; b-6a \geq 0$, возведём первое ~~равнен~~ уравн. в квадрат

$$\begin{cases} b^2-12ab+36a^2=ab \\ \cancel{ab\geq 0}\; b-6a\geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} b^2-13ab+36a^2=0 \\ \cancel{ab\geq 0}\; b-6a\geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \left(b-\frac{13}{2}a\right)^2-\frac{13^2}{2^2}a^2+36a^2=0 \\ \cancel{ab\geq 0}\; b-6a\geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(b-\frac{13}{2}a\right)^2-\frac{169}{4}a^2+\frac{144}{4}a^2=0 \\ \cancel{ab\geq 0}\; b-6a\geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \left(b-\frac{13}{2}a\right)^2-\frac{25}{4}a^2=0 \\ \cancel{ab\geq 0}\; b-6a\geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \left(b-\frac{13}{2}a\right)^2=\left(\frac{5}{2}a\right)^2 \\ \cancel{ab\geq 0}\; b-6a\geq 0 \end{cases}$$

если $b-\frac{13}{2}a=\frac{5}{2}a$, $b=\frac{18}{2}a=9a$, $b-6a=3a\geq 0 \Rightarrow a\geq 0$ $\cancel{a\cdot b=9a^2\geq 0}$ $\Rightarrow$ ~~$ab\geq 0$ выполняется в~~

если $b-\frac{13}{2}a=-\frac{5}{2}a$, $b=\frac{8}{2}a=4a$, $b-6a=-2a\geq 0 \Rightarrow a\leq 0$ $\cancel{a\cdot b=4a^2\geq 0}$ ~~любом случае~~

$$\begin{cases} 9a^2+b^2=90 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=9a \\ a\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} b=4a \\ a\leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=9a \\ 9a^2+81a^2=90 \\ a\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} b=4a \\ 9a^2+16a^2=90 \\ a\leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=9a \\ a^2=1 \\ a\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} b=4a \\ a^2=\frac{90}{25}=\frac{9}{25}\cdot 10=\left(\frac{3}{5}\right)^2\cdot 10 \\ a\leq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=1 \\ b=9 \end{cases} \\ \cancel{\begin{cases} a=-1 \\ b=-9 \end{cases}} \\ \cancel{\begin{cases} a=\frac{3}{5}\sqrt{10} \\ b=\frac{12}{5}\sqrt{10} \end{cases}} \\ \begin{cases} a=-\frac{3}{5}\sqrt{10} \\ b=-\frac{12}{5}\sqrt{10} \end{cases} \end{array}\right.$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$t=3a$

$\begin{cases} b-2t=\sqrt{\frac{bt}{3}} \\ t^2+b^2=90 \end{cases} \to \begin{cases} bt\geq 0 \\ b^2-4bt+4t^2=\frac{bt}{3} \end{cases} \to \begin{cases} bt\geq 0 \\ b^2-\frac{13}{3}bt+4t^2=0 \end{cases}$

1) $(3a)^2+b^2=90$

2) $36a^2-13ab+b^2=0$

$(ab\geq 0)$

$(6a)^2-6a\cdot\frac{13}{6}b+b^2=0$

$\left(6a-\frac{13}{12}b\right)^2-\frac{169}{144}b^2+b^2=0$

$\left(6a-\frac{13}{12}b\right)^2-25b^2=0$

$\left(6a-\frac{13}{12}b\right)=\pm 5b$

$169-144=25$

$5\cdot 12=60$

$12\cdot 6=72$

$60-13=47$

$\cancel{9a^2+13}$

$\cancel{36a^2-13ab+b^2=0}$

$27a^2-13ab+90=0$

$\left(27a^2-27a\frac{13}{27}b\right)+90=0$

$\left(9a^2-9a\frac{13}{27}b\right)+90=0$

$\left((3a)^2-(3a)\cdot\frac{13}{9}b\right)+90=0$

$\left(3a-\frac{13}{18}b\right)^2-\frac{13^2}{18^2}b^2$

$72a-13b=\pm 60b$

$\left[\begin{array}{l} 72a=73b \\ 72a=-47b \end{array}\right. \quad \begin{cases} a=\frac{73}{72}b \\ a=-\frac{47}{72}b \end{cases}$

$6a=\frac{73}{12}b$

$73\cdot 3=219$

219×219: 1971, 219, 438; 47961

$36a^2-13ab+b^2=0$

$\left(b-\frac{13}{2}a\right)^2-\frac{169}{4}a^2+36a^2=0$

$\left(b-\frac{13}{2}a\right)^2-42\frac{1}{4}a^2+36a^2=0$

$\left(b-\frac{13}{2}a\right)^2-6\frac{1}{4}a^2=0$

$\left(b-\frac{13}{2}a\right)=\pm\frac{5}{2}a$

$169:4=42$, 16, 9, 8, 1; $42-36=6$

$b=\frac{13\pm 5}{2}a$

$\left[\begin{array}{l} b=9a \\ b=4a \end{array}\right.$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

т.к. $a=x-1$, $x=a+1$; т.к. $b=y-6$, $y=b+6$

$x=2$, $y=15$ или ~~$x=0$, $y=3$~~ $x=1-\frac{3}{5}\sqrt{10}$, $y=6-\frac{12}{5}\sqrt{10}$

т.к. все переходы равносильны, это ответ

Ответ: ($x=2$ и $y=15$) или ($x=1-\frac{3}{5}\sqrt{10}$ и $y=6-\frac{12}{5}\sqrt{10}$)

№3

$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

пусть $26x-x^2=t$ $\quad (t=-((x-13)^2-169) \Rightarrow t\in(-\infty;169])$

$|-t|^{\log_5 12}+t \geq 13^{\log_5 t}$

т.к. $\log_5 t$ – определено, $t>0$

заметим, что $13^{\log_5 t}=13^{\frac{\log_{13} t}{\log_{13} 5}}=t^{\frac{1}{\log_{13} 5}}=t^{\frac{\log_{13} 13}{\log_{13} 5}}=t^{\log_5 13}$

$t^{\log_5 12}+t \geq t^{\log_5 13}$

пусть $k=\log_5 t$, $t=5^k$

$12^k+5^k=13^k$

заметим, что $12^2+5^2=13^2 \Rightarrow k=2$ подходит

$t^{\log_5 12}-t^{\log_5 13}+t\geq 0$ т.к. $t>0$, $t^{\log_5\frac{12}{5}}-t^{\log_5\frac{13}{5}}+1\geq 0$

пусть $f(t)=t^{\log_5\frac{12}{5}}-t^{\log_5\frac{13}{5}}+1$

$\frac{df(t)}{dt}=\log_5\frac{12}{5}\cdot t^{\log_5\frac{12}{25}}-\log_5\frac{13}{5}\cdot t^{\log_5\frac{13}{25}}$

$\frac{df(t)}{dt}$ – непрерыв. функция (для $t>0$) $\Rightarrow$ для опр. знака найдём нули:

$$\log_5 \frac{12}{5}\, t^{\log_5 \frac{12}{25}} = \log_5 \frac{13}{5}\, t^{\log_5 \frac{13}{25}} \quad \text{т.к. } t>0:$$

$$\log_5 \frac{12}{5} = \log_5 \frac{13}{5}\, t^{\left(\log_5 \frac{13}{25} - \log_5 \frac{12}{25}\right)} = \log_5 \frac{13}{5}\, t^{\log_5 \frac{13}{12}}$$

$$t^{\log_5 \frac{13}{12}} = \frac{\log_5 \frac{12}{5}}{\log_5 \frac{13}{5}} = \log_{\frac{13}{5}} \frac{12}{5}; \text{ т.к. } \frac{13}{5} > \frac{12}{5},\ t^{\log_5 \frac{13}{12}} < 0, \text{ т.к. } t>0, \text{ противоречие}$$

~~$\text{т.к. } t = 5^k,\ \frac{df}{dt}(k) = 0 \text{ при } \left(\frac{13}{12}\right)^k = \log_{\frac{13}{5}} \frac{12}{5}, \text{ при } k = \log_{\frac{13}{12}} \log_{\frac{13}{5}} \frac{12}{5}$~~

значит $f(t)$ - монотонная при $t>0$

т.к. ~~$t=5^k$ - монотонна~~ $k = \log_5 t$ - монотонная, $f(k)$ - монотонная (причём т.к. $\frac{dk(t)}{dt} \neq 0$ и $\frac{df(t)}{dt} \neq 0$, $\frac{df(k)}{dk} \neq 0$) $\Rightarrow f(k)=0$ имеет не более одного решения $\Rightarrow k=2$ - единственное решение

$t = 5^k = 25$

$-(x-13)^2 + 169 = t = 25$

$(x-13)^2 = 144 = 12^2$

$x - 13 = \pm 12$

$$\left[\begin{array}{l} x = 25 \\ x = 1 \end{array}\right.$$ т.к. все переходы равносильны, это все ответы

Ответ: $x \in \{1; 25\}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

рассмотрим $a=1$ $b=1$: $f(1\cdot 1)=f(1)+f(1)$; $f(1)=2\cdot f(1)$; $f(1)=0$

рассмотрим $b=\frac{1}{a}$ ($\forall a\in\mathbb{Q}$, $a>0$): $f\left(\frac{a}{a}\right)=f(a)+f\left(\frac{1}{a}\right)$

$f(1)=f(a)+f\left(\frac{1}{a}\right)$; $f\left(\frac{1}{a}\right)=-f(a)$

тогда для любого полож. рационального числа $x=\frac{n}{m}$, $n,m\in\mathbb{N}$: $f(x)=f\left(\frac{n}{m}\right)=$

$=f(n)+f\left(\frac{1}{m}\right)=f(n)-f(m)$

(т.к. в условии сказано, что "функция опред. для полож. рац. чисел," такая функция существует)

тогда для $x\in[4;28]$, $x\in\mathbb{N}$ и $y\in[4;28]$ $y\in\mathbb{N}$, $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)\Rightarrow$

$\Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right)<0 \Leftrightarrow f(x)<f(y)$

посчитаем $f(x)$ для $x\in\mathbb{N}$ и $x\leq 28$:

$f(1)=0$

$f(2)=\left[\frac{2}{4}\right]=0$

$f(3)=\left[\frac{3}{4}\right]=0$

$f(4)=f(2)+f(2)=0$

$f(5)=\left[\frac{5}{4}\right]=1$

$f(6)=f(2)+f(3)=0$

$f(7)=\left[\frac{7}{4}\right]=1$

$f(8)=f(2)+f(4)=0$

$f(9)=f(3)+f(3)=0$

$f(10)=f(2)+f(5)=1$

$f(11)=\left[\frac{11}{4}\right]=2$

$f(12)=f(2)+f(6)=0$

$f(13)=\left[\frac{13}{4}\right]=3$

$f(14)=f(2)+f(7)=1$

$f(15)=f(3)+f(5)=1$

$f(16)=f(2)+f(8)=0$

$f(17)=\left[\frac{17}{4}\right]=4$

$f(18)=f(2)+f(9)=0$

$f(19)=\left[\frac{19}{4}\right]=4$

$f(20)=f(2)+f(10)=1$

$f(21)=f(3)+f(7)=1$

$f(22)=f(2)+f(11)=2$

$f(23)=\left[\frac{23}{4}\right]=5$

$f(24)=f(2)+f(12)=0$

$f(25)=f(5)+f(5)=2$

$f(26)=f(2)+f(13)=3$

$f(27)=f(3)+f(9)=0$

$f(28)=f(2)+f(14)=$
$=1$

для $x\in[4;28]$

$g(t)$ – количество x, $f(x)=t$

$g(0)=9$ $g(4)=2$

$g(1)=8$ $g(5)=1$

$g(2)=3$

$g(3)=2$

$\left(\forall t>5:\ g(t)=0\right)$

~~подсчитаем кол-во пар~~ $\cancel{(x;y)}$, ~~где~~ $\cancel{f(x)=0:}$

$\cancel{g(0)\cdot(g(1)+g(2)+g(3)+g(4)+g(5)) =}$

$\cancel{f(x)=1:}$

$\cancel{g(1)\cdot(g(2)+g(3)+g(4)+g(5))=}$

$\cancel{f(x)=2:}$

$\cancel{g(2)\cdot(g(3)+g(4)+g(5))=}$

$\cancel{f(x)=3:}$

$\cancel{g(3}$

заметим, что кол-во пар $(x;y)$ $(x\in[4;28]\ x\in\mathbb{N}\ y\in[4;28]\ y\in\mathbb{N})$ $f\left(\frac{x}{y}\right)<0$

такое же, как кол-во пар $(x;y)$ $f\left(\frac{y}{x}\right)<0$, $\left(\Leftrightarrow f\left(\frac{y}{x}\right)<0\right)$ ~~т.к.~~ $\cancel{f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)=-f\left(\frac{y}{x}\right)}$,

~~для любых x, y~~

~~то есть~~ $\cancel{f\left(\frac{x}{y}\right)<0}$, ~~пара~~ $\cancel{(y;x)\ f\left(\frac{x}{y}\right)<0}$

т.к. любой паре $(x;y)$ будет соотв. пара $(y;x)$, где первая пара выполн. первое усл. $f\left(\frac{x}{y}\right)<0$, а вторая - второе $f\left(\frac{x}{y}\right)<0$ (т.к. пара $(y;x)$)

~~значит~~ пусть n - ответ, тогда кол-во пар $(x;y) = n+n+$ (кол-во пар (x,y), где $f\left(\frac{x}{y}\right)=0$)

кол-во пар $(x;y) = 25\cdot 25 = 625$

кол-во пар $(x;y)$, где $f\left(\frac{x}{y}\right)=0$ = кол-во, где $f(x)=f(y)=g(0)+g(1)+\ldots+g(5)=$

$=25$

$2n=625-25=600$

$n=300$

Ответ: 300

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

то есть $b \leq -1-2a$ всё ещё выполн.

$x_в = \frac{2a-3b-6}{6a}$

$y_в = -8-2b - \frac{(6+3b-2a)^2}{6a} = -8-2b-\frac{4a^2+9b^2+36+36b-24a-12ab}{6a} =$

$= \cancel{-8-2b}\ \frac{4a^2+9b^2+36+36b-72a-24ab}{6a}$

$x_в \in \left[\frac{2}{3};2\right] \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-3b-6 \geq 12a \\ 2a-3b-6 \leq 4a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3b-6 \geq 10a \\ -3b-6 \leq 2a \end{cases} \Leftrightarrow 3b-6 \in [-2a;-10a]$

$y_в \leq 0 \Leftrightarrow \quad 4a^2+9b^2+36+36b-72a-24ab \geq 0$

$b_{1,2} = \frac{12a-18 \pm \sqrt{(12a-18)^2 - 9\cdot(4a^2-72a+36)}}{9} = \frac{12a-18 \pm 2\sqrt{(6a-9)^2-9(a^2-18a+9)}}{9}$

$= \frac{12a-18 \pm 2\sqrt{25a^2-270a}}{9} = \frac{12a-18 \pm 2\sqrt{a}\sqrt{25a-270}}{9}$

$y_в \leq 0 \Leftrightarrow b \notin (b_1;b_2)$

т.к. $x_в \in \left[\frac{2}{3};2\right] \rightarrow y_в \leq 0$, $3b-6 \notin [-2a;-10a] \rightarrow b \notin (b_1;b_2)$

то есть усл. 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} b \leq -1-2a \\ \text{если } a<0,\ x_в \in \left[\frac{2}{3};2\right] \rightarrow y_в \leq 0 \end{cases}$

Усл. 2:

$ax+b \geq 18x^2-51x+28$

$g(x)=18x^2+(-51-a)x+(28-b) \leq 0$ т.к. $18>0$, $g(x)$ — парабола с ветвями вверх $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ усл. 2 $\Leftrightarrow \begin{cases} g\left(\frac{2}{3}\right) \leq 0 \\ g(2) \leq 0 \end{cases}$

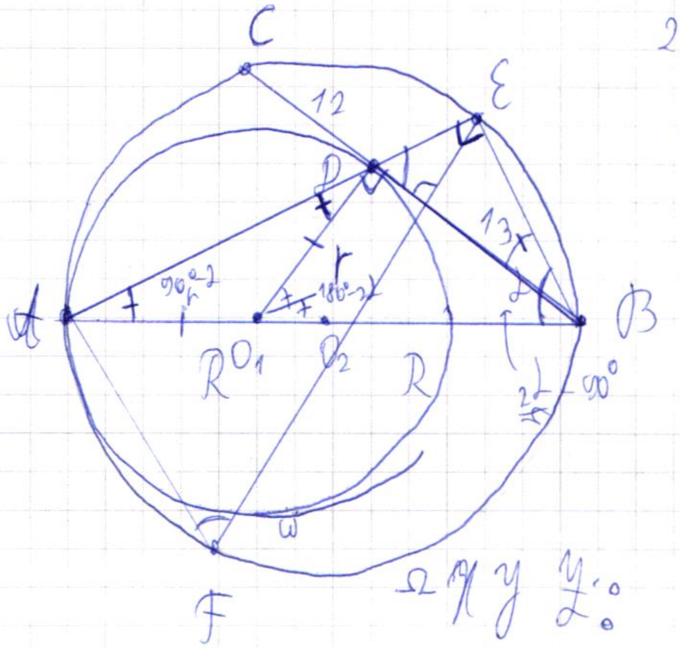
$180^\circ - 180^\circ + 2\alpha - 90^\circ = 2\alpha - 90^\circ$

$2R \cdot (2R - 2r) = 13^2$

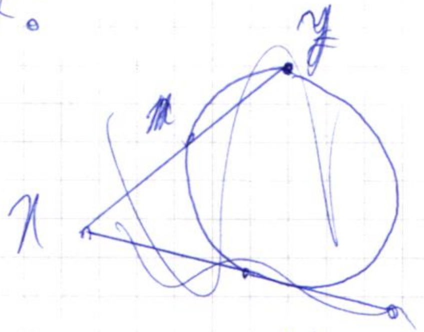
$R(R - r) = \left(\frac{13}{2}\right)^2$

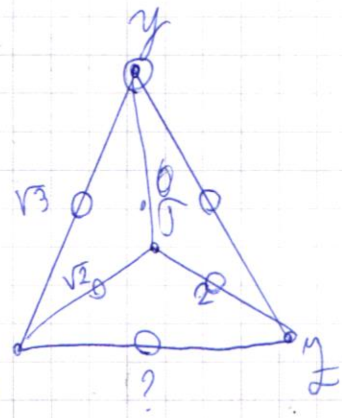
~~$R + R =$~~

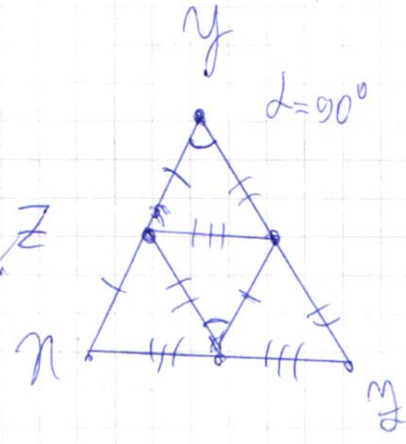
$\cancel{(R + R \ldots)^2}$

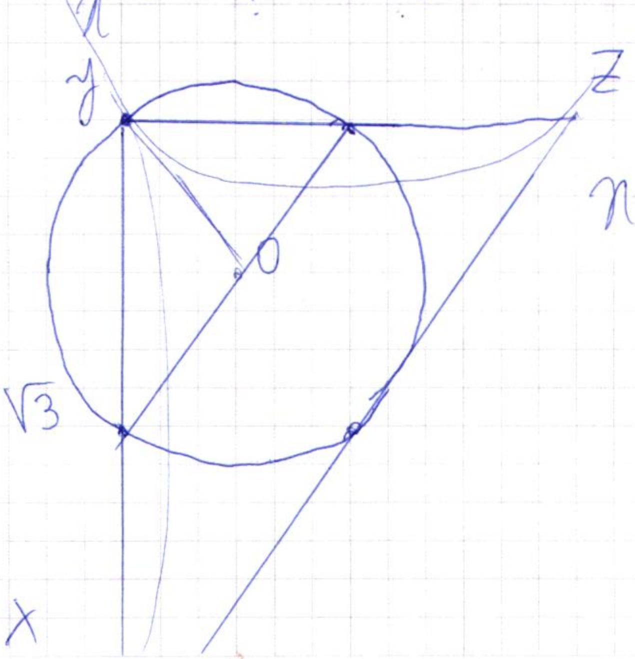


$\alpha - 2\alpha + 90^\circ = 90^\circ - \alpha$









☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$g(2) = 76 - 102 - 2a + 2b - b = 2 - 2a - b$

$g(2) \le 0 \Leftrightarrow 2 - 2a - b \le 0$

$b \ge 2 - 2a$

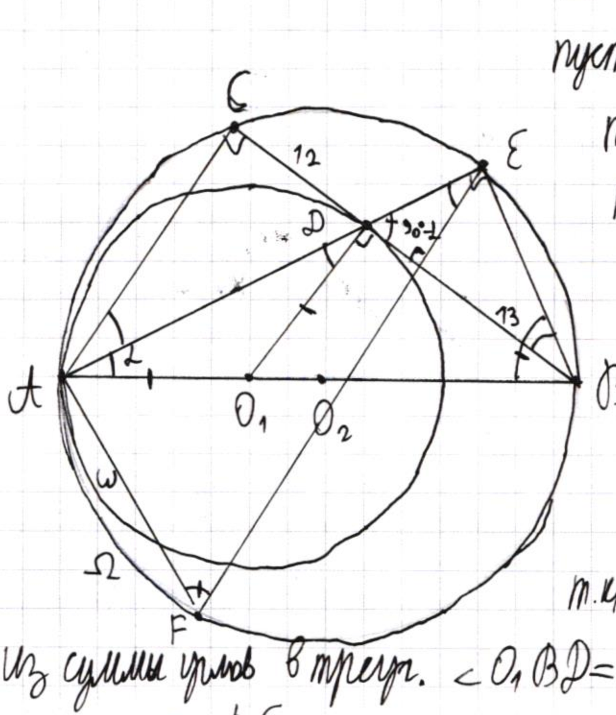
т.к. выполняется усл. 1 и усл. 2, выполняется $\begin{cases} b \le -1-2a \rightarrow 2-2a \le -1-2a \rightarrow \\ b \ge 2-2a \end{cases}$

→ противоречие

значит таких пар не существует

Ответ: $\varnothing$

N5



пусть O_1 - центр ω, O_2 - центр Ω

т.к. BC кас. ω в D, $BC \perp O_1D$

т.к. AB - диаметр Ω, $\angle AEB = 90°$; $\angle ACB = 90°$

пусть $\angle EAB = \alpha$ т.к. $AO_1 = O_1D = r$ - радиус ω, $\angle ADO_1 = \alpha$

т.к. сумма углов в треуг. $= 180°$, $\angle AO_1D = 180° - 2\alpha$; $\angle ABE = 90° - \alpha$

т.к. развёрнутый угол - $180°$, $\angle DO_1B = 2\alpha$

Из суммы углов в треуг. $\angle O_1BD = 90° - 2\alpha \Rightarrow \angle BAC = 2\alpha \Rightarrow AE$ - бис. угла BAC

т.к. $\angle O_1BE = \angle O_1BD + \angle DBE$, $\angle DBE = 90° - \alpha - 90° + 2\alpha = \alpha$

Из суммы углов в треуг. $\angle EDB = 90° - \alpha$; $\angle DEF = \alpha$

т.к. A, F, B, E - на одной окр., $\angle AFE = \angle ABE = 90° - \alpha \Rightarrow \angle EAF = 90° \Rightarrow EF$ -

диаметр, то есть O_2 принадлежит EF

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{da^x}{dx} = \ln a\, a^x$

№3 $26x - x^2 = -((x-13)^2 - 169)$

$\frac{df}{dt} = \log_5 12\, t^{\log_5 \frac{12}{5}} + 1 + \log_5 13\, t^{\log_5 \frac{13}{5}}$

$|x^2 - 26x|^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + 13^{\log_5 (26x - x^2)}$

~~$\ln 12\, 12^x = \ln 13\, 13^x + \ln 5\, 5^x = 0$~~

$a^{\log_b c} = a^{\frac{\log_a c}{\log_a b}} = \left(a^{\log_a c}\right)^{\frac{1}{\log_a b}} = c^{\frac{1}{\log_a b}} = c^{\log_b a}$

~~$3 \approx \log_{10} 1024 = \frac{\log_2 1024}{\log_2 10} = 10 \cdot \frac{1}{\log_2 10}$ $\log_2 10 \approx 3{,}(3)$~~

$\frac{1}{\log_{13} 5} = \frac{\log_{13} 13}{\log_{13} 5} = \log_5 13$

$|x^2 - 26x|^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + (26x - x^2)^{\frac{1}{\log_{13} 5}} = (26x - x^2)^{\log_5 13} + x^2$

$144 + 25 = 169$ $\quad 26x - x^2 = t$

$|t|^{\log_5 12} + t \geq t^{\log_5 13}$

$t \geq 0$ ~~$t > 0$~~ $t > 0$

$t^{\log_5 12} + t - t^{\log_5 13} \geq 0$

$\log_5 12 - 1 = \log_5 12 - \log_5 5 = \log_5 \frac{12}{5} = a$

$\log_5 13 - 1 = \log_5 \frac{13}{5} = b$

$b > a$

$12^k - 13^k + 5^k \geq 0$ $\quad t^{(\log_5 12) - 1} + 1 - t^{(\log_5 13) - 1} \geq 0$

$12^k + 5^k = 13^k$

$k = 2 - \text{OK}$

$\cancel{t^a + 1 - t^b \geq 0}$

$\cancel{t^a(1 - t^{b-a}) \geq -1}$

$\cancel{t^a(1 - t^c) \geq -1}$ $\quad f(t) = t^a - t^b + 1 \geq 0$

$\log_5 \frac{13}{5} - \log_5 \frac{12}{5} = \log_5 \frac{13}{12} = c$

$\frac{1}{\log_5 \frac{13}{12}} = \log_{\frac{13}{12}} 5$

$t = 5^k$

$k = \log_5 t$

$t^a - t^b + 1 = 0$ $\quad \frac{df(t)}{dt} = at^{a-1} - bt^{b-1} = t^{a-1}(a - bt^{b-a}) = 0$

~~5 корн.~~

$a - bt^{b-a} = 0$

$\frac{\log_5 \frac{12}{5}}{\log_5 \frac{13}{5}} = \log_{\frac{13}{5}} \frac{12}{5}$

$t = 5^k$

$t^{b-a} = \frac{a}{b}$

$(5^k)^{\log_5 a} = a^k$

$\left(\frac{12}{5}\right)^k - \left(\frac{13}{5}\right)^k + 1 \geq 0$

$t = \sqrt[b-a]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{b-a}} = \left(\log_{\frac{13}{5}} \frac{12}{5}\right)^{\log_{\frac{13}{12}} 5}$

$2-\cancel{2a} \le -1-\cancel{2a}$ $\quad 76+28=96+8=104$

$$25 \cdot 25: \quad 125 + 50\_ = 625$$

$6\cdot 9=54$

$54\cdot 2=108$

$18\cdot 9=180-18=$

$=162$

$162+108=270$

$f(ab)=f(a)+f(b) \quad \forall a,b\in Q$

$4a^2-42a+36$

$f(p)=\left[\frac{p}{4}\right] \quad \forall p\in P \qquad 4(a^2-18a+9)$

$12a-18=6(2a-3)$

$\begin{cases} x\in 4;28 & x\in N \\ y\in 4;28 & y\in N\end{cases} \quad f\left(\frac{x}{y}\right)<0$

ax^2+bx+c

$a\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{2a}+c=c-\frac{b^2}{2a}$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)=f(x)-f(y)+f(1)$

$f(1)=f\left(\frac{1}{y}\right)+f(y) \Rightarrow f\left(\frac{1}{y}\right)=\cancel{f(y)-f(1)}\ f(1)-f(y)$

$f(a)=f(a)+f(1)\Rightarrow f(1)=0$

$f(2)=\left[\frac{2}{4}\right]=0$

$f(3)=\left[\frac{3}{4}\right]=0$

$f(4)=2\cdot f(2)=0$

$f(5)=\left[\frac{5}{4}\right]=1$

$f(6)=f(2)+f(3)=0$

$f(7)=\left[\frac{7}{4}\right]=1$

$f(8)=f(4)+f(2)=0$

$f(9)=f(3)\cdot 2=0$

$f(10)=f(2)+f(5)=1$

$f(11)=\left[\frac{11}{4}\right]=2$

$f(12)=f(3)+f(4)=0$

$f(13)=\left[\frac{13}{4}\right]=3$

$f(14)=f(2)+f(7)=1$

$f(15)=f(3)+f(5)=1$

5 – 1

7 – 1

10 – 1

11 – 2

13 – 3

$f(16)=f(2)+f(8)=0$

$f(17)=\left[\frac{17}{4}\right]=4$

$f(18)=f(2)+f(9)=0$

$f(19)=\left[\frac{19}{4}\right]=4$

$f(20)=f(4)+f(5)=1$

$f(21)=f(3)+f(7)=1$

$f(22)=f(11)+f(2)=2$

$f(23)=\left[\frac{23}{4}\right]=5$

$f(24)=f(6)+f(4)=0$

$f(25)=f(5)+f(5)=2$

$f(26)=f(2)+f(13)=3$

$f(27)=f(3)+f(9)=0$

$f(28)=f(2)+f(14)=1$

cnt 0 = 9

cnt 1 = 8

cnt 2 = 3

cnt 3 = 2

cnt 4 = 2

cnt 5 = 1

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17} \end{cases}$$

$a = 2\alpha$

$b = 2\beta$

$x = \sin a$ $\quad v = \sin b$

$y = \cos a$ $\quad t = \cos b$

$$\begin{cases} \sin(a+b) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(a+2b) + \sin(a) = -\frac{2}{17} \end{cases}$$

$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a = $

$= xt + vy$

$\cos 2b = \cos^2 b - \sin^2 b = t^2 - v^2$

$\sin 2b = 2\sin b\cos b = 2tv$

$\sin(a+2b) = \sin a\cos 2b + \sin 2b\cos a =$

$= x(\cos 2b) + (\sin 2b)y =$

$= x(t^2 - v^2) + 2tvy$

$\sin^2(a+b) = \frac{1}{17}$

$\cos^2(a+b) = \frac{16}{17}$

$\cos(a+b) = \frac{\pm 4}{\sqrt{17}}$

$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b = ty - xv$

$\sin(a+2b) = \sin(a+b)\cos b + \sin b\cos(a+b) =$

$= \cancel{-\frac{1}{\sqrt{17}}\cos b \pm \frac{4}{\sqrt{17}}\sin b}$

$= -\frac{1}{\sqrt{17}}t + v(ty - xv)$

$\cos(a+b) = ty - xv$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}t + v(ty - xv) + x = -\frac{2}{17}$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}t + vty - xv^2 + x = -\frac{2}{17}$

$v^2 = 1 - t^2$

$\Downarrow$

$-xv^2 = -x + xt^2$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}t + vty + xt^2 = -\frac{2}{17}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№2 $\overbrace{36+45}^{45}+9=90$

$$\begin{array}{r} \times 13 \\ 13 \\ \hline +39 \\ 13 \\ \hline 169 \end{array}$$

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$$

$81+36=117$

$13\cdot 9=117$

$9(x^2-2x)+y^2-12y-45=0$

$9((x-1)^2-1)+(y-6)^2-36-45=0$

$9(x-1)^2+(y-6)^2-90=0$

$(x-1)(y-6)=xy-y-6x+6$

$$\begin{array}{r} -1690 \\ 81 \\ \hline 1609 \end{array}$$

$a=x-1$

$b=y-6$

$b-6a=y-6-6x+6=y-6x$

$\cancel{810+144=954}$ $81+144=225$

$$\begin{cases} b-6a=\sqrt{ab} \\ 9a^2+b^2-90=0 \end{cases} \to \cancel{b_{1,2}} \; b^2=90-9a^2=9(10-a^2)$$

$b=\pm 3\sqrt{10-a^2}$ $(a^2\leq 10)$

$$\begin{cases} ab\geq 0 \\ b^2-12ab+36a^2=ab \to \cancel{b^2+}\; 36a^2-13ab+b^2=0 \\ 9a^2+b^2-90=0 \to 9a^2+b^2=90 \end{cases}$$

$36a^2\pm\cancel{13a}\, 39a\sqrt{10-a^2}+90-\cancel{90}=\cancel{0}\,0$

$\cancel{27a^2-13ab+90=0}$

$\cancel{a^2=\frac{13b\pm\sqrt{169b^2-9000}}{50}}$ $(169b^2\geq 9000)$

$\cancel{a^2=\frac{169b^2-9000}{2500}}$ $(10-a^2\geq 0)$

$9a^2\pm 13a\sqrt{10-a^2}+30=0$

$\pm 13a\sqrt{10-a^2}=9a^2+30$

$169a^2(10-a^2)=81a^2+540a+900$

$169a^4-1609a^2+540a+900=0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

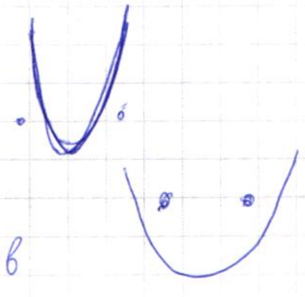
$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \Leftrightarrow \frac{8-6x}{3x-2} - ax - b \geq 0 \Leftrightarrow \frac{8-6x-3ax^2+2ax+2b-3bx}{3x-2} \geq 0$

т.к. $x \in (\frac{2}{3}; 2]$, $3x-2>0 \Rightarrow$

$8-6x-3ax^2+2ax+2b-3bx \geq 0$

$(-3a)x^2+(2a-3b-6)x+(8+2b) \geq 0$

$f(x)$ $(3a)x^2+(6+3b-2a)x + \cancel{(8+2b)} (-8-2b) \leq 0$



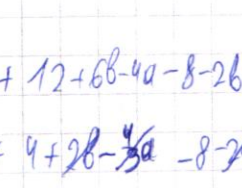
если $a=0$:

$(6-3b)x \leq 8+2b$

$\cancel{x \leq \frac{8+2b}{6-3b}} \Rightarrow 2 \leq \frac{8+2b}{6-3b}$ $8+2b$

$\cancel{6-3b}$

$\begin{cases} 12-6b \leq 8+2b \\ 4-2b \leq 8+2b \end{cases} \to \begin{matrix} 4 \leq 8b \\ -4 \leq 4b \end{matrix} \to b \geq \frac{1}{2}$



~~если~~ ~~иначе~~

~~$x_{1,2}=$~~

~~иначе~~ если $a>0$: $\cancel{f(x) \geq 0}$ $\begin{cases} f(2) \leq 0 \\ f(\frac{2}{3}) \leq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 12a+12+6b-4a-8-2b \leq 0 \\ \frac{4}{3}a+4+\cancel{2b}-\frac{4}{3}a-8-\cancel{2b} \leq 0 \end{cases}$

$8a+4b+4 \leq 0$ $\quad -4 \leq 0$

$2a+b+1 \leq 0$ $\Rightarrow$

№6

Усл. 1 — $\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b$ для $\forall x \in \left(\frac{2}{3}; 2\right]$

Усл. 2 — $ax+b \geq 18x^2-51x+28$ для $\forall x \in \left(\frac{2}{3}; 2\right]$

Усл. 1:

т.к. $x > \frac{2}{3}$, $3x-2>0 \Rightarrow$ домножим обе стороны на $3x-2$

$8-6x \geq 3ax^2-2ax+3bx-2b$

$f(x)=3ax^2+(6+3b-2a)x+(-8-2b) \leq 0$

~~если $a=0$:~~

~~$(6-3b)x \leq 8+2b$~~

~~т.к. $(6-3b)x-8-2b$ — линейная функция,~~ проверим только

$f\left(\frac{2}{3}\right)= \frac{4}{3}a+4+2b-\frac{4}{3}a-8-2b=-4 \leq 0$ (всегда)

если $a=0$:

$f(x)$ — линейна $\Rightarrow$ достаточно проверить $f(2)$:

$2(6+3b) \leq 8+2b$

$12+6b \leq 8+2b$

~~$8b \geq 4$~~ $4b \leq -4$

~~$b \geq \frac{1}{2}$~~ $b \leq -1$

если $a>0$: $f(x)$ — парабола с ветвями вверх $\Rightarrow$ достаточно проверить $f(2)$:

$12a+12+6b-4a-8-2b \leq 0$

$8a+4b+4 \leq 0$

$2a+b+1 \leq 0$

$b \leq -1-2a$

иначе $a<0$: $f(x)$ — парабола с ветвями вниз $\Rightarrow$ нужно проверить $f(2)$ и коорд. вершины: если вершина $f(x)$ при $x \in \left(\frac{2}{3}; 2\right]$, вершина должна быть меньше 0