МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$

1) ОДЗ: $x^2+6x>0$, тогда $|x^2+6x|=x^2+6x$.

2) $x^2+6x=t>0$

$3^{\log_4 t}+t\geq t^{\log_4 5}$.

$t^{\log_4 3}+t-t^{\log_4 5}\geq 0$

$\underbrace{t^{\log_4 5}}_{>0}(t^{\log_4 3-\log_4 5}+t^{1-\log_4 5}-1)\geq 0 \quad |:t^{\log_4 5}$

$t^{\log_4\frac{3}{5}}+t^{\log_4\frac{4}{5}}-1\geq 0$

3) $f(t)=t^{\log_4\frac{3}{5}}+t^{\log_4\frac{4}{5}}-1\geq 0$.

(ч/з 2-го: $t>0$):

Нули: $t^a+t^b=1$, где $a=\log_4\frac{3}{5}$, $b=\log_4\frac{4}{5}$

$\log_4\frac{3}{5} < \log_4 1=0$

$\log_4\frac{4}{5}<\log_4 1=0$,

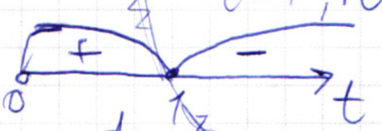
I сл. $\boxed{t\geq 1}$, тогда $\underbrace{t^a+t^b}_{\text{убыв} \downarrow \text{ на } (0;+\infty)}=1$ ($\downarrow$ на $(0;+\infty)$) т.е не более 1 корня ~~и ...~~

$\boxed{t=1}$

II сл. $0<t<1$, то $t^a+t^b=1$

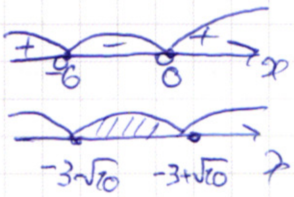
$\uparrow$ на $(0;1)$, т.е не более 1 корня, но $t=1$, но $1\notin(0;1)$, тогда $t\in\varnothing$, но на $(0;1)$ $t^a+t^b-1>0$, т.к. $t^a>1$, $t^b>1$

Имеем



$f(t)\geq 0$ при $0<t\leq 1$

$\begin{cases} x^2+6x>0 \\ x^2+6x\le 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x(x+6)>0 \\ x^2+6x-1\le 0 \end{cases}$

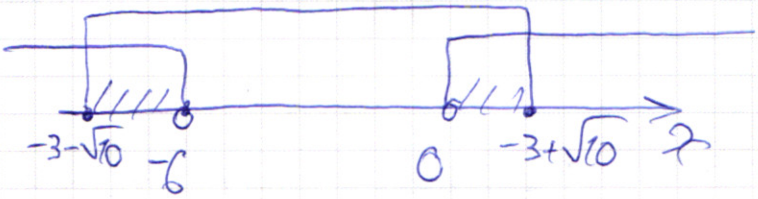


$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<-6 \\ x>0 \end{array}\right. \\ -3-\sqrt{10}\le x\le -3+\sqrt{10} \end{cases}$

$x^2+6x-1\le 0$

$\frac{D}{4}=9+1=10$

$x=-3\pm\sqrt{10}$



$-3-\sqrt{10} \vee -6$ $\qquad$ $-3-\sqrt{10}<-6$

$-\sqrt{10} < -3$ $\qquad$ $-3+\sqrt{10}>0$

$3 < \sqrt{10}$ $\qquad$ $\sqrt{10}>3$

$9 < 10$

Ответ: $x\in[-3-\sqrt{10};-6)\cup(0;-3+\sqrt{10}]$

№6.

$\frac{4x-3}{2x-2} \ge ax+b \ge 8x^2-34x+30$ на $(1;3]$, т.е

$y_1 \ge y_2 \ge y_3$ $(1;3]$, это значит, что $\forall x\in(1;3]$

$y_1 \ge y_2 \ge y_3$, т.е $Г_{y_2}$ выше $Г_{y_3}$, но ниже $Г_{y_1}$,

покажем на коорд. пл-ти.

$y_3(1)=8-34+30=4$

$y_3(2)=32-68+30=-6$

$y_3(3)=72-102+30=0$

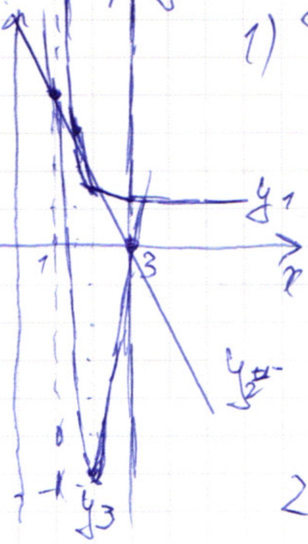
$y_1(\frac{3}{2})=3$

$y_1(2)=2{,}5$

$y_1(3)=2{,}25$

$y_1=2+\frac{1}{2x-2}$

$\begin{array}{r|l} 4x-3 & 2x-2 \\ 4x-4 & 2 \\ \hline 1 & \end{array}$



1) Т.к $y_2 \ge y_3$, то y_2 как минимум проходит через т. $y_3(1)$ и $y_3(3)$

$y_2=ax+b \in A(1;4); B(3;0)$

$\begin{cases} 4=a+b \\ 0=3a+b \end{cases}$ $a=-\frac{b}{3}$ $\qquad$ $4=-\frac{b}{3}+b$ $\qquad$ $\frac{2}{3}b=4$ $\qquad$ $\begin{cases} \boxed{b=6} \\ a=-2 \end{cases}$

2) $y_2=-2x+6$ – „предельное" полож. прям.

проверим на пересечение с y_1: $-2x+6=2+\frac{1}{2x-2}$ $\Big|$ $\frac{1}{2x-2}+2x-4=0$

$\frac{1+4x^2-4x-8x+8}{2x-2}=\frac{4x^2-12x+9}{2x-2}=\frac{(2x-3)^2}{2x-2}=0$ $\qquad$ $2x-3=0$, $x=\frac{3}{2}$ – ед. корень, т.е

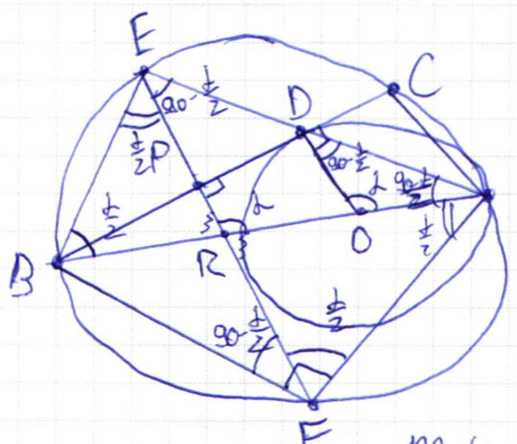
при $y_2=-2x+6$ $Г_{y_2}$ ~~касо~~ яв. касат. к $Г_{y_3}$, т.е $\boxed{\begin{array}{l} a=-2 \\ b=6 \end{array}}$ подх. по усл.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Т.к. „предельное" нижнее полож. совпало с „предельным" верхним, то других пар a и b не сущ., т.к при изм. коэф. a и b прямая будет нарушать усл. т. $A(1;4)$; $B(3;0)$ получ. фикс. точками, т.к. при изм. коэф. a, часть прямой будет ниже Γ_{y_3} на $[1;3]$, а при изм. коэф. b будет пересек. с Γ_{y_1} на $[1;3]$.

Ответ: $(-2;6)$

№4.



Дано: Ω; ω; O - центр. меньш. окр-ти $BD=\frac{13}{2}$; $CD=\frac{5}{2}$

Найти: r; R; $\angle AFE$; $S_{AEF}=?$

Решение (R-рад. большей; r-меньш)

1) Д.п. O-центр. меньш. окр-ти, т.к BC - кас. окр-ти в т. D, то $OD\perp BC$, но $EF\perp BC$, т.е $OD \parallel EF$ (по св-ву).

2) $\triangle BCA$: BA-диаметр (по усл.), т.е $\angle ACB=90°$ (по св-ву), т.е $AC\perp BC$, $AC\parallel OD\parallel EF$.

3) $\triangle BDO$: по т. Пифагора, где $BO=2R-r$, а $DO=r$

$BO^2=DO^2+BD^2$

$4R^2-4R\cdot r+\cancel{r^2}=\cancel{r^2}+\frac{169}{4}$. ①

т.к $AC\parallel OD\parallel EF$, то по т. Фалеса:

$\frac{BD}{\cancel{BC}\,DC} = \frac{BO}{OA}$ $\quad \frac{13\cdot 2}{2\cdot 5} = \frac{2R-r}{r}$ $\quad \frac{2R-r}{r} = \frac{13}{5} \Rightarrow 13r = 10R - 5r$

$18r = 10R$

$r = \frac{10}{18}R$ подставим в (1)

$4R^2 - 4R\cdot\frac{10}{18}R = \frac{169}{4}$

$4R^2\left(1-\frac{10}{18}\right) = \frac{169}{4}$.

$4R^2\frac{8}{18} = \frac{169}{4}$ $\quad R^2\cdot\frac{4\cdot 4}{9} = \frac{169}{4}$ $\quad R^2 = \frac{169\cdot 9}{4\cdot 4\cdot 4}$ $\quad R = \frac{13\cdot 3}{2\cdot 4} = \frac{39}{8}$

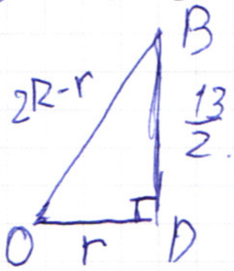
$R = \frac{39}{8}$; $r = \frac{10}{18}\cdot\frac{39}{8} = \frac{5\cdot\cancel{2}\cdot 13\cdot\cancel{3}}{6\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{8}\cdot\cancel{2}\,4} = \frac{65}{24}$.

$\boxed{R = \frac{39}{8};\ r = \frac{65}{24}}$

4) Пусть $\angle DOA = \alpha$, то в $\triangle DOA$ - равнобедр ($DO = OA$) $\Rightarrow$ $\angle ODA = \angle DAO = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, т.к $EF \parallel OD$, то $\angle FEA = \angle ODA = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, $\angle BEA$ - опир. на диаметр, т.е $\angle BEA = 90^\circ$, тогда $\angle EBA = 90^\circ - \angle DAO = 90^\circ - 90^\circ + \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$

$\angle EBA$ и $\angle EFA$ опир. на одну дугу, т.е $\angle EFA = \frac{\alpha}{2}$.

5) $\triangle BDO$: $\angle D = 90^\circ$



$\sin BOD = \frac{BD}{OB} = \frac{13}{2} : (2R - r)$

$2R - r = 2\cdot\frac{39}{8} - \frac{65}{24} = \frac{78}{8} - \frac{65}{24} = \frac{169}{24}$

$\sin BOD = \frac{\cancel{13}}{\cancel{8}}\cdot\frac{\cancel{24}\,12}{\cancel{169}\,13} = \frac{12}{13}$,

$\angle DOA = 180^\circ - \angle BOD$, т.е $\sin BOD = \sin\alpha$ $\quad \alpha = \arcsin\frac{12}{13}$, тогда

$\angle EFA = \frac{\alpha}{2} = \frac{\arcsin\frac{12}{13}}{2}$.

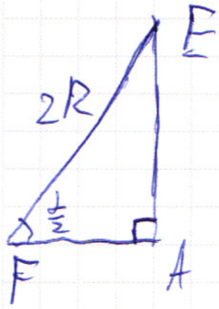
6) $BA \cap EF = R$, тогда ~~$\angle BEF = \angle EFA = \frac{\alpha}{2}$, тогда~~

$\triangle EFA$: $\angle AEF + \angle EFA = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = 90^\circ$, т.е $\angle EAF = 90^\circ$,

т.е. EF - диаметр $EF = 2R = 2\cdot\frac{39}{8} = \frac{39}{4}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7) $\triangle EFA$:



$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{EA}{2R}$$

$$EA=2R\cdot\sin\frac{\alpha}{2}=2\cdot\frac{39}{8}\cdot\frac{2\sqrt{13}}{13}=\frac{\cancel{4}\cdot 3\cdot\cancel{13}\sqrt{13}}{\cancel{4}\cdot 2\cdot\cancel{13}}=\frac{3\sqrt{13}}{2}.$$

$$\sin\alpha=\frac{12}{13}. \qquad \sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$$

$$\cos\alpha=\sqrt{\frac{169-144}{13^2}}=\frac{5}{13}, \text{ т.к. } \frac{\alpha}{2}\le 90^\circ, \text{ то}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\frac{5}{13}}{2}}=\sqrt{\frac{13-5}{26}}=\sqrt{\frac{8}{26}}=\sqrt{\frac{4}{13}}=\frac{2\sqrt{13}}{13}.$$

по т. Пифагора

$$FA=\sqrt{4R^2-EA^2}=\sqrt{(2R-EA)(2R+EA)}=\cancel{\sqrt{\frac{39}{4}+\frac{3\sqrt{13}}{2}}}$$

$$=\sqrt{4\cdot\frac{39^2}{64}-\frac{9\cdot 13}{4}}=\sqrt{\frac{39^2}{16}-\frac{39\cdot 3}{4}}=\sqrt{\frac{39^2-12\cdot 39}{16}}=\sqrt{\frac{39(39-12)}{16}}=$$

$$=\frac{\sqrt{39\cdot 27}}{4}=\frac{\sqrt{3\cdot 13\cdot 9\cdot 3}}{4}=\frac{9\sqrt{13}}{4}.$$

$$S_{EAF}=\frac{1}{2}\cdot EA\cdot FA=\frac{1}{2}\cdot\frac{9\sqrt{13}}{4}\cdot\frac{3\sqrt{13}}{2}=\frac{27\cdot 13}{16}=\frac{351}{16}$$

Ответ: $R=\frac{39}{8}$; $r=\frac{65}{24}$; $\angle AFE=\frac{\arcsin\frac{12}{13}}{2}$; $S_{EAF}=\frac{351}{16}$.

№1.

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha) = -\frac{8}{17} \end{cases}$$

$$2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$$

$$2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cdot\cos 2\beta = -\frac{8}{17}.$$

$$\cos 2\beta = \frac{4\sqrt{17}}{17}$$

$$\sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{16}{17}} = \pm\frac{\sqrt{17}}{17}$$

1) $\sin 2\beta = \frac{\sqrt{17}}{17}$, то

$$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha$$

$$\sin 2\alpha\cdot\frac{4\sqrt{17}}{17} + \frac{\sqrt{17}}{17}\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}} \quad |\cdot\sqrt{17}$$

$$4\cdot\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$$

$$8\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha + (2\cos^2\alpha - 1) = -1$$

$$8\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 2\cos^2\alpha \cancel{-1} = \cancel{-1} \quad |:\cos^2\alpha,\ \text{т.к (tg определён)}$$

$$8\cdot tg\alpha + 2 = 0$$

$$tg\alpha = -\frac{1}{4}$$ − 1 значение.

2) $\sin 2\beta = -\frac{\sqrt{17}}{17}$

$$\sin 2\alpha\cdot\frac{4\sqrt{17}}{17} - \frac{\sqrt{17}}{17}\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}} \quad |\cdot\sqrt{17}$$

$$4\cdot\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1.$$

$$4\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha - (2\cos^2\alpha - 1) = -1$$

$$4\sin\alpha\cdot\cos\alpha - 2\cos^2\alpha + 1 + 1 = 0$$

$$4\sin\alpha\cdot\cos\alpha - 2\cdot\cos^2\alpha + 2 = 0.$$

$$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha - \cancel{\cos^2\alpha} + \sin^2\alpha + \cancel{\cos^2\alpha} = 0 \quad |:\cos^2\alpha.$$

$$tg^2\alpha + 2tg\alpha = 0$$

$$tg\alpha(tg\alpha + 2) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} tg\alpha = 0 \\ tg\alpha = -2 \end{array}\right.$$

Ответ: $-2; -\frac{1}{4}; 0$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \\ 3y-2x\geqslant 0 \end{cases}$$

1) $9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2$

$4x^2-15xy+2x+9y^2+3y-2=0$

$4x^2-x\cdot(15y-2)+9y^2+3y-2=0.$

$D=225y^2-60y+4-16(9y^2+3y-2)=$

$=225y^2-60y-144y^2-48y+36=$

$=\underbrace{81y^2}_{(9y)^2}-\underbrace{108y}_{2\cdot 9\cdot 6}+\underbrace{36}_{6^2}=(9y-6)^2$

$$x=\frac{15y-2\pm(9y-6)}{8}$$

$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{15y-2+9y-6}{8} \\ x=\frac{15y-2-9y+6}{8} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=\frac{24y-8}{8} \\ x=\frac{6y+4}{8} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=3y-1 \\ x=\frac{6y+4}{8} \end{array}\right.$$

2) $x^2-6x+9-9+y^2-4y+4-4+2x^2+2y^2=4$

$(x-3)^2+(y-2)^2+2x^2+2y^2=17.$

$(3y-4)^2+(y-2)^2+2(3y-1)^2+2y^2=17$

$9y^2-24y+16+y^2-4y+4+2(9y^2-6y+1)+2y^2-17=0$

$9y^2-24y+16+y^2-4y+4+18y^2-12y+2+2y^2-17=0.$

$30y^2-40y+5=0.$

$6y^2-8y+1=0.$

$\frac{D}{4}=16-6=10 \quad y=\frac{4\pm\sqrt{10}}{6} \quad \frac{4+\sqrt{10}}{6} > \frac{2}{3}$ не подх по ОДЗ.

$\begin{cases} 3y-2x\geq 0 \\ x=3y-1 \end{cases} \quad 3y-6y+2\geq 0. \quad 4+\sqrt{10} > 4$

$-3y+2\geq 0. \quad \sqrt{10} > 0$

$\boxed{y\leq \frac{2}{3}} \quad \frac{4-\sqrt{10}}{6} \quad \frac{2}{3}.$

$\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{10}}{6} < \frac{2}{3}.$

$\begin{cases} x=3y-1 \\ y=\frac{4-\sqrt{10}}{6} \end{cases} \quad \begin{cases} x=\frac{4-\sqrt{10}}{2}-1 \\ y=\frac{4-\sqrt{10}}{6} \end{cases}$

$\boxed{\begin{cases} x=\frac{2-\sqrt{10}}{2} \\ y=\frac{4-\sqrt{10}}{6} \end{cases}}$

2) $\cancel{y=}6 \quad x=\frac{6y+4}{8}.$

$\cancel{\left(\frac{6y+4}{8}-3\right)^2+(y-2)^2+}$

$3x^2+3y^2-6x-4y=4.$

$3\cdot\frac{(6y+4)^2}{64}+3y^2-6\cdot\frac{6y+4}{8}-4y-4=0.$

$\frac{3(36y^2+48y+16)}{64}+3y^2-\frac{36y+24}{8}-4y-4=0. \;/\cdot 64.$

$108y^2+144y+48+3y^2{\cdot 64}-288y-192-256y-256=0.$

$\cancel{111y^2}-400y-400=0.$

$108+192y^2=300y^2$

$3y-2x\geq 0$

$3y-\frac{6y+4}{4}\geq 0$

$\frac{12y-6y-4}{4}\geq 0$

$6y-4\geq 0$

$y\geq\frac{2}{3}.$

$3y^2-4y-4=0$

$\frac{D}{4}=4+12=4^2$

$y=\frac{2\pm4}{3} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=-\frac{2}{3} \end{array}\right. \\ x=\frac{6y+4}{8} \\ 3y-2x\geq 0 \quad y\geq\frac{2}{3} \end{cases}$

$\begin{cases} y=2 \\ x=2 \end{cases}$ Ответ: $(2;2)$ $\left(\frac{2-\sqrt{10}}{2};\ \frac{4-\sqrt{10}}{6}\right)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta+\cos 2\alpha\cdot\sin 4\beta=-\frac{8}{17}$

$72-102+30$

$2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta=-\frac{8}{17}$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta=-\frac{4}{17}$

$8\cdot 9-$ $\quad -\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\beta=-\frac{4}{17}$

$-34\cdot 3+30=$ $\boxed{\cos 2\beta=-\frac{4}{17}\cdot\sqrt{17}=\frac{4\sqrt{17}}{17}}$

$=3\cdot(24-34+10)$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{4\sqrt{17}}{17}+\cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{4\sqrt{17}}{17}\pm\cos 2\alpha\cdot\frac{\sqrt{17}}{17}=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$4\cdot\sin 2\alpha\pm\cos 2\alpha=-1$

$A=\sqrt{16+1}=\sqrt{17}$

$4\sin 2\alpha+\cos 2\alpha=-1$

$\sqrt{17}\cdot\left(\underbrace{\frac{4\sqrt{17}}{17}}_{\sin\varphi}\cdot\sin 2\alpha+\underbrace{\frac{\sqrt{17}}{17}}_{\cos\varphi}\cdot\cos 2\alpha\right)=-1$

$\cos(2\alpha-\varphi)=-\frac{\sqrt{17}}{17}$

$2\alpha-\varphi=\pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{17}}{17}\right)+2\pi n$

$2\alpha=\arccos\frac{\sqrt{17}}{17}\pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{17}}{17}\right)+2\pi n$

$\alpha=\frac{\arccos\frac{\sqrt{17}}{17}}{2}\pm\frac{\arccos\left(-\frac{\sqrt{17}}{17}\right)}{2}\pm\pi n.$

$\boxed{x=1,\ y=4}$ $\boxed{x=3,\ y=0}$

$ax+b.$

$y=ax+b$

$4=a+b$

$0=3a+b$

$a=-\frac{b}{3}$

$4=-\frac{b}{3}+b$

$4=\frac{2b}{3}$

$b=6$

$a=-2$

$2-\frac{1}{\cos^2\alpha}=1+1-\frac{1}{\cos^2\alpha}=$

$=1+1-$

$1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$

$32+30-68=$

$tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}-1$ $\quad =62-68=$

$=-6.$

$tg\alpha=\pm\frac{1}{\cos^2\alpha}-1$ $\quad \frac{17}{8}=2\frac{1}{8}$

$tg 2\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cancel{1-2\cos^2}}=$

$=\frac{2\,tg\alpha}{2-\frac{1}{\cos^2\alpha}}$ $\quad \cos^2\alpha-\sin^2\alpha=$ $\quad =\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

$\beta\in\varnothing$ $\quad \cancel{\sin 2\beta=\sqrt{1-\frac{64}{17}}}$

$\sin 2\beta=\sqrt{1-\frac{16}{17}}=$

$=\frac{\sqrt{17}}{17}.$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{4\sqrt{17}}{17}-\cos 2\alpha\frac{\sqrt{17}}{17}=\frac{1}{\sqrt{17}}$

$4\sin 2\alpha-\cos 2\alpha=-1$

$A=\sqrt{17}$ $\quad \cos(2\alpha+\varphi)=\ldots$

$2\alpha+\varphi=\ldots$

$2\alpha=+\varphi.$

$\frac{4\sqrt{17}}{17}\sin 2\alpha-\frac{\sqrt{17}}{17}\cos 2\alpha=-\frac{\sqrt{17}}{17}$

$\cos(2\alpha+\varphi)=-\frac{\sqrt{17}}{17}$

$2\alpha+\varphi=\pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{17}}{17}\right)+2\pi n$

$2\alpha=-\varphi\pm\arccos-\frac{\sqrt{17}}{17}+2\pi n.$

$y=-2x+6=\frac{4x-3}{2x-2}$

$-2x+6=\frac{4x-3}{2x-2}$

$\frac{4x-3}{2x-2}+2x-6=0$

$\frac{4x-3+4x^2-4x-12x+12}{2x-2}$

$=\frac{4x^2-12x+9}{2x-2}=0$ $\quad \frac{(2x-3)^2}{2x-2}=0$ $\quad x=\frac{3}{2}.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №7

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4. \end{cases}$$

$D=36+4=40$ $\quad x=\frac{-6\pm2\sqrt{10}}{2}=$

$$\begin{array}{r|l} 4x-3 & 2x-2 \\ \hline 4x-4 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

$225y^2+60y+4-$

$-16(9y^2+\cancel{2}-3y-2)=0$

$225y^2+60y+4-144y^2+$

$9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2$

$2+\frac{1}{2x-2}$ $\quad +48y+32=0$

$$\begin{cases} 9y^2-15xy+4x^2+2x+3y=2 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y-4=0 \end{cases}$$

$x_в=-\frac{34}{18}=-\frac{17}{8}$

$3x^2-6x+3y^2-4y-4=0$

$8\cdot\frac{17^2}{8^2}-\frac{34\cdot17}{8}+30=$

$\frac{D}{4}=9-12(3y^2-4y-4)=9-36y^2+48y+48=$

$81y^2+108y+36$

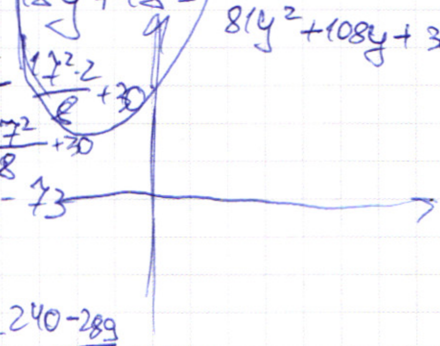
$=-36y^2+48y+57=$

$=\frac{17^2}{8}-\frac{17^2\cdot2}{8}+30$

$=-(36y^2-48y-57)=$

$=\frac{-17^2}{8}+30$

$(36y^2-2\cdot6\cdot4y+16-73)=-(6y^2+4)-73$



$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geq|x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$

$x(x+6)=0$ $\quad -6 \quad 0$ $\quad =\frac{240-289}{8}$

$x^2+6x=t$

$\times\frac{27}{13}$ $\quad \frac{81}{+27}$ $\quad 351$

$3^{\log_4 t}+t\geq|t|^{\log_4 5}$

$3^{\log_4 t}+t\geq t^{\log_4 5}$

$3^{\log_4 t}+t\geq t^{\log_4 5}$

$3^{\log_4 5}=5^{\log_4 3}$

$t^{\log_4 3}+t\geq t^{\log_4 5}$

$+\frac{\cancel{16}}{9}$ $\quad 144$

$2^{\log_2 32}=32^{\log_2 2}=$ $\quad \log_4 5\cdot\log_5 3=\log_4 3$

$t^{\log_4 3}-t^{\log_4 5}+t\geq0$

$t^{\log_4 5}(t^{\log_4\frac{3}{5}}-1)+t\geq0.$

$t^{\log_4 3}+t-t^{\log_4 5}\geq0$

$t^{\log_4 5}(t^{\log_4 3-\log_4 5}+t^{1-\log_4 5}-1)$

$t^{\frac{1}{a}}+\frac{1}{t^b}-1=0$

$[\cancel{\frac{p}{4}}]\leq\frac{p}{4}+1.$

$t^{\log_4\frac{3}{5}}+t^{\log_4\frac{4}{5}}-1\geq0$

$3\leq p\leq27$ $\quad \frac{p}{4}\geq\frac{p}{4}$

$t^x+t^y\geq1$

$3\leq y\leq27$ $\quad \frac{1}{9}\leq\frac{x}{4}\leq9$

$D(f):t\geq0$

$\frac{1}{27}\leq\frac{1}{y}\leq\frac{1}{3}$ $\quad \cancel{\frac{x+4}{4}}<0$

Нули: $t^a+t^b=1.$

$t\geq1$

$\frac{1}{9}\leq\frac{x}{4}\leq9.$ $\quad x\cancel{y}+1<0.$

$\log_4\frac{3}{5}<\log_4 1=0$, т.е

$\frac{xy+1}{4y}<0.$ $\quad t^a\downarrow, t^b\downarrow$, т.е не более 1 корня

$f(x/y)=f(x)+f(\frac{1}{y})=$

$t=1.$

$=[\frac{x}{4}]+[\frac{1}{4y}]\geq\frac{x}{4}+\frac{1}{4y}$

$\boxed{✓}$ черновик $\quad \square$ чистовик $\quad$ Страница № 2

(Поставьте галочку в нужном поле) $\quad$ (Нумеровать только чистовики)

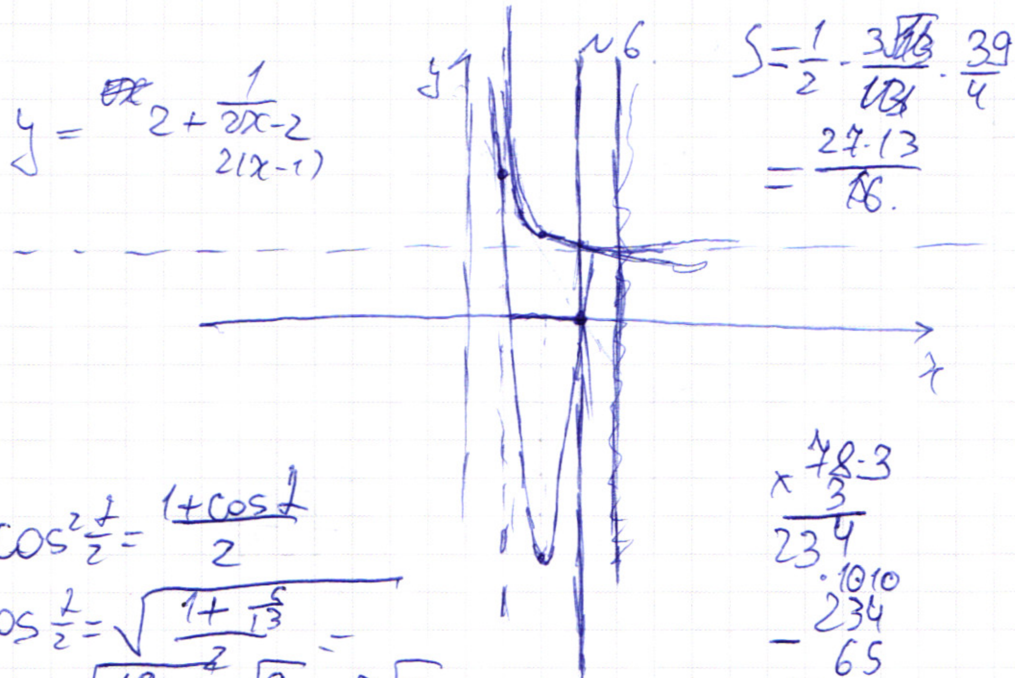
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$y = 2 + \frac{1}{2x-2}$ $\quad 2(x-1)$



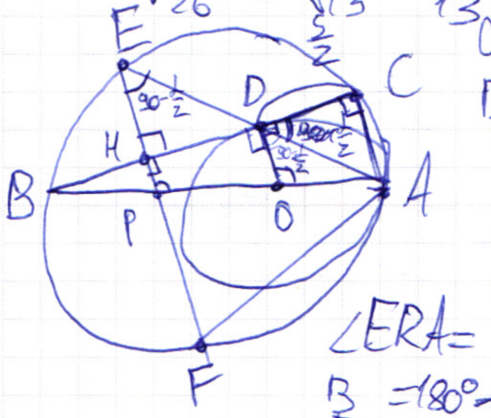
$S = \frac{1}{2}\cdot\frac{3\sqrt{13}}{13}\cdot\frac{39}{4}\cdot\frac{9\sqrt{13}}{4}\cdot\frac{3\sqrt{13}}{2} = \frac{27\cdot 13}{16}$.

$\cos^2\frac{\angle}{2} = \frac{1+\cos\angle}{2}$

$\cos\frac{\angle}{2} = \sqrt{\frac{1+\frac{5}{13}}{2}} = \sqrt{\frac{18}{26}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$

$78\cdot 3$, $\frac{3}{234}$, $\cdot 1010$, $234 - 65 = 169$

№4.



$OD = \frac{5}{2}$
$BD = \frac{13}{2}$
$BC = 9$.

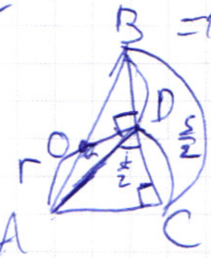
$DO = OA = r$

$EP = PA$.

$BO^2 = r^2 + BD^2$

$R + (R-r) = (2R-r)^2 =$
$= 4R^2 - 4Rr + r^2 = r^2 + BD^2$
$4R^2 - 4Rr = BD^2$

$\angle ERA = 180° - 90 + \frac{\angle}{2} - 90 + \frac{\angle}{2}$



$BC^2 +$

$\frac{BD}{DC} = \frac{BO}{OA}$. $\quad \frac{\frac{13}{2}}{\frac{5}{2}}$ $\quad \frac{13}{5} = \frac{2R-r}{r}$

$4R\cdot\frac{5}{9}$

$13r = 10R - 5r$
$18r = 10R$
$r = \frac{10}{18}R$

$4R^2 - 4R\cdot\frac{10}{18}R^2 = \frac{169}{4}$.

$4R^2 - \frac{20}{9}R^2 = \frac{169}{4}$

$R^2\left(\frac{36-20}{9}\right) = \frac{169}{4} = R^2 = \frac{169}{4}\cdot\frac{9}{16}$

$R = \frac{13}{2}\cdot\frac{3}{4} = \frac{39}{8}$.

№1.

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad$ $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}$

$2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta=-\frac{8}{17}.$

$2\cdot -\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\beta=-\frac{8}{17}.$

$\cos 2\beta=\frac{4\sqrt{17}}{17}$ $\quad$ $\sin 2\beta=\pm\sqrt{1-\frac{16}{17}}=\pm\frac{\sqrt{17}}{17}$

$2\cdot\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}.$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}$ $\quad$ $\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{4\sqrt{17}}{17}+\cancel{\sin 2\beta}\cdot\frac{\sqrt{17}}{17}\cdot\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}.$

$4\cdot\sin 2\alpha+\cos 2\alpha=-1$

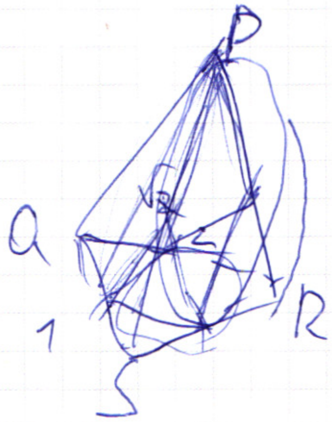
$4\cdot 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha+2\cos^2\alpha-\cancel{1}=-\cancel{1}$

$8\sin\alpha\cdot\cos\alpha+2\cos^2\alpha=0$

$4\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha=$

$256+288=544$

$544-144=400$



$x^2+y-6x+9-9+y^2-4y+4-4+2x^2+2y^2=4$

$(x-3)^2+(y-2)^2+2x^2+2y^2=17.$

$9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2$

$(3y-2x)^2=3y(x-1)-2(x-1)$

$(3y-2)(x-1)$

$(3y-2x)^2=(3y-2)(x-1)$

$9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2$ $\quad$ $3x^2+3y^2-6x-4y=4.$

$9y^2-15xy+4x^2-2x-3y-2=0$

$4x^2-x(2+15y)+9y^2-3y-2=0.$

$256+192=448$

$448-48=400$

$36\times 8=288$ $\quad$ $24\times 8=192$ $\quad$ $64\times 4=256$

~~3..~~ $\quad$ $64\times 3=192$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 4

(Нумеровать только чистовики)