МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

√1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

√2. [4 балла] Решите систему уравнений

6

$-2-2y=\sqrt{-2y+2-2y+2}$

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2},\\ x^2+9y^2-4x-18y=12.\end{cases}$$

$4+4y^2+8y=-4y+4$

$4+8y^2+8-18y=12$

$4y^2+12y=0$

$y(y-2)=0$

√3. [5 баллов] Решите неравенство

$y(y+3)=0$

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

$\left[\begin{array}{l} y=0\\ y=-3\end{array}\right.$

± 4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

± 6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

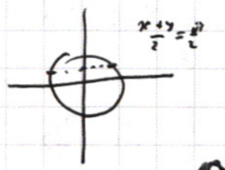
(заполняется секретарём)

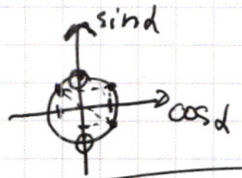
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

Найти: $tg\,\alpha$ - ?





~~$\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$~~

$* \boxed{\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n_2, n_2 \in Z.}$

① $2\alpha + 2\beta = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi n, n \in Z.$

$2\alpha + 2\beta = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi n_1, n_1 \in Z.$

② $\sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \sin 4\beta \cdot \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin 2\alpha(\cos 4\beta + 1) + \sin 4\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin 2\alpha(2\cos^2 2\beta) + \sin 4\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$2 \cdot \cos^2 2\beta \cdot \sin 2\alpha + 2 \cdot \sin 2\beta \cdot \cos 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$2\cos 2\beta(\cos 2\beta \cdot \sin 2\alpha + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha) = -\frac{4}{5}$

$$\begin{cases} \cos 2\beta \cdot \sin(2\beta + 2\alpha) = -\frac{4}{10} \\ \sin(2\beta + 2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$+\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \cos 2\beta = +\frac{4}{10}$

$\boxed{\cos 2\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

$\cancel{tg\alpha} =$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{4}{5}} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

- $$\begin{cases} \sin 2\alpha \cdot \frac{2}{\cancel{\sqrt{5}}} + \cos 2\alpha \cdot \frac{1}{\cancel{\sqrt{5}}} = -\frac{1}{\cancel{\sqrt{5}}} \\ \sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$2\cancel{2}\sin\alpha \cdot \cos\alpha + \cancel{2}\cos^2\alpha - \cancel{1} = \cancel{-1}\,0$

$\cos\alpha\,(2\sin\alpha + \cos\alpha) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} \cos\alpha = 0 \\ 2\sin\alpha + \cos\alpha = 0 \end{array}\right.$$

$\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi n', n' \in Z.$, но из ООЗ $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$

$\sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\sin\alpha + \frac{1}{\sqrt{5}}\cos\alpha\right) = 0$

$\sin\left(\alpha + \arccos\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 0$

$$\begin{cases} \boxed{\alpha = -\arccos\frac{2}{\sqrt{5}} + \pi \cdot n'', n'' \in Z.} \\ \sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases} \Downarrow$$

$$\left[\, tg\alpha = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{-\frac{2}{\sqrt{5}}} = -\frac{1}{2} \right.$$

- $$\begin{cases} \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$2\sin\alpha \cdot \cos\alpha - 2\cos^2\alpha + 1 = -1$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2\cos^2\alpha - 4\sin\alpha\cdot\cos\alpha - 2 = 0$

$\cos^2\alpha - 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha - 1 = 0$

$\cancel{\frac{D}{4} = \sin^2\alpha + 1}$

$\cancel{\left[\begin{array}{l}\cos\alpha = \sin\alpha - \sqrt{\sin^2\alpha+1}\\ \cos\alpha = \sin\alpha + \sqrt{\sin^2\alpha+1}\end{array}\right.}$

$\cancel{\cos^2}\alpha - 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha - \cancel{\cos^2}\alpha - \sin^2\alpha = 0$

$2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha + \sin^2\alpha = 0$

$\sin\alpha(2\cos\alpha + \sin\alpha) = 0$

$\left[\begin{array}{l}\sin\alpha = 0\\ \sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\cos\alpha + \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\sin\alpha\right) = 0\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}\alpha = \pi\cdot n,\ n\in Z\\ \alpha = -\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}} + \pi\cdot n_1,\ n_1\in Z\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}tg\,\alpha = 0\\ tg\,\alpha = \frac{-\frac{2}{\sqrt{5}}}{\frac{1}{\sqrt{5}}} = -2\end{array}\right.$

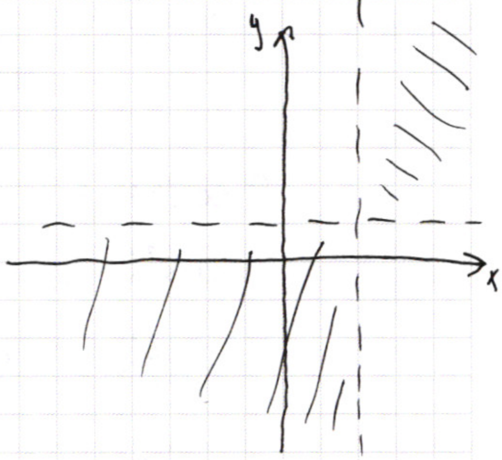
$\cancel{tg\,\alpha = -2}$

Итог: $\left[\begin{array}{l}tg\,\alpha = 0\\ tg\,\alpha = -2\\ tg\,\alpha = -\frac{1}{2}\end{array}\right.$ Ответ: $\left\{0; -2; -\frac{1}{2}\right\}$.

$\cancel{tg\,\alpha}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№2 $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$ ☆



$(x-2)^2+(3y-1)^2=12+4+1$

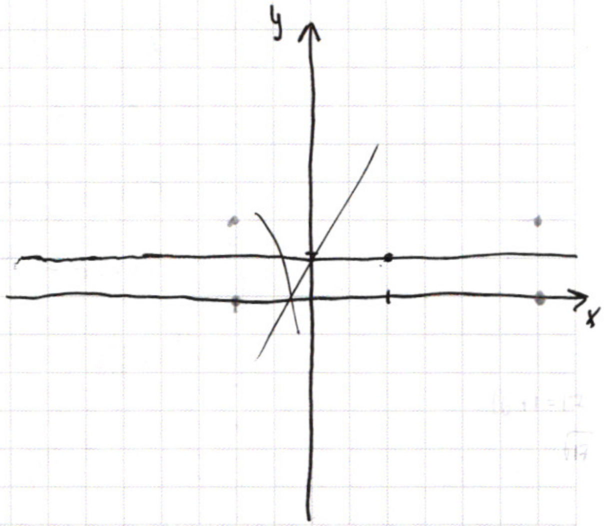
$\begin{cases} (x-2)^2+(3y-1)^2=17 \\ xy-x-2y+2\geq 0 \\ x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2 \end{cases}$

$x^2-5xy+4y^2+x+2y=2$

$\cancel{x(x-5y)+x-5y+4y^2+7y=2}$

$\cancel{(x-5y)(x+1)}$

$(x-2)^2+9(y-1)^2=25$



$\cancel{f(x)=x^2-4yx+4y^2}$

$f(x)=\cancel{\sqrt{xy-x-2y+2}}\ xy-x-2y+2$

$\cancel{xy-x-2y+2}$

☆ $xy-x-2y+2\geq 0$

$y(x-2)-(x-2)\geq 0$

$(x-2)(y-1)\geq 0$

$\left[\begin{array}{l} y=1 \\ x=2 \\ \begin{cases} x>2 \\ y>1 \end{cases} \\ \begin{cases} x<2 \\ y<1 \end{cases} \end{array}\right.$

$\begin{cases} x^2-4yx+4y^2=xy-x-2y+2 \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$

$x^2-5yx+4y^2=-x-2y+2$

$\cancel{(x-2y)^2-x(x-y)-4y(x-y)=-x-2y+2}$

$\cancel{(x-4y)(x-y)=-x-2y+2}$

$\cancel{(x-4y)(x-y)+x+2y=2}$

$4y^2-y(5x-2)+x^2+x-2=0$

$D=25x^2-20x+4-16x^2-16x+32=9x^2-36x+36=9(x^2-4x+4)=$

$=9(x-2)^2$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cancel{x(x-y+1)-(-4y^2+4yx+2y)=2}$

$\cancel{x(x-y+1)-}$ $\cancel{x(x-y+1)+4y^2+2y-4xy=2}$

$\cancel{x(x-y+1)-2y(x-2y-1)=2}$

$$\left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} y=\frac{\sqrt{25-(x-2)^2}}{3}+1 \\ y=-\frac{\sqrt{25-(x-2)^2}}{3}+1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} y=\frac{5x-2-3(x-2)}{8}=\frac{x+2}{4} \\ y=\frac{5x-2+3(x-2)}{8}=x-1 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

① $\frac{\sqrt{25-(x-2)^2}+3}{3}=\frac{x+4\cancel{2}}{\cancel{8}4}$

$\frac{25-(x-2)^2}{9}=\left(\frac{x-2}{4}\right)^2$

$\frac{25-(x-2)^2}{9}=\frac{(x-2)^2}{16}$

$25\cdot16-16(x-2)^2=9(x-2)^2$

$\cancel{25}\cdot16-\cancel{25}(x-2)^2=0$

$(x-2)^2=16$

$\left[\begin{array}{l} x-2=4 \\ x-2=-4 \end{array}\right.$

① $\left\{\begin{array}{l} x\geq2 \\ \left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=-2 \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow x=6$.

② $\cancel{\frac{\sqrt{25-(x-2)^2}}{3}=\frac{2\cancel{8}x+\cancel{4}1}{\cancel{8}2}-1}$

$\cancel{\frac{\sqrt{25-(x-2)^2}}{3}=\frac{2x-1}{2}}$

$\cancel{\frac{25-(x-2)^2}{9}=\frac{(2x-1)^2}{4}}$

$\cancel{100-4(x-2)^2=9(2x-1)^2}$

$\cancel{100-4x^2+16x-16=36x^2-36x+9}$

$\cancel{40x^2-52x-75=0}$

$\cancel{\frac{2}{4}=}$ $\boxed{x=\frac{5+2\sqrt{10}}{\sqrt{10}}}$

② $\left\{\begin{array}{l} x\geq2 \\ \left[\begin{array}{l} x=\frac{5+2\sqrt{10}}{\sqrt{10}} \\ x=\frac{2\sqrt{10}-5}{\sqrt{10}} \end{array}\right. \end{array}\right.$

② $\frac{\sqrt{25-(x-2)^2}}{3}=x-2$

$\frac{25-(x-2)^2}{9}=(x-2)^2$

$10(x-2)^2=25$

$\left[\begin{array}{l} x-2=\frac{5}{\sqrt{10}} \\ x-2=-\frac{5}{\sqrt{10}} \end{array}\right.$

③ $$1 - \frac{x+2}{4} = \frac{\sqrt{25-(x-2)^2}}{3}$$

$$\left(\frac{2-x}{4}\right)^2 = \frac{25-(x-2)^2}{3}$$

$$9\cdot(x-2)^2 = 16\cdot 25 - 16\cdot(x-2)^2$$

$$\begin{cases} (x-2)^2 = 16 \\ x \le 2 \end{cases}$$

$$\left[\begin{aligned} x &= 6 \\ x &= -2 \end{aligned}\right. \Rightarrow x=-2.$$

④ $$1-x+1 = \frac{\sqrt{25-(x-2)^2}}{3}$$

$$\begin{cases} x \le 2 \\ \left[\begin{aligned} x &= \frac{2\sqrt{10}-5}{\sqrt{10}} \\ x &= \frac{2\sqrt{10}+5}{\sqrt{10}} \end{aligned}\right. \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$x = \frac{2\sqrt{10}-5}{\sqrt{10}}$$

Итог:
$$\left[\begin{aligned}
&\left[\begin{aligned}
&\begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases} \\
&\begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases} \\
&\begin{cases} x=\frac{5+2\sqrt{10}}{\sqrt{10}} \\ y=\frac{5}{\sqrt{10}}+1 \end{cases} \\
&\begin{cases} x=\frac{2\sqrt{10}-5}{\sqrt{10}} \\ y=1-\frac{5}{\sqrt{10}} \end{cases}
\end{aligned}\right. \\
&\left[\begin{aligned}
&y=1 \\
&x=2 \\
&\begin{cases} x>2 \\ y>1 \end{cases} \\
&\begin{cases} x<2 \\ y<1 \end{cases}
\end{aligned}\right.
\end{aligned}\right.$$

Итог:
$$\left[\begin{aligned}
&\begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases} \\
&\begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases} \\
&\begin{cases} x=\frac{5+2\sqrt{10}}{\sqrt{10}} \\ y=\frac{5}{\sqrt{10}}+1 \end{cases} \\
&\begin{cases} x=\frac{2\sqrt{10}-5}{\sqrt{10}} \\ y=1-\frac{5}{\sqrt{10}} \end{cases}
\end{aligned}\right.$$

Ответ: $(-2;0)$; $(6;2)$; $\left(\frac{5+2\sqrt{10}}{\sqrt{10}}; \frac{5}{\sqrt{10}}+1\right)$; $\left(\frac{2\sqrt{10}-5}{\sqrt{10}}; 1-\frac{5}{\sqrt{10}}\right)$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 $5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geqslant |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$

① * $x^2+18x>0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x<-18 \\ x>0 \end{array}\right.$

$\Downarrow$

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geqslant (x^2+18x)^{\log_{12}13}-18x$$

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} \geqslant (x^2+18x)\left((x^2+18x)^{(\log_{12}13-1)}-1\right)$$

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} \geqslant (x^2+18x)\left((x^2+18x)^{\log_{12}\frac{13}{12}}-1\right)$$

$$\log_{12}5^{\log_{12}(x^2+18x)} \geqslant \log_{12}(x^2+18x)\cdot\left((x^2+18x)^{\log_{12}\frac{13}{12}}-1\right)$$

$$\log_{12}(x^2+18x)\cdot\log_{12}5 \geqslant \log_{12}(x^2+18x)+\log_{12}\left((x^2+18x)^{\log_{12}\frac{13}{12}}-1\right)$$

$$\log_{12}(x^2+18x)\cdot\left(\log_{12}\frac{5}{12}\right) \geqslant \log_{12}\left((x^2+18x)^{\log_{12}\frac{13}{12}}-1\right)$$

$$\log_{12}(x^2+18x)^{\log_{12}\frac{5}{12}} \geqslant \log_{12}\left((x^2+18x)^{\log_{12}\frac{13}{12}}-1\right)$$

$12>1$

$$(x^2+18x)^{\log_{12}\frac{5}{12}} \geqslant (x^2+18x)^{\log_{12}\frac{13}{12}}-1$$

$$-(x^2+18x)^{\log_{12}\frac{5}{12}}+(x^2+18x)^{\log_{12}\frac{13}{12}} \leqslant +1$$

$$(x^2+18x)^{\log\frac{5}{12}}\cdot\left((x^2+18x)^{\log_{12}\frac{13}{5}}-1\right) \leqslant 1$$

$\frac{13\cdot12}{12\cdot5}$

$$\frac{(x^2+18x)^{\log_{12}13}-(x^2+18x)^{\log_{12}5}}{x^2+18x} \leqslant 1$$

$$\frac{(x^2+18x)^{\log_{12}13}-(x^2+18x)^{\log_{12}5}-(x^2+18x)}{\underset{\vee 0}{x(x+18)}} \leqslant 0$$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$(x^2+18x)^{\log_{12}13} - (x^2+18x)^{\log_{12}5} - (x^2+18x) \le 0$

$\cancel{x^2+18x}$ $(x^2+18x)^{\log_{12}13} \le (x^2+18x)^{\log_{12}5} + (x^2+18x)^{\log_{12}12}$

$\boxed{x^2+18x=t}$ $\boxed{t^{\log_{12}13} \le t^{\log_{12}5} + t^{\log_{12}12}}$

$5^{\log_{12}t} \ge t^{\log_{12}13} - t$ $\log_{12}13 > \log_{12}12 > \log_{12}5$

$\cancel{\log_{12}t \cdot \log_{12}5 \ge \log_{12}t}$

$\log_{12}t \cdot \cancel{\log_5 5}^{=1} \ge \log_5(t^{\log_{12}13} - t)$

$\log_{12}t \ge \log_5(t^{\log_{12}13} - t)$

$\log_{12}t \ge \dfrac{\log_{12}(t^{\log_{12}13} - t)}{\log_{12}5}$

$\dfrac{\log_{12}(t^{\log_{12}13} - t) - \log_{12}5 \cdot \log_{12}t}{\cancel{\log_{12}5}} \le 0$

$\begin{cases} \text{При } t<1 \\ t^{\log_{12}13} < t^{\log_{12}5} \end{cases} \Rightarrow t^{\log_{12}13} < t^{\log_{12}5}$

$\Downarrow$

$t^{\log_{12}13} < t^{\log_{12}5} + t^{\log_{12}12}$

$\Downarrow$

$0<t<1$ – р-ние.

$* \; 0 < x^2+18x \le 1$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<-18 \\ x>0 \end{array}\right. \\ x^2+18x-1 \le 0 \end{cases}$

$\frac{D}{4} = 81+1=82$

$(x-(-9+\sqrt{82}))(x+9+\sqrt{82}) \le 0$

$-9-\sqrt{82}$ -18 0 $\sqrt{82}-9$ x

① $x \in [-9-\sqrt{82}; -18) \cup (0; \sqrt{82}-9]$

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 8

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

• При $t > 1$

~~$t^{\log_{12}13} > 1$~~

~~$t^{\log_{12}5} > 1$~~

~~$t^{\log_{12}12} > 1$~~

$\Rightarrow t^{\log_{12}13} > t^{\log_{12}12} \Rightarrow t^{\log_{12}13} > t^{\log_{12}12} + t^{\log_{12}5}$, значит,

при $t > 1$ нет р-ий.

Итог: $x \in [-9-\sqrt{82}; -18) \cup (0; \sqrt{82}-9]$

Ответ: $[-9-\sqrt{82}; -18) \cup (0; \sqrt{82}-9]$.

№5 $f(ab) = f(a) + f(b)$ $\quad x, y \in N$ $\quad$ всего пар $(x;y) = 24^{24}$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$ $\quad S = 24^{24}$

$1 \le x \le 24$

$1 \le y \le 24$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$$\begin{cases} f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) \\ \cancel{f\left(\frac{x}{y}\right) = \left[\frac{x}{4y}\right]} \\ f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \end{cases}$$

Если $\frac{x}{y}$ - простое число, то $f\left(\frac{x}{y}\right) \ge 0$, т.к. $\frac{x}{y} > 0$ $(x, y \in N)$ и

$\frac{x}{4y} > 0 \Rightarrow \left[\frac{x}{4y}\right] \ge 0 \Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) \ge 0$.

Из этого следует, что $x \ne y$ и $\frac{x}{y}$ - не простое число.

$(S = 24^{24} - 24)$

$$\begin{cases} f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) \\ f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \end{cases}$$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$ (р-простое)

$f(p) = f(p) + f(1)$ $\Rightarrow \boxed{f(1) = 0}$

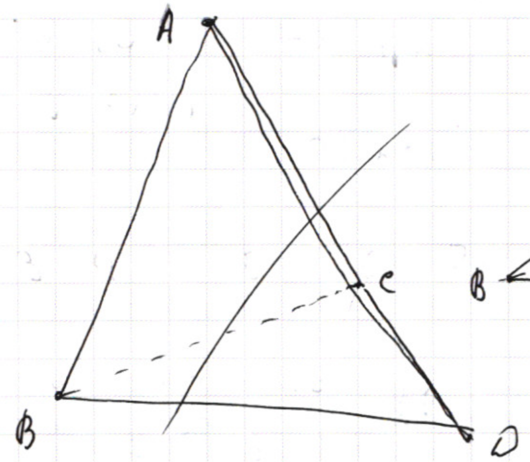
№7

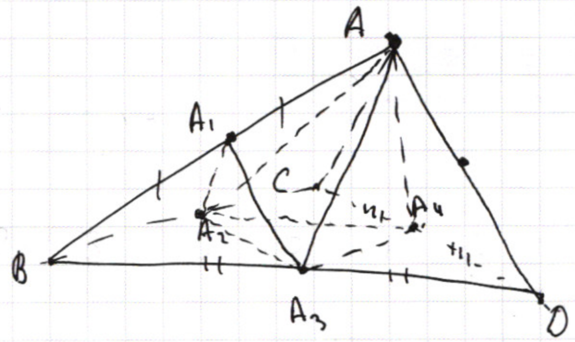
AB = 1

BD = 2

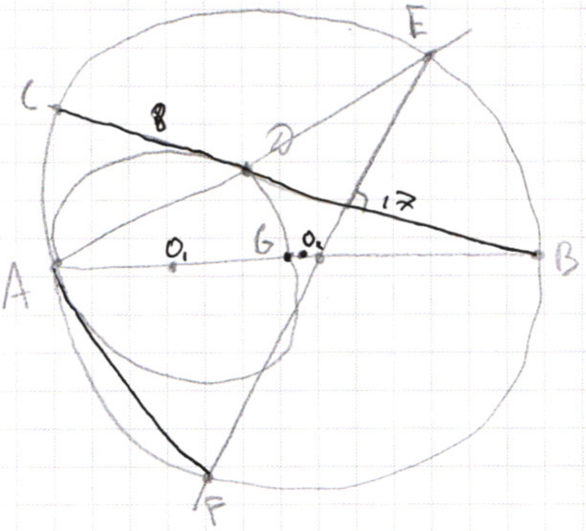
CD = 3

BC - ?





№4



R - ?, r - ?, ∠AFE - ?, S_{AFE} - ?

CD = 8

BD = 17.

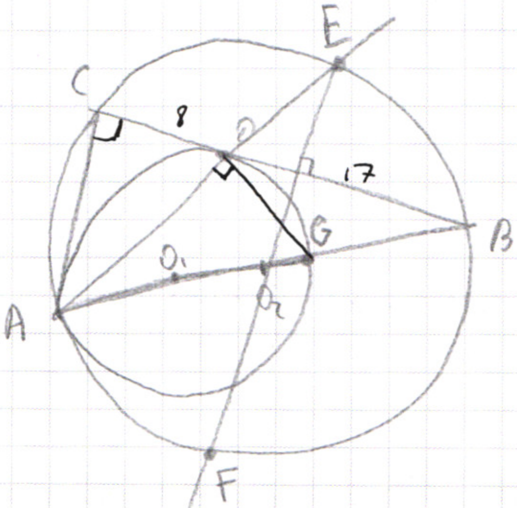
$$2R \cdot |G \cdot B| = 17^2$$

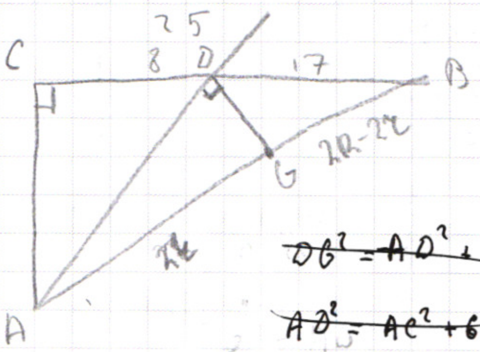
$$|GB| = 2R - 2r$$

$$2R \cdot (2R - 2r) = 17^2$$

$$\boxed{4R^2 - 4R \cdot r - 289 = 0}$$

$17 \times 17 = 119 + 17\_ = 289$





$\cancel{DG^2 = AD^2 + 4r^2}$

$\cancel{AD^2 = AC^2 + 64}$

$\cancel{4R^2 = AC^2 + 25^2}$

$\cancel{DG^2 = 4r^2 - AC^2 - 64}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$$\begin{cases} ax+b \geq \frac{12x+11}{4x+3} \\ ax+b \leq -8x^2-30x-17 \\ x \geq -\frac{11}{4} \\ x < -\frac{3}{4} \end{cases}$$

$f(x) = \frac{12x+11}{4x+3}$

$f(x) = 3 + \frac{2}{4x+3}$

$g(x) = -8x^2-30x-17$

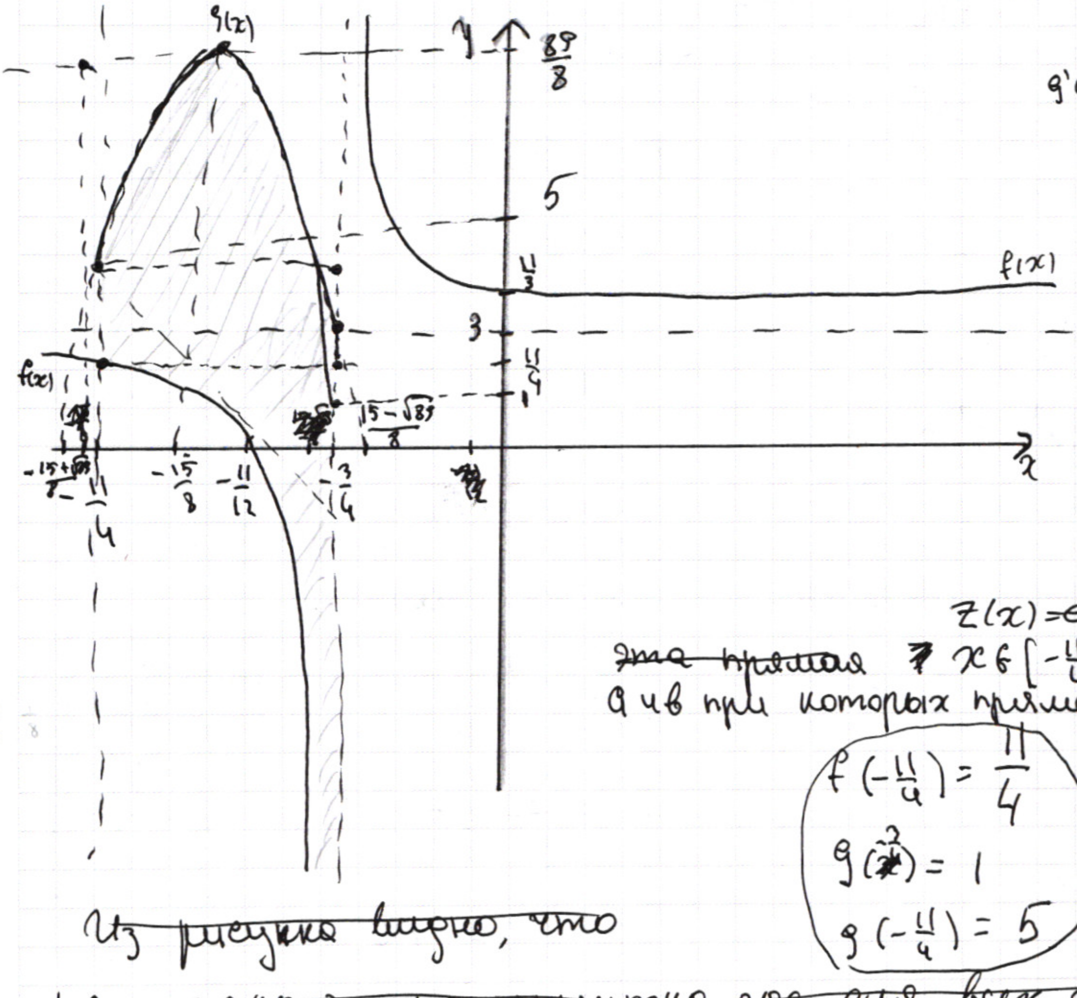
$D = 225-136 = 89$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{15-\sqrt{89}}{-8} > -\frac{3}{4} \\ x = \frac{15+\sqrt{89}}{-8} < -3 \end{array}\right.$$

$g'(x) = -16x-30$

$x_в = -\frac{15}{8}$

$y_в = \frac{89}{8}$



$z(x) = ax+b$ — прямая

~~эта прямая~~ $\forall x \in [-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$, то $z(x) \in [5; z(-\frac{3}{4}))$

a и b при которых прямая на пр-ке $x \in [-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$ лежит в заштрихованной обл-ти — подходят.

$f(-\frac{11}{4}) = \frac{11}{4}$

$g(-\frac{3}{4}) = 1$

$g(-\frac{11}{4}) = 5$

~~Из рисунка видно, что нет такого промежутка, где для всех $x \in [-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$ выполнялось бы~~

$5 = -\frac{11}{4}a + b$

$1 = -\frac{3}{4}a + b$

$4 = -\frac{8}{4}a$

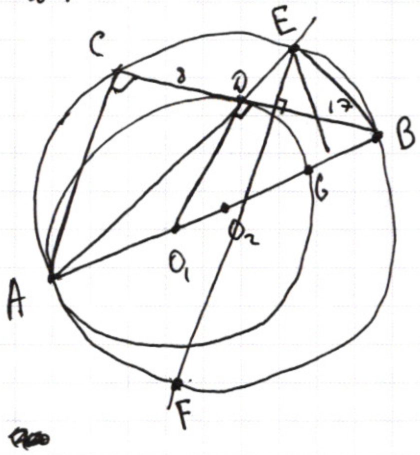
$\begin{cases} a = -2 \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$ — один из вариантов пар.

~~$ax+b = 3 + \frac{2}{4x+3}$~~

~~$-2x+b = 3 + \frac{2}{4x+3}$~~

~~$b = 12x+11+8x^2-6x$~~

№4



$O_1D \parallel EF$, т.к. $O_1D \perp CB$ и $EF \perp CB$ (как р.к кас.)

Из $\triangle O_1DB$ ($\angle O_1DB = 90°$)

По т. Пифа:

$$O_1D^2 + DB^2 = O_1B^2$$

$$r^2 + 17^2 = (r + 2R - 2r)^2$$

$$\cancel{r^2} + 17^2 = 4R^2 + \cancel{r^2} - 4r\cdot R$$

$$\boxed{4R^2 - 4r\cdot R - 289 = 0}$$

$17 \times 17 = 119$ ... 289

1160	2
580	2
290	2
145	5
29	

$$R = \frac{2r - \sqrt{4r^2 + 4\cdot 289}}{4} < 0.$$

$$R = \frac{2r + \sqrt{4\cdot r^2 + 4\cdot 289}}{4}$$

$$R = \frac{r + \sqrt{r^2 + 289}}{2}$$

$25 \times 25 = 625$

$$\frac{25\cdot 9}{64}\cdot r^2 = 289$$

$$r = \frac{\sqrt{289}\cdot 8}{5\cdot 3} = \frac{17\cdot 8}{15} = \frac{136}{15}$$

R - ?
r - ?
$\angle AFE$ - ?
$S_{\triangle AFE}$ - ?

$CD = 8$

$BD = 17$

Т.к. CB - кас-ая, AB - сек-ая окр ω, то $AB\cdot GB = DB^2$

$AB = 2R$

$GB = 2R - 2r$

$$\boxed{4R^2 - 4R\cdot r - 289 = 0}$$

~~Т.к. $EF \parallel O_1D$ по т. Фал.~~:

$\cancel{\frac{DB}{O_1B}} =$

$\angle ACB = 90°$, т.к. AB - диаметр.

$\Downarrow$

$AC \parallel O_1D \parallel FE$, тогда по т. Фалеса.

$$\frac{CD}{DB} = \frac{AO_1}{O_1B}$$

$$\frac{8}{17} = \frac{r}{\cancel{r+}2R - r}$$

$$16R - 8r = 17r$$

$$\boxed{R = \frac{25}{16}r}$$

$$4\left(\frac{25}{16}\right)^2\cdot r^2 - \frac{4\cdot 25}{16\cdot 4}\cdot r^2 - 289 = 0$$

$$\frac{25^2}{4\cdot 16}r^2 - \frac{25}{4}r^2 - 289 = 0$$

$$\boxed{r = \frac{136}{15} \quad R = \frac{85}{6}}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ω - описанная ок-ть треугольника AEF

по т. синусов. $\frac{EF}{\sin A} = \frac{AE}{\sin F} = \frac{AF}{\sin E} = 2R$

$S_{\triangle AEF} = \cancel{AE}\cdot p \cdot R$

$AE = 2R \cdot \sin\angle AFE$

$AE = \cancel{2}\cdot\frac{85}{\cancel{6}\,3}\cdot\frac{5}{\sqrt{34}} = \frac{425}{3\sqrt{34}}$

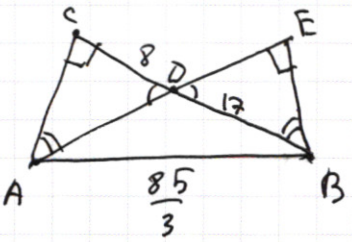
$\sin\angle AFE = \frac{AE}{2R}$

CB и AE - хорды:

$AD \cdot DE = 136$

$\angle AFE = \angle ABE$ (т.к. опираются на одну хорду).

$\triangle AEB$ ($\angle AEB = 90°$) т.к. опир. на AB - диаметр.



$AC = \sqrt{\left(\frac{85}{3}\right)^2 - (25)^2} = \frac{5\cdot 8}{3} = \frac{40}{3}$

$\triangle ACD \sim \triangle BED$

$\frac{AC}{EB} = \frac{CD}{DE} = \frac{CD}{\sqrt{DB^2 - EB^2}}$

$AC \cdot \sqrt{DB^2 - EB^2} = CD \cdot EB$

$289 - EB^2 = \frac{\cancel{64}\,4 \cdot EB^2 \cdot 9}{\cancel{(40)^2}\,\cancel{25}\,\cancel{100}\cdot 16}$

85 | 5
17 | 17

$\frac{25\cdot 289 - 25\cdot 25 \cdot 9}{9} = \frac{25\cdot(289 - 225)}{9} = \frac{25}{9}\cdot 64$

$289 - EB^2 = \frac{9}{25}EB^2$

$EB^2 = \frac{\cancel{289}\,17 \cdot 25}{2\,\cancel{34}} =$

$EB = 5\cdot\sqrt{\frac{17}{2}}$

Из $\triangle AEB$.

~~$\sin\angle ABE = \sin\angle AFE =$~~

$\cos\angle ABE = \cos\angle AFE = \frac{EB}{AB} = \frac{\cancel{5}\sqrt{17}\cdot 3}{\sqrt{2}\cdot\cancel{85}\,17} = \frac{3}{\sqrt{34}} = \frac{3\sqrt{34}}{34}$

Ответ: $R = \frac{85}{6}$; $r = \frac{136}{15}$; $\angle AFE = \arccos\left(\frac{3\sqrt{34}}{34}\right)$