МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$

$\underbrace{\sin(\alpha+\beta)}_{x}+\underbrace{\sin(\alpha-\beta)}_{y}=2\sin\alpha\cos\beta$

$\begin{cases}\alpha+\beta=x\\ \alpha-\beta=y\end{cases}\quad \alpha=\frac{x+y}{2}\quad \beta=\frac{x-y}{2}$

$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \Leftrightarrow 2\cdot\sin\frac{4\alpha+4\beta}{2}\cdot\cos\frac{4\beta}{2} = -\frac{8}{17} \Leftrightarrow \end{cases}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\beta = -\frac{4}{17} \Leftrightarrow \cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

1. $\sin 2\beta = \sqrt{1-\frac{16}{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$ тогда $\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha =$
$= -\frac{1}{\sqrt{17}} \Leftrightarrow \sin 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} + \cos 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Leftrightarrow 8\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1 = -1$

$\sin\alpha = 0$ $\left[\begin{array}{l} \cos\alpha = 0 \text{ (tg не опр.)} \\ 4\sin\alpha+\cos\alpha = 0 \Rightarrow tg\alpha = -\frac{1}{4} \end{array}\right.$

2. $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ тогда $-\frac{1}{\sqrt{17}} = \sin 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} + \cos 2\alpha\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8\sin\alpha\cos\alpha - \cancel{1} + 2\sin^2\alpha = -\cancel{1} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\alpha = 0 \\ 4\cos\alpha+\sin\alpha = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tg\alpha = 0 \\ tg\alpha = -4\end{array}\right.$

т.о. $tg\alpha \in \{-4; -\frac{1}{4}; 0\}$

других значений $tg\alpha$ принимать не может в силу равносильности проделанных преобразований

Ответ: $tg\alpha \in \{-4; -\frac{1}{4}; 0\}$

№2

$$\begin{cases} 3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \Leftrightarrow 3(x-1)^2+3(y-\frac{2}{3})^2 = \frac{25}{3} \Leftrightarrow \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2+(y-\frac{2}{3})^2 = (\frac{5}{3})^2 \\ 3y-2x = \sqrt{3(x-1)(y-\frac{2}{3})} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)^2+(y-\frac{2}{3})^2 = (\frac{5}{3})^2 \\ \frac{(3y-2x)^2\cdot 2}{3} = 2(x-1)(y-\frac{2}{3}) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\star\ (x-1+y-\frac{2}{3})^2 = \frac{2}{3}\cdot 9(y-\frac{2}{3}x)^2 \Leftrightarrow (x+y-\frac{5}{3})^2 = 6(y-\frac{2}{3}x)^2 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y-\frac{5}{3}=\sqrt{6}\left(y-\frac{2}{3}x\right) \\ x+y-\frac{5}{3}=\sqrt{6}\left(\frac{2}{3}x-y\right) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (\sqrt{6}-1)y=x\left(1+\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)-\frac{5}{3} \\ (\sqrt{6}+1)y=x\left(\frac{\sqrt{6}\cdot 2}{3}-1\right)+\frac{5}{3} \end{array} \right. \Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l} y=\left(x\cdot\frac{3+2\sqrt{6}}{3}-\frac{5}{3}\right):(\sqrt{6}-1) \\ y=\left(x\cdot\frac{2\sqrt{6}-3}{3}+\frac{5}{3}\right):(\sqrt{6}+1) \end{array} \right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-1)^2+\left(\frac{\frac{3+2\sqrt{6}}{3}x-\frac{5}{3}}{\sqrt{6}-1}-\frac{2}{3}\right)^2=\left(\frac{5}{3}\right)^2 \\ (x-1)^2+\left(\frac{\frac{-3+2\sqrt{6}}{3}x+\frac{5}{3}}{\sqrt{6}+1}-\frac{2}{3}\right)^2=\left(\frac{5}{3}\right)^2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-1)^2+\frac{(3+2\sqrt{6})^2(x-1)^2}{3^2(\sqrt{6}-1)^2}=\frac{25}{9} \\ (x-1)^2+\frac{(2\sqrt{6}-3)^2(x-1)^2}{9(\sqrt{6}+1)^2}=\frac{25}{9} \end{array} \right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-1)^2\left(\frac{9\cdot(\sqrt{6}-1)^2+(3+2\sqrt{6})^2}{\cancel{9}(\sqrt{6}-1)^2}\right)=\frac{25}{\cancel{9}} \\ (x-1)^2\cdot\frac{9(\sqrt{6}+1)^2+(2\sqrt{6}-3)^2}{\cancel{9}(\sqrt{6}+1)^2}=\frac{25}{\cancel{9}} \end{array} \right.$ $\quad \cancel{(x-1)^2\cdot 9\cdot(6-2\sqrt{6}+1)+}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-1)^2\cdot\frac{6(16-\sqrt{6})}{(\sqrt{6}-1)^2}=25 \\ (x-1)^2\,\frac{6(16+\sqrt{6})}{(\sqrt{6}+1)^2}=25 \end{array} \right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-1)=\pm\frac{5\cdot(\sqrt{6}-1)}{\sqrt{6(16-\sqrt{6})}} \\ (x-1)=\pm\frac{5\cdot(\sqrt{6}+1)}{\sqrt{6(16-\sqrt{6})}} \end{array} \right. \Leftrightarrow \quad x=$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{№3}$ $3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$ $\quad \cdot x^2+6x>0$

$\Leftrightarrow \underbrace{3^{\log_4(x^2+6x)}+x^2+6x}_{\geq 0} \geq \underbrace{(x^2+6x)^{\log_4 5}}_{\geq 0} \Leftrightarrow x^2+6x=t$

~~тогда $\Leftrightarrow 3^{\log_4 t}+t \geq t^{\log_4 5} \Leftrightarrow \log_4 3^{\log_4 t} \geq t\cdot(t^{\log_4 5-1}-1) \Leftrightarrow$~~

~~$t^{\log_4 5} \geq t$, т.к. $t \geq 0 \wedge \log_4 5>1$~~

~~$\Leftrightarrow \log_4 3^{\log_4 t} \geq \log_4 t\cdot(t^{\log_4 5-1}-1) \Leftrightarrow \log_4 t\cdot\log_4 3 \geq \log_4(t^{\log_4 5}-t)$~~

~~$\log_4 t\cdot\log_4 3 \geq \log_4 t+\log_4(t^{\log_4 5-1}-1)$~~

$\log_4 5-1=\log_4 5-\log_4 4=\log_4\frac{5}{4}$

$t>0$

$\Leftrightarrow 3^{\log_4 t}+t \geq t^{\log_4 5} \overset{*}{\Leftrightarrow} t^{\log_4 3}+t \geq t^{\log_4 5} \Leftrightarrow$

$^*|\ a^{\log_b c}=c^{\log_b a} \Leftrightarrow \log_b a^{\log_b c}=\log_b c^{\log_b a} \Leftrightarrow \log_b c\cdot\log_b a=\log_b a\cdot\log_b c$ правда

$\Leftrightarrow t \geq t^{\log_4 5}-t^{\log_4 3}=t^{\log_4 3}(t^{\log_4 5-\log_4 3}-1) \Leftrightarrow$

$\underset{>0}{t} \geq \underbrace{t^{\log_4 3}\cdot(\underset{>1}{t^{\log_4\frac{5}{3}}}-1)}_{>0} \Leftrightarrow \log_4 t \geq \log_4(t^{\log_4 3}\cdot(t^{\log_4\frac{5}{3}}-1)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_4 t \geq \log_4 t^{\log_4 3}+\log_4(t^{\log_4\frac{5}{3}}-1) \Leftrightarrow$

$\log_4 t \geq \log_4 3\cdot\log_4 t+\log_4(t^{\log_4\frac{5}{3}}-1) \Leftrightarrow$

$\log_4 t\cdot(1-\log_4 3) \geq \log_4(t^{\log_4\frac{5}{3}}-1) \Leftrightarrow \log_4 t\cdot\log_4(\frac{4}{3}) \geq \log_4(t^{\log_4\frac{5}{3}}-1) \Leftrightarrow$

~~$\log_4(t+\frac{4}{3})$~~ ...

$\boxed{№5}$ $f(ab) = f(a) + f(b)$ $f(p) = [\frac{p}{4}]$ p-простое число

(*) $f(1)=0$ $f(2)=0$ $f(3)=0$ $f(4) = f(2) + f(2) = 0$ $f(5)=1$

1) посчитаем т.о. значение функции для всех натуральных чисел из промежутка $[3; 27]$:

$f(6) = f(2) + f(3) = 0.$

$f(8) = f(4) + f(2) = 0.$ и т.д.

(*) $f(1) = f(1) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0.$

x	f(x)	x	f(x)	x	f(x)
3	0	11	2	19	4
4	0	12	0	20	1
5	1	13	3	21	1
6	0	14	1	22	2
7	1	15	1	23	5
8	0	16	0	24	0
9	0	17	4	25	2
10	1	18	0	26	3
				27	0

2) $f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x) - f(y)$ т.о. $f(\frac{x}{y}) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(y)$

$f(1) = f(\frac{1}{y} \cdot y) = f(y) + f(\frac{1}{y}) = 0 \Leftrightarrow f(\frac{1}{y}) = -f(y)$

3) рассмотрим все возможные значения $f(x)$ $\begin{cases} 3 \le x \le 27 \\ 3 \le y \le 27 \end{cases}$

1. $f(x) = 0 \Rightarrow f(y)$ м.б. равно 1, 2, 3, 4, 5

всего таких пар: $10 \cdot (15) = 150$

2. $f(x) = 1 \Rightarrow f(y) \in \{2; 3; 4; 5\}$ всего таких пар: $7 \cdot 8 = 56$

3. $f(x) = 2 \Rightarrow f(y) \in \{3; 4; 5\}$ $3 \cdot 5 = 15$

5. $f(x) = 4 \Rightarrow f(y) = 5$

4. $f(x) = 3 \Rightarrow f(y) \in \{4; 5\}$: $2 \cdot 3 = 6$

2.

~~Ответ~~: $\sum = \overset{}{150} + \overset{206}{56} + \overset{221}{15} + \overset{225}{6} + 2 = 229$

Ответ: 229.

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 4

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

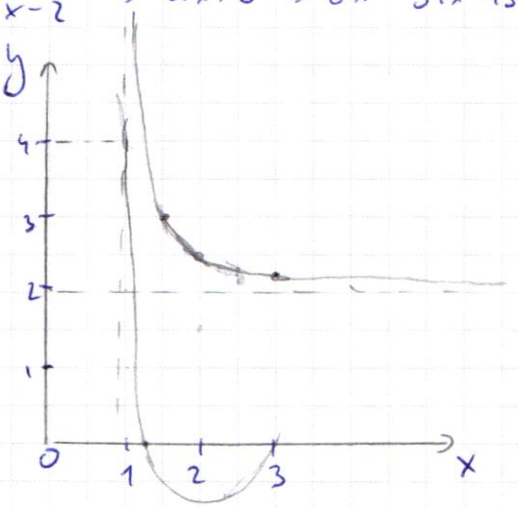
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 $\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30 \Leftrightarrow$

$\frac{4x-4+1}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30 \Leftrightarrow 2+\frac{1}{2(x-1)} \geq ax+b \geq 8(x-3)(x-\frac{5}{4})$



при $\frac{5}{4} \leq x \leq 3$ $8x^2-34x+30 \leq 0$

1) т.о. при $x=1$ $ax+b \geq 4$ (иначе будет пересечение точки ниже $8x^2-34x+30$ (в силу выпуклости параболы вниз).

2) $x=3$ $ax+b \geq 0$

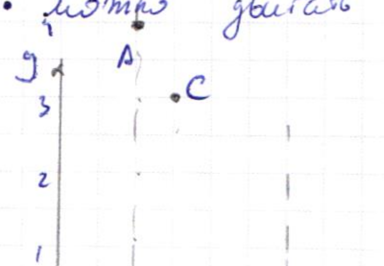
$ax+b \leq 2\frac{1}{4}$

Заметим, что крайнее „нижнее" возможное положение прямой $ax+b$ достигается при $a=-2$, $b=6$

тогда прямая проходит через (·) (1;4) и (3;0)

и касается $f(x) = 2+\frac{1}{2x-2}$ в (·) (1,5 ; 3)

- можно двигать данную прямую только вверх отн. (·) (1;4) (3;0)
A B

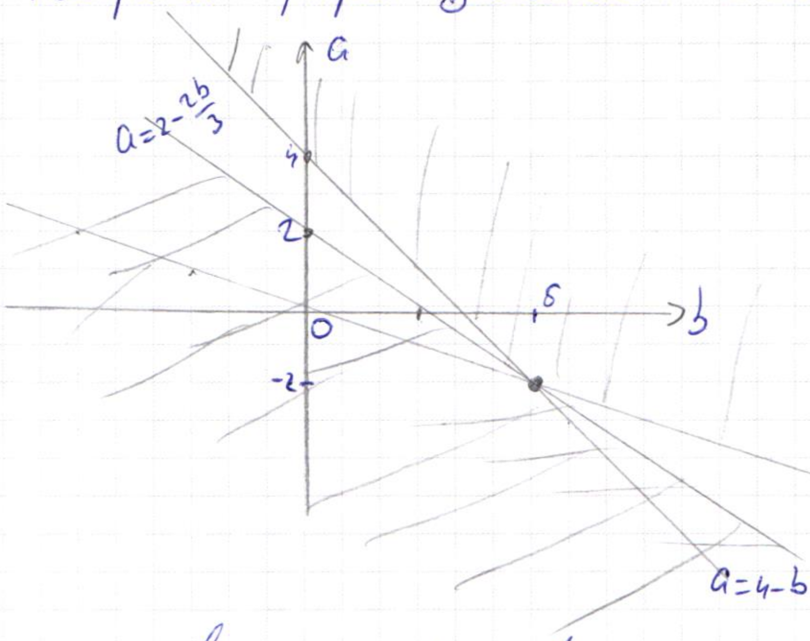


Если $a \neq -2 \wedge b \neq 6$ то $ax+b$ пересекает прямую $x=1$ в точке с ординатой хотя бы 4 и прямую $x=3$ в точке с ординатой хотя бы 0.

т.е. $\begin{cases} 3a+b \geq 0 \\ a+b \geq 4 \\ 1,5\cdot a+b \leq 3 \end{cases}$ – условие что при $x=1,5$ прямая проходит не выше, чем (·) C

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

построим графики зависимост в координатах a, b.



$a \geq -\frac{b}{3}$

$a \geq 4-b$

$a \leq 2-\frac{2b}{3}$

т.о. видно, что единственная подходящая пара a, b:

$\begin{cases} a=-2 \\ b=6 \end{cases}$ Ответ: $(-2; 6)$

$\boxed{1\sqrt{2}}$ $\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3(x-1)(y-\frac{2}{3})} \\ (x-1)^2+(y-\frac{2}{3})^2=(\frac{5}{3})^2 \end{cases} \Leftrightarrow$

ур-е окр-ти

$\underline{3y \geq 2x}$ $\begin{cases} (3y-2x)^2=3(x-1)(y-\frac{2}{3}) \\ ((x-1)+(y-\frac{2}{3}))^2=(\frac{5}{3})^2+\frac{(3y-2x)^2}{3}\cdot 2 \; (1) \end{cases} \Rightarrow$

$(1) \Leftrightarrow \left(\frac{3x-3+3y-2}{\cancel{3}}\right)^2=\frac{25}{\cancel{9}}+\frac{6(3y-2x)^2}{\cancel{9}} \Leftrightarrow$

$(3x+3y-5)^2=25+6(9y^2-12xy+4x^2) \Leftrightarrow$

$9x^2+9y^2+18xy-30x-30y+\cancel{25}=\cancel{25}+54y^2-72xy+24x^2 \Leftrightarrow$

$45y^2+15x^2-90xy+30(x+y)=0 \Leftrightarrow 3y^2+x^2-6xy+2(x+y)=0$

$\Leftrightarrow 3y^2+y(2-6x)+x^2+2x=0 \Leftrightarrow y=\frac{6x-2\pm\sqrt{4(1-3x)^2-4\cdot 3\cdot(x^2+2x)}}{6}=$

$=\frac{3x-1\pm\sqrt{1-6x^2+9x^4-3x^2-6x}}{3}=$ ~~$3x-1\pm\sqrt{9x^2-(3x+1)^2}$~~

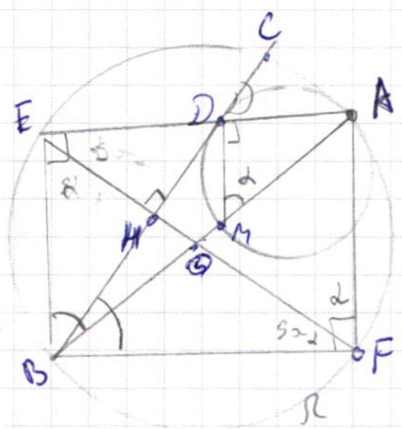
...

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

$|CD| = \frac{5}{2}$ $|BD| = \frac{13}{2} \Rightarrow |BC| = 9$



1) $|CD| \cdot BD = AD \cdot DE$ (отрезки хорд)

$BD^2 = BM \cdot BA$, где $(\cdot)M = BA \cap \omega$

$(BD)^2 = (2R - 2r) \cdot 2R$, где R, r — радиусы окр-тей

$\exists (EF) \cap (BC) = (\cdot) H$

2) $A\hat{E}B = A\hat{F}B = 90^\circ$ (опираются на диаметр)

$\exists$ $A\hat{F}E = \alpha \Rightarrow$ ~~$E\hat{F}B = 90-\alpha \Rightarrow B\hat{E}F = \alpha \Rightarrow D\hat{E}F = 90-\alpha$~~

~~$\Rightarrow E\hat{A}B = 90^\circ \Rightarrow |EF| = 2R \Rightarrow (BA) \cap (EF) = (\cdot) O$ — центр Ω~~

~~$\Rightarrow |BH| = |HC| = \frac{|BC|}{2} = \frac{9}{2}$~~

2) $\triangle ADM$ — прямоуг $\Rightarrow$ $E\hat{A}B = E\hat{F}B = 90 - \alpha \Rightarrow D\hat{M}A = \alpha = E\hat{B}A$

$\Rightarrow \triangle EBA \sim \triangle MDA \Rightarrow \frac{DA}{EA} = \frac{2r}{2R} = \frac{r}{R} \Leftrightarrow \frac{R}{r} = \frac{ED + DA}{DA} = 1 + \frac{ED}{DA}$

3) $\triangle BHF$ — прямоуг $\Rightarrow H\hat{B}F = \alpha$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2 \Leftrightarrow$ $\quad x^2+6x = t$

$3^{\log_4 t} + t \geq |t|^{\log_4 5} \Leftrightarrow$

$\log_4(3^{\log_4 t}) \geq \log_4(|t|^{\log_4 5} - t) \Leftrightarrow \log_4 t \cdot \log_4 3 \geq \log_4(t(t^{\log_4 5 - 1} - 1)) \Leftrightarrow$

$\log_4 t \cdot \log_4 3 \geq \frac{\log_4 t^{\log_4 5}}{\log_4 t} \Leftrightarrow$

$t > 0$ $\quad \log_4^2 1$

$(\log_4 t)^2 \cdot \log_4 3 \geq \log_4 5 \cdot \log_4 t \Leftrightarrow \log_4 t(\log_4 t \cdot \log_4 3 - \log_4 5) \geq 0 \Leftrightarrow$

$\log_4 t = b \quad b(b \cdot \log_4 3 - \log_4 5) \geq 0$

$b(b - \frac{\log_4 5}{\log_4 3}) \geq 0 \Leftrightarrow b(b - \log_4 2) \geq 0 \Leftrightarrow b(b+\frac{1}{2}) \geq 0 \Leftrightarrow$

$0 \quad \frac{\log_4 5}{\log_4 3} \quad b$

$\left[\begin{array}{l} \log_4 t \geq 0 \\ \log_4 t \leq -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \geq 1 \\ t - 4^{-\frac{1}{2}} \leq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \geq 1 \\ t \leq \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2+6x-1 \geq 0 \\ x^2+6x \leq \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow$ $\quad \cancel{(x-2)}(x-3) \geq 0$

$x^2+6x-1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{36+4}}{2} = -3 \pm \sqrt{10} \Leftrightarrow$

$-3-\sqrt{10} \quad \sqrt{10}-3 \quad x$

$(-\infty; -3-\sqrt{10}] \cup [\sqrt{10}-3; +\infty)$

$-\frac{1}{2} \leq x^2$ $\quad \left\{\begin{array}{l} x^2(x+6) > 0 \\ x^2+6x-\frac{1}{2} \leq 0 \end{array}\right.$

$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36+2}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{38}}{2}$

$-6 \quad \frac{-6-\sqrt{38}}{2} \quad 0 \quad \frac{\sqrt{38}-6}{2}$

$\left[\frac{-6-\sqrt{38}}{2}; -6\right) \cup \left(0; \frac{\sqrt{38}-6}{2}\right]$

$t^{\log_4 3}\left(t^{\frac{\log_4 5 - \log_4 3}{\log_4 3}} - 1\right)$

$\log_2 4 \cdot \log_2 8 =$ $\quad 2 \quad 3$

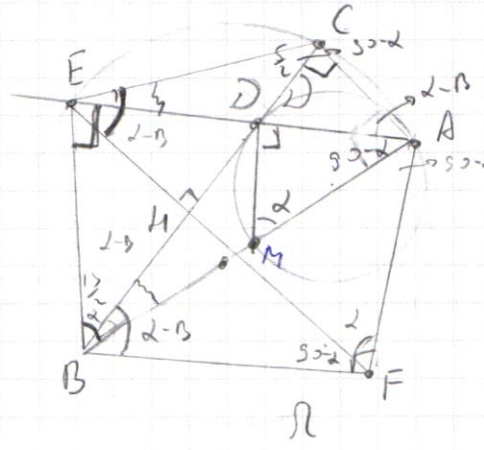
$= \log_2 4 \cdot 8$

$\log_4 t \geq \log_4\left(t^{\log_4 3} \cdot (t^{\log_4 \frac{5}{3}} - 1)\right) \Leftrightarrow$

$\log_4 t \geq \log_4 t^{\log_4 3} + \log_4(t^{\log_4 \frac{5}{3}} - 1) \Leftrightarrow \log_4 t \geq \log_4 3 \cdot \log_4 t +$

$CD = \frac{5}{2} \quad BD = \frac{13}{2}$

№4



$CD \cdot BD = AD \cdot DE$

$\overset{(2R-2r)\ \ 2R}{BD^2 = BM \cdot BA}$

$BC^2 + CA^2 = 4R^2 \Leftrightarrow BC^2 + DA^2 - DC^2 = 4R^2$

$DC^2 + CA^2 = DA^2 \Rightarrow CA^2 = DA^2 - DC^2$

$\frac{MA}{BA} = \frac{DA}{EA} \Leftrightarrow \frac{r}{R} = \frac{DA}{DA+ED} \Leftrightarrow \frac{R}{r} = 1 + \frac{ED}{DA}$

т.о. $CD \cdot BD = AD \cdot DE = \frac{5}{2} \cdot \frac{13}{2}$

$\cancel{BC^2 + DC^2 = 4R}\ DA^2 = 4R^2 + DC^2 - BC^2 = 4R^2 + \frac{25}{4} - \frac{18^2}{4}$

$\frac{R}{r} = 1 + \frac{ED}{DA}$

№5 $ED = \frac{13 \cdot 5}{4 \cdot |AD|}$

$$\begin{cases} \frac{R}{r} = 1 + \frac{13 \cdot 5}{4 (AD)^2} = 1 + \frac{13 \cdot 5}{4 \cdot \left(4R^2 + \frac{25}{4} - \frac{18^2}{4}\right)} \\ (2R - 2r) \cdot 2R = \frac{13^2}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{R}{r} = 1 + \frac{13 \cdot 5}{16R^2 + 25 - 18^2} \\ 4R^2 - 4Rr = \frac{13^2}{4} \Leftrightarrow 16R^2 - 16Rr = 169 \end{cases}$$

$\frac{R}{r} = 1 + \frac{13 \cdot 5}{169 + 16Rr + 25 - 18^2} = 1 + \frac{13 \cdot 5}{16Rr - 130} \Leftrightarrow \frac{R}{r} = \frac{16Rr - 130 + 65}{16Rr - 130} =$

$(16Rr - 65)r = (16Rr - 130)R \Leftrightarrow 16Rr^2 - 65r = 16R^2 r - 130R \Rightarrow$

$R^2 \cdot 16r - R(130 + 16r^2) + 65r = 0 \Rightarrow R = \frac{130 + 16r^2 \pm \sqrt{(130+16r^2)^2 - 4 \cdot 16r \cdot 65r}}{2 \cdot 16r} =$

$= \frac{130 + 16r^2 \pm \sqrt{130^2 + 2 \cdot \cancel{65 \cdot 2} \cdot 16r^2 - \cancel{4 \cdot 16r \cdot 65r} + 16r^2}}{2 \cdot 16r}$

$$\begin{array}{r} 81 \\ \times 4 \\ \hline 324 \\ -25 \\ \hline 299 \\ -169 \\ \hline 130 \\ -65 \end{array}$$

№5 $f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$ p-прост.

$f(2) = 0. \ f(3) = 0. \ f(5) = 1.$

$f(4) = f(2 \cdot 2) = 2f(2) = 0.$

$f(6) = 0 \ \ f(7) = 1. \ \ f(8) = 0.$

$f(1) = 2f(1) \Leftrightarrow f(1) = 0. \ \ f(1 \cdot 2) = f(2) + f(1) \Leftrightarrow f(2) = f(2)$

$f(3) = f(3)$

$f(1) = f(-1) + f(-1) \Rightarrow f(-1) = 0.$

$f(-2) = f(2)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y)$

$f(1) = f(y) + f\left(\frac{1}{y}\right) \Leftrightarrow f(y) = -f\left(\frac{1}{y}\right)$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{(3+2\sqrt{5})x-5}{3(\sqrt{5}-1)} - \frac{2}{3}^{(\sqrt{5}-1} = \frac{(3+2\sqrt{5})x - \cancel{5}^{-3} - 2\sqrt{5}+\cancel{2}}{3(\sqrt{5}-1)} =$$

$$\frac{(3+2\sqrt{5})(x-1)}{3(\sqrt{5}-1)}$$

$$\frac{(2\sqrt{5}-3)x \quad +5}{3(\sqrt{5}+1)} - \frac{2\sqrt{5}-2}{3(\sqrt{5}+1)} = \frac{(2\sqrt{5}-3)x - 2\sqrt{5}+3}{3(\sqrt{5}+1)} = \frac{(2\sqrt{5}-3)(x-1)}{3(\sqrt{5}+1)}$$

$95-8\sqrt{5}$

$$\frac{9(\overset{7-2\sqrt{5}}{5-2\sqrt{5}+1}) + 9 + 12\sqrt{5}+4\cdot 5}{5-2\sqrt{5}+1} = \frac{63-18\sqrt{5}+33+12\sqrt{5}}{7-2\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{6(16-\sqrt{5})}{7-2\sqrt{5})}$$

$9(5+2\sqrt{5}+1)+24-12\sqrt{5}+9 = 63+18\sqrt{5}+33+12\sqrt{5} =$

$= 95+8\sqrt{5}$

$(3x+3y-5)(3x+3y-5)=1$

$= 9x^2+9xy-15x+9xy+9y^2-15y-15x-15y+25$

$9x^2+18xy-30x-30y+25$

$\frac{9}{15}-\frac{9}{4}^{1\cdot 4}-\frac{5}{2}+1$

$9x^4-9x^2-6x+1$

$\frac{9}{81} - \frac{9}{\cancel{9}} \cdot \frac{5}{3}+1$

$9\cdot 5\cdot 2$

$9x^4-(3x+1)^2 \quad +2$

$(9y^2-6xy+x^2)-6y^2-2(x+y)=2$

$3y^2+2y(1-3x)+x^2+2x=2$

$$y=\frac{6x-2\pm\sqrt{4(1-3x)^2-4\cdot 3(x^2+2x)}}{6} = \frac{3x-1\pm\sqrt{(1-3x)^2-3(x^2+2x)}}{3} =$$

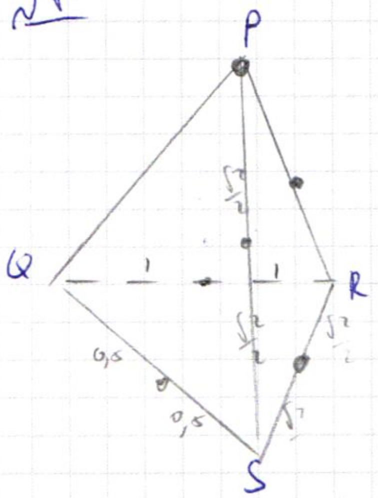
$$= 3x-1\pm\sqrt{1-6x^2+9x^4-3x^2-6x}$$

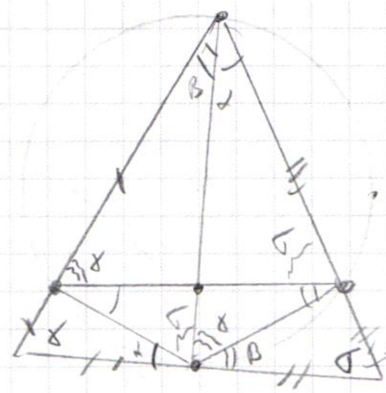
$9x^4-9x^2-6x+1$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

№7





$$3^{\log_4 t} + t \geq t^{\log_4 5}$$

$$3y^2 + x^2 - 8xy + 2x + 2y = 0.$$

$3(x^2 \cdot -2)$

$$(y+1)^2 + (x+1)^2 + 2y^2 - 8xy = 2.$$

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}.$$

$$\log_b a^{\log_b c} = \log_b c^{\log_b a}.$$

3. $9y^2 - 12xy + 4x^2 = 3xy - 2x - 3y + 2.$

$$\begin{cases} 9y^2 - 15xy + 4x^2 + 2x + 3y - 2 = 0 \\ 3y^2 - 8xy + x^2 + 2x + 2y = 0. \quad /\cdot 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9y^2 - 15xy + 4x^2 + 2x + 3y - 2 = 0 \\ 9y^2 - 18xy + 3x^2 + 6x + 6y = 0 \end{cases}.$$

$$3xy + x^2 - 4x - 3y - 2 = 0.$$

$$x(x+3y) - x - 3y - 3x - 2 = 0.$$

☑ черновик ☑ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 (продолж)

$f(\frac{x}{y})<0 \Leftrightarrow f(x)-f(y)<0$

1) $f(x)=0$

$10\cdot(\overset{15}{7+3+2+2+1})$

2) $f(x)=1 \; : 7\cdot(\overset{8}{3+2+2+1})$

$f(x)=2 \quad 3\cdot(\overset{5}{2+2+1})$

$f(x)=3 \quad 2\cdot 3$

$f(x)=4 \quad \cdot 2$

$f(2)=0$

3	0	11	2	19	4
4	0	12	0	20	1
5	1	13	3	21	1
6	0	14	1	22	2
7	1	15	1	23	5
8	0	16	0	24	0
9	0	17	4	25	2
10	1	18	0	26	3

2 7 0

206 $\quad$ 21 $\quad$ 23

Ответ: $150+56+15+8+2$

№8 $\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30=2(4x^2-17x+15)$

$4x^2-17x+15=0 \Leftrightarrow x=\frac{17\pm\sqrt{17^2-4\cdot4\cdot15}}{8}=$

$=\frac{17\pm\sqrt{17^2-(17-1)(17-2)}}{8}=$

$=\frac{17\pm\sqrt{17^2-(17^2-17-2\cdot17+2)}}{8}=\frac{17\pm\sqrt{17\cdot3-2}}{8}=$

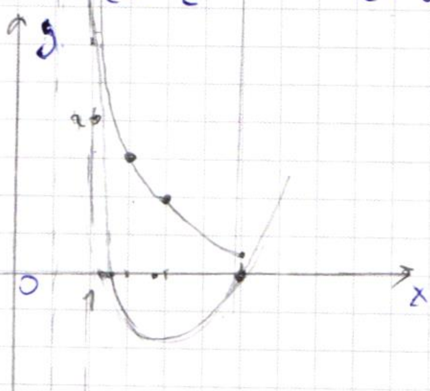
$=\frac{17\pm7}{8} \Leftrightarrow \quad x=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$

$x=\frac{24}{8}=3$

$\frac{4x-3}{2(x-1)} \geq ax+b \geq 8(x-3)(x-\frac{5}{4}) \Leftrightarrow \frac{2(2x-2)+1}{2x-2}=2+\frac{1}{2x-2}\geq ax+b \geq 8(x-3)(x-\frac{5}{4})$

$(1;3]$

$\frac{34}{18}$ 12 8



$\begin{cases} 3a+b=0 \\ a+b=4 \end{cases}$

$2a=$

$a=2$

$x=1 \quad 8x^2-34x+30=$

$=8-34+30=4$

$ax+b$

$x=1 \quad \begin{cases} a+b\geq4 \\ 0\leq 3a+b \leq 2\frac{1}{4} \end{cases}$

$x=3 \quad 3a+b$

$\begin{cases} a+b\geq4 \\ 3a+b\geq0 \\ 3a+b\leq\frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b\geq4 \\ 3a+b\geq0 \\ -3a-b\geq-\frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow -2a\geq\frac{7}{4}$

$a\leq-\frac{7}{8}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

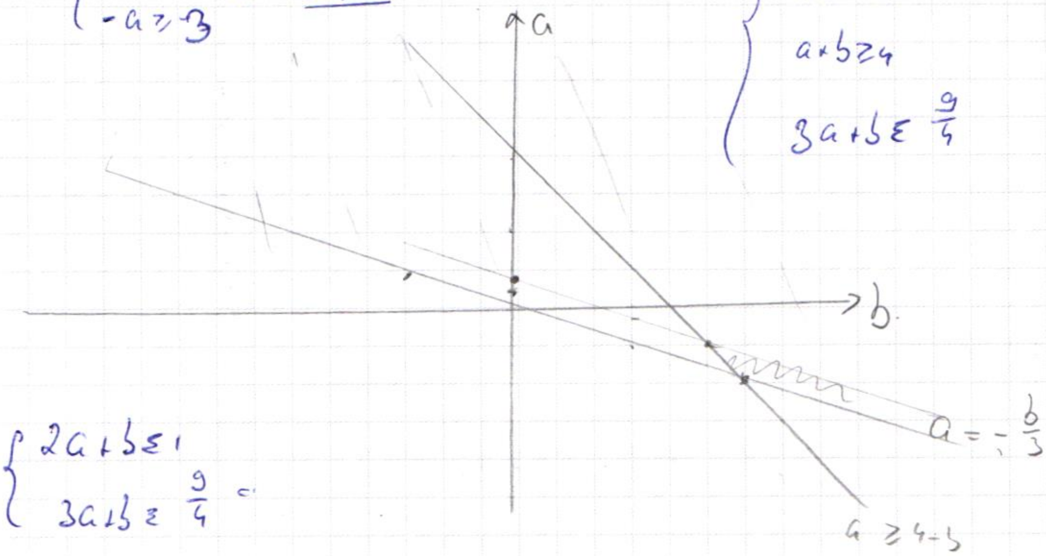
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$x=2 \begin{cases} 2a+b \le 1 \\ a+b \ge 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a-b \ge -1 \\ a+b \ge 4 \end{cases} \Leftrightarrow -a \ge 3 \Leftrightarrow a \le -3$

$\begin{cases} a+b \ge 4 \\ -a \ge 3 \end{cases} \Leftrightarrow \underline{b \ge 7}$

$\begin{cases} 3a+b \ge 0 \\ 2a+b \le 1 \\ a+b \ge 4 \\ 3a+b \le \frac{9}{4} \end{cases}$



$\begin{cases} 2a+b \le 1 \\ 3a+b \le \frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$

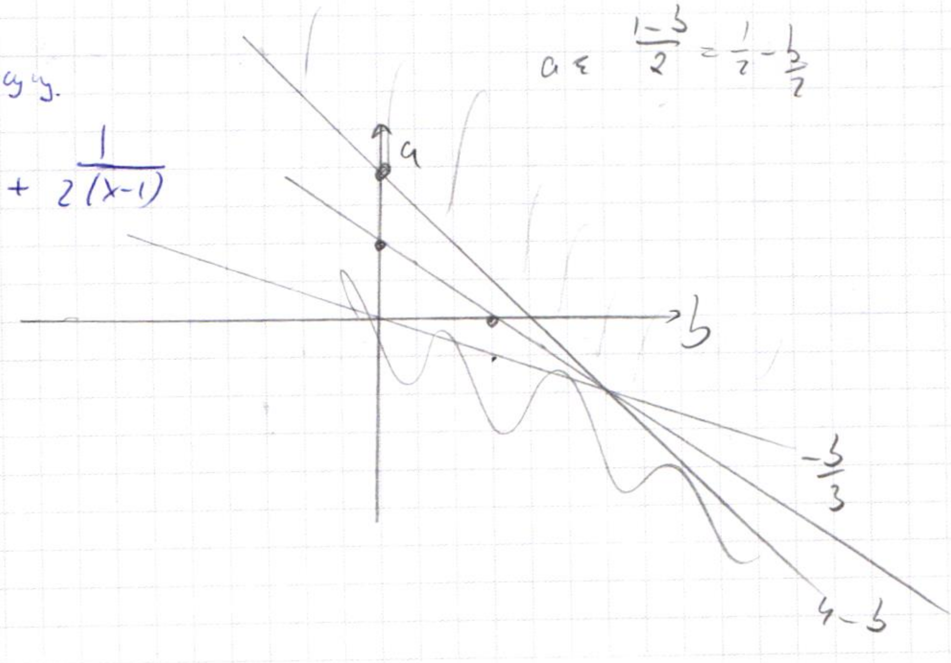
$\begin{cases} -2a-b \ge -1 \\ 3a+b \le \frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow a$

$a \le \frac{\frac{9}{4}-b}{3} = \frac{3}{4} - \frac{b}{3}.$

$a \le \frac{1-b}{2} = \frac{1}{2} - \frac{b}{2}$

таких чисел не сущ.

$ax+b \le 2 + \frac{1}{2(x-1)}$



$\frac{3-b}{1{,}5} = 2 - \frac{b}{1{,}5} = 2 - \frac{2b}{3}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 $\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \end{cases} \Leftrightarrow \cancel{2}\cdot\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\cdot\cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2} = -\frac{\cancel{8}\,4}{17}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{2\sin}\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{4}{17} \Leftrightarrow \cos 2\beta\cdot -\frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{4}{17} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}} \end{cases}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

1. $\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\beta = \sqrt{1-\frac{16}{17}} = \sqrt{\frac{1}{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad -\frac{1}{\cancel{\sqrt{17}}} = \frac{4}{\cancel{\sqrt{17}}}\cdot\sin 2\alpha + \frac{1}{\cancel{\sqrt{17}}}\cdot\cos 2\alpha \Leftrightarrow$

$4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1 \Leftrightarrow$

$8\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha \cancel{-1} = \cancel{-1} \Leftrightarrow \cos\alpha(4\sin\alpha+\cos\alpha) = 0 \Leftrightarrow$

$\cos\alpha = 0$ (tg не опр).

$4\sin\alpha+\cos\alpha = 0 \Leftrightarrow$

$4 tg\alpha = -1 \Rightarrow tg\alpha = -\frac{1}{4}$

2. $\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad -\frac{1}{\cancel{\sqrt{17}}} = \sin 2\alpha\cdot\frac{4}{\cancel{\sqrt{17}}} - \cos 2\alpha\cdot\frac{1}{\cancel{\sqrt{17}}}$

$-1 = 4\sin 2\alpha - \cos 2\alpha \Leftrightarrow \cancel{-1} = 8\sin\alpha\cos\alpha \cancel{-1} + 2\sin^2\alpha \Leftrightarrow \sin\alpha(4\cos\alpha+\sin\alpha) = 0 \Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l} \sin\alpha = 0 \quad tg\alpha = 0 \\ 4 + tg\alpha = 0 \quad tg\alpha = -4 \end{array}\right.$

№2 $\begin{cases} 3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y-2x = \sqrt{(3y-2)(x-1)} \\ 3(x^2-2x+1)+3y^2-4y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow$

$3y \geq 2x$

$\begin{cases} 3y-2x = \sqrt{(3y-2)(x-1)} \\ 3(x-1)^2 + 3(y+1)(y-\frac{7}{3}) = 0. \end{cases}$ $\begin{cases} (3y-2x)^2 = (3y-2)(x-1) \\ (x-1)^2 + (y+1)(y-\frac{7}{3}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} \cancel{9y^2 - 12xy + 4x^2 = 3xy - 2x - 3y + 2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y = 4 \end{cases} \Rightarrow \cancel{9y^2 - 15xy + 4x^2 = 2-2x-3y}$

$3(x-1)^2 + 3(y^2 - \frac{4}{3}y + \frac{4}{9}) = 7 + \frac{4}{3} \Leftrightarrow 3(x-1)^2 + 3(y-\frac{2}{3})^2 = \frac{25}{3} \Leftrightarrow$

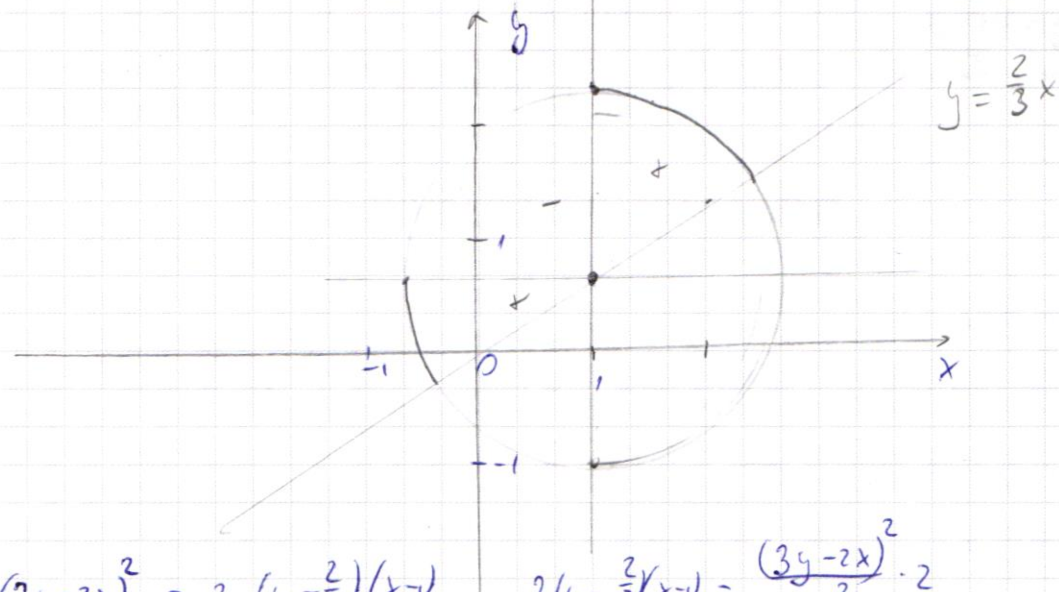
$\begin{cases} 3y-2x = \sqrt{3(y-\frac{2}{3})(x-1)} \\ (x-1)^2 + (y-\frac{2}{3})^2 = (\frac{5}{3})^2 \end{cases}$ $\quad (3y-2x)^2 = 3(y-\frac{2}{3})$ $\quad (x-1)^2 + (y-\frac{2}{3})^2 = (\frac{5}{3})^2$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$$\begin{cases}(3y-2x)^2 = 3\cdot\left(y-\frac{2}{3}\right)(x-1) \\ (x-1)^2 + \left(y-\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2\end{cases}$$

$$2\left(y-\frac{2}{3}\right)(x-1) = \frac{(3y-2x)^2}{3}\cdot 2$$

$$\cancel{(x-1)^2 - \frac{(3y-2x)^2\cdot 2}{3}} + \left(y-\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\cancel{x^2-2x+1 - \frac{(9y^2-12xy+4x^2)\cdot 2}{3} + y^2 - \frac{4}{3}y + \frac{4}{9} = \frac{25}{9}} \Leftrightarrow$$

$$x^2-2x+1 \cancel{- 6y^2 + 8xy - \frac{8x^2}{3} + y^2 - \frac{4}{3}y}$$

$$(x-1)^2 - 2\left(y-\frac{2}{3}\right)(x-1) + \left(y-\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2 - \frac{(3y-2x)^2}{3}\cdot 2 \Leftrightarrow$$

$$\left(x-1 - y - \frac{2}{3}\right)^2 \Leftrightarrow \left(x-1-y+\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{5}{3} - (3y-2x)\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{5}{3} + (3y-2x)\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(x-y-\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{(3y-2x)^2}{3}\cdot 2 = \frac{25}{9} \Leftrightarrow$$

$$\frac{(3x-3y-1)^2}{9} + \frac{(3y-2x)^2}{3}\cdot 2 = \frac{25}{9}$$

$$(3y-2x)^2 = (3y-2)(x-1) = 3\left(y-\frac{2}{3}\right)(x-1)$$

$$\cancel{a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2}$$

$$x^2 - 3ax + a^2 = \qquad x = \frac{3a \pm \sqrt{9a^2-4a^2}}{}$$

$$\left(x-1-y+\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}(3y-2x)^2 \Leftrightarrow$$

$$\left(x-y-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}\cdot 3\cdot 3\left(y-\frac{2}{3}x\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-y-\frac{1}{3} = \sqrt{6}\left(y-\frac{2}{3}x\right) \\ x-y-\frac{1}{3} = \sqrt{6}\left(\frac{2}{3}x-y\right)\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x-y-\frac{1}{3} = \sqrt{6}y - \frac{2\sqrt{6}x}{3} \\ x-y-\frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3}x - \sqrt{6}y\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\left(1+\frac{2\sqrt{6}}{3}\right) - y(1+\sqrt{6}) = \frac{1}{3} \\ x\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}-1\right) - (\sqrt{6}-1)y + \frac{1}{3} = 0\end{array}\right.$$