МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x \geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{x(y-6)-(y-6)} \\ (3x-3)^2-9+(y-6)^2-36=45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{(y-6)(x-1)} \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \end{cases}$$

Замена: $a=x-1$, $b=y-6$ (т.е. $x=a+1$, $y=b+6$)

$$\begin{cases} b+6-6a-6=\sqrt{ab} \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b-6a=\sqrt{ab} & (1) \\ 9a^2+b^2=90 & (2) \end{cases}$$

(1): $b-6a=\sqrt{ab}$

$$\begin{cases} b-6a\geq 0 \\ b^2-12ab+36a^2=ab \end{cases}$$

$$\begin{cases} b\geq 6a \\ b^2-13ab+36a^2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b\geq 6a \\ \left[\begin{array}{l} b=9a \\ b=4a \end{array}\right. \end{cases}$$

1) $a>0$, тогда $b_1=9a$ уд. усл. $b\geq 6a$, а $b_2=4a$ не уд. усл. $b\geq 6a$ (т.к. $4a<6a$, т.к. $2a>0$)

$b=9a$

подставим в (2):

$9a^2+81a^2=90$

$90a^2=90 \Rightarrow a^2=1 \Rightarrow a=\pm 1$, но $a>0$, т.е. $a=1$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

тогда: $a=1,\ b=9$

т.е. $x=2,\ y=15$

2) $a=0$

тогда $b=0$

подставим в (2): $0+0=90$ – неверно; $a\neq 0$.

3) $a<0$

тогда $b_1=9a$ не уд. усл. $b\geq 6a$ (т.к. $9a<6a$, т.к. $3a<0$),

а $b_2=4a$ уд. усл. $b\geq 6a$

$b=4a$

подставим в (2): $9a^2+16a^2=90$

$25a^2=90 \Rightarrow a^2=\frac{90}{25}=\frac{18}{5} \Rightarrow a=\pm\sqrt{\frac{18}{5}}$,

но $a<0$,

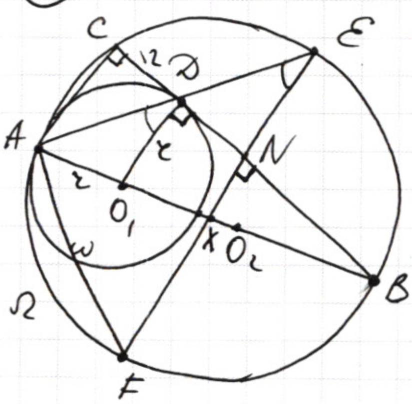
т.е. $a=-\sqrt{\frac{18}{5}}$

$a=-\sqrt{\frac{18}{5}}=-\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=-\frac{3\sqrt{10}}{5}$, тогда $b=-\frac{12\sqrt{10}}{5}$

$x=1-\frac{3\sqrt{10}}{5}$, $y=6-\frac{12\sqrt{10}}{5}$

Ответ: $(2;15)$; $\left(1-\frac{3\sqrt{10}}{5};\ 6-\frac{12\sqrt{10}}{5}\right)$

4



$CD=12;\ BD=13$

$R-?\ r-?\ \angle AFE-?\ S_{AEF}-?$

1) Пусть R – радиус Ω, r – радиус ω.

2) По св-ву касающихся окр-тей: $A;O_1;O_2;B\in(AB)$

3) BC кас. ω в т. $D \Rightarrow$ (по опр. кас.) $O_1D\perp CB$

4) $\angle ACB$ опир. на диаметр $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle ACB=90°$

5) $\angle B$ – общ., $\angle O_1DB=\angle ACB=90° \Rightarrow$ (по 2 углам) $\triangle BO_1D\sim\triangle BAC \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{BD}{BC}=\frac{BO_1}{BA} \Rightarrow \frac{13}{25}=\frac{2R-r}{2R} \Rightarrow$ ~~$50R=26R-13R$~~
$26R=50R-25r$
$25r=24R \Rightarrow$
$\Rightarrow R=\frac{25}{24}r;\ r=\frac{24}{25}R$

6) Т.к. $\triangle BO_1D\sim\triangle BAC$, то $\frac{O_1D}{AC}=\frac{BD}{BC}=\frac{13}{25}$

7) Из п/у $\triangle BCA$: $AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{4R^2-625}$
(по т. Пифагора)

$\Rightarrow \frac{r}{\sqrt{4R^2-625}}=\frac{13}{25}$

$\Rightarrow$

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 2
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{24R}{25\sqrt{4R^2-625}}=\frac{13}{25}$$

$$\underbrace{24R}_{\geq 0}=\underbrace{13\sqrt{4R^2-625}}_{\geq 0}$$

$$576R^2=169(4R^2-625)$$

$$576R^2=676R^2-625\cdot 169$$

$$100R^2=625\cdot 169 \Rightarrow (\text{т.к. } R>0)\ \underline{\underline{R}}=\frac{25\cdot 13}{10}=\underline{\underline{32,5}}$$

$169 \times 4 = 676$; 25×13: 75, 25, 325; 24×13: 72, 24, 312

Тогда $\underline{\underline{r}}=\frac{24\cdot R}{25}=\frac{24\cdot \cancel{25}\cdot 13}{10\cdot \cancel{25}}=\underline{\underline{31,2}}$

8) Из п. 7: $AC=\sqrt{4R^2-625}=\sqrt{4\cdot\left(\frac{5\cdot 13}{2}\right)^2-625}=$

$=\sqrt{25\cdot 169-25\cdot 25}=\sqrt{25\cdot 144}=5\cdot 12=60$

9) Из п/у $\triangle ACD$ по теореме Пифагора:

$AD=\sqrt{CD^2+AC^2}=\sqrt{144+3600}=\sqrt{3744}=6\sqrt{104}=$

$=12\sqrt{26}$

10) Степень точки D отн. окр. Ω: $CD\cdot DB=ED\cdot DA$

$12\cdot 13=ED\cdot 12\sqrt{26} \Rightarrow$

$\Rightarrow ED=\frac{\cancel{12}\cdot 13}{\cancel{12}\cdot\sqrt{26}}=\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{26}}{2}$

11) $AE=ED+AD=\frac{\sqrt{26}}{2}+12\sqrt{26}=\frac{25\sqrt{26}}{2}$

12) По теореме синусов для $\triangle AEF$: $\frac{AE}{\sin\angle AFE}=2R$

$$\frac{25\sqrt{26}}{2\sin\angle AFE}=2\cdot 32,5$$

$$\frac{25\sqrt{26}}{2\sin\angle AFE}=65 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sin\angle AFE=\frac{\overset{5}{\cancel{25}}\sqrt{26}}{\underset{13}{\cancel{65}}\cdot 2}=\frac{5\sqrt{26}}{26} \Rightarrow \underline{\angle AFE=\arcsin\frac{5\sqrt{26}}{26}}$

13) ~~[illegible]~~ Пусть $EF\cap AB=K$; $EF\cap CB=N$

14) ~~$EN\parallel O_1$~~ $O_1D\perp DB$; $EF\perp BC \Rightarrow$ (по св-ву) $EF\parallel O_1D \Rightarrow$

по теореме о пропорц. отрезках (обоб. теорема Фалеса) для $\angle EAX$:

$\frac{ED}{DA} = \frac{XO_1}{O_1A} \Rightarrow \frac{XO_1}{O_1A} = \frac{\sqrt{26}}{2\cdot 12\sqrt{26}} = \frac{1}{24} \Rightarrow XO_1 = \frac{AO_1}{24} = \frac{r}{24} = 1,3$

14) $O_1D \parallel XE \Rightarrow \angle O_1DA = \angle XEA$ (соотв. $\angle$) ; $\angle A$ – общ. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle O_1DA \sim \triangle XEA \Rightarrow \frac{O_1D}{XE} = \frac{AD}{DE} \Rightarrow$

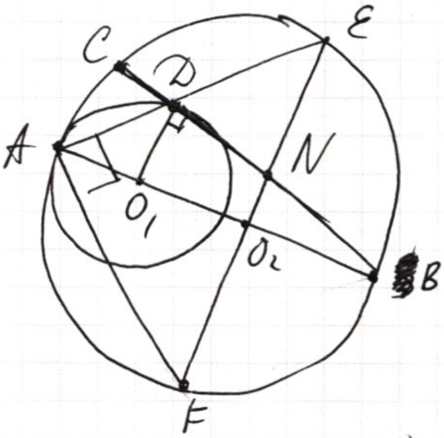
$\Rightarrow \frac{r}{XE} = 24 \Rightarrow XE = \frac{r}{24} = 1,3$

~~15) Степень точки X отн. окр. Ω: FX · XE = BX · XA~~
~~$1,3\,FX = (65 - 31,2 - 1,3)\cdot(1,3 + 31,2)$~~

~~[illegible]~~ $= 32,5$

15) $BX = 2R - XO_1 - AO_1 = 65 - 31,2 - 1,3 = 32,5$
$AX = AO_1 + O_1X = 31,2 + 1,3 = 32,5$ $\Rightarrow BX = AX \Rightarrow$

$\Rightarrow X$ – сер. $AB \Rightarrow O_2 \equiv X$



16) EF – диам. Ω $\Rightarrow EF = 2R = 65$

~~17) По теореме косинусов для $\triangle AEF$:~~
~~$AE^2 = AF^2 + FE^2 - 2\cdot AF\cdot FE \cdot \cos\angle AFE$~~

~~Из п. 12: $\sin\angle AFE = \frac{5\sqrt{26}}{26} \Rightarrow \cos\angle AFE =$~~

17) Т.к. EF – диаметр Ω, то $\angle EAF = 90°$ (т.к. опир. на диам)

18) По теореме Пифагора для п/у $\triangle AEF$:

$AF = \sqrt{EF^2 - AE^2} = \sqrt{65^2 - \frac{625\cdot 26}{4}} =$

$= \sqrt{25\cdot 13^2 - \frac{25\cdot 25\cdot 13\cdot 2}{4}} = \sqrt{25\cdot 13\left(13 - \frac{25}{2}\right)} =$

$= 5\cdot\sqrt{13\cdot\frac{1}{2}} = \frac{5\sqrt{13}}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{26}}{2}$

$125 \times 13 = 375 + 1250 = 1625$

19) По формуле площади п/у $\triangle$:

$\underline{S_{AEF}} = \frac{1}{2}\cdot AF\cdot AE = \frac{1}{2}\cdot\frac{5\sqrt{26}}{2}\cdot\frac{25\sqrt{26}}{2} = \frac{125\cdot \cancel{26}^{13}}{\cancel{8}_{4}} =$

$= \frac{1625}{4}$

Ответ: $32,5$; $31,2$; $\arcsin\frac{5\sqrt{26}}{26}$; $\frac{1625}{4}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6

$x \in \left(\frac{2}{3}; 2\right]$

$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \geq 18x^2 - 51x + 28$

Пусть $f(x) = 18x^2 - 51x + 28$; $g(x) = \frac{8-6x}{3x-2}$; $h(x) = ax+b$

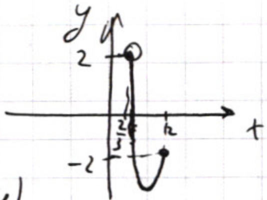
Рассм. $f(x)$: точка минимума данной ф-ции — вершина параболы $x_0 = \frac{51}{36} = 1\frac{15}{36}$ (т.к. ф-ция — квадратичная, график — парабола с ветвями вверх)

$x_0 \in \left(\frac{2}{3}; 2\right]$

$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{18 \cdot 4}{9} - \frac{51 \cdot 2}{3} + 28 = 36 - 34 = 2$

$f(2) = 18 \cdot 4 - 51 \cdot 2 + 28 = 72 + 28 - 102 = -2$

схематич. изобр. гр. $f(x)$:
(на $x \in \left(\frac{2}{3}; 2\right]$



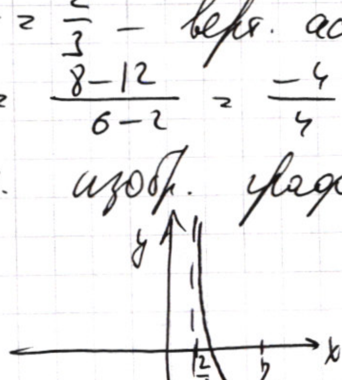
Рассм. $g(x)$.

график $g(x)$ — гипербола; $x \in \left(\frac{2}{3}; 2\right] \Rightarrow$ на данном промежутке $g(x)$ убывает. (расп. в I чет.)

$x = \frac{2}{3}$ — верт. асимптота для $g(x)$

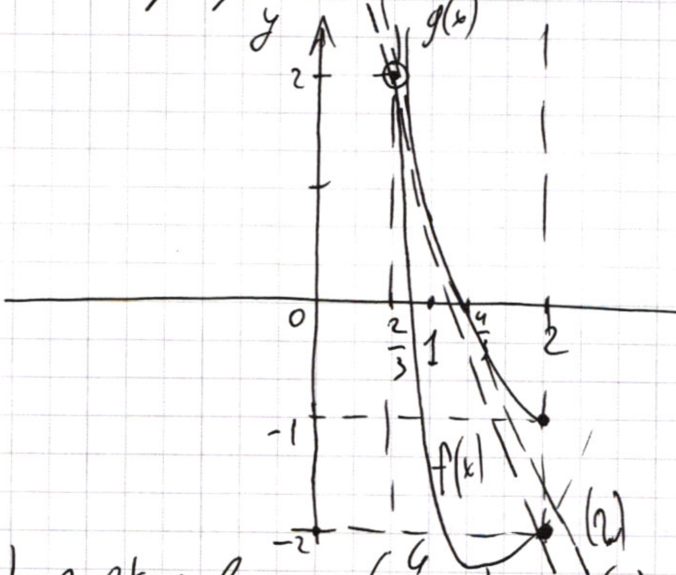
$g(2) = \frac{8-12}{6-2} = \frac{-4}{4} = -1$

схематич. изобр. графика $g(x)$ на $\left(\frac{2}{3}; 2\right]$



Графиком $h(x) = ax + в$ является прямая.

Решим графически:



$g(x) \cap Ox$ в т. $(\frac{4}{3}; 0)$

Чтобы выполнялось условие $g(x) \ge h(x) \ge f(x)$ на $x \in (\frac{2}{3}; 2]$ надо чтобы $h(x) = ax + в$ лежала между положением (1) (проходит ч/з точки $(+2; -2)$ и $(\frac{2}{3}; 2)$) и положением (2) (проходит ч/з т. $(\frac{2}{3}; 2)$ и касается ветви гиперболы $g(x)$).

(1): $\ominus \begin{cases} 2a + в = -2 \\ \frac{2}{3}a + в = 2 \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{4}{3}a = -4 \\ 2a + в = -2 \end{cases}$

$\begin{cases} a = -3 \\ в = 4 \end{cases}$

(2): $\frac{2}{3}a + в = 2 \Rightarrow в = 2 - \frac{2}{3}a$

$\frac{8 - 6x}{3x - 2} = ax + в$ им. ед. корень $x > 0$

$8 - 6x = 3ax^2 + x(3в - 2a) - 2в$

$3ax^2 + x(3в - 2a + 6) - 2в - 8 = 0$

$3ax^2 + x(6 - 2a - 2a + 6) -$

$- 12 + \frac{4}{3}a = 0$

$D = (12 - 4a)^2 + 4 \cdot (12 - \frac{4}{3}a) \cdot 3a = 0$

$144 - 96 + 16a^2 + 144a - 16a^2 = 0$

$a = -\frac{48}{144} = -\frac{12}{36} = -\frac{1}{3}$

$в = 3$

Ответ: $(a; в)$: $a \in (-3; -\frac{1}{3})$; $в \in (3; 4)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\underbrace{\frac{8-6x}{3x-2}}_{g(x)} = \underbrace{ax+b}_{h(x)} \geq \underbrace{18x^2-51x+28}_{f(x)}$$

$\left[\frac{2}{3}; 2\right]$

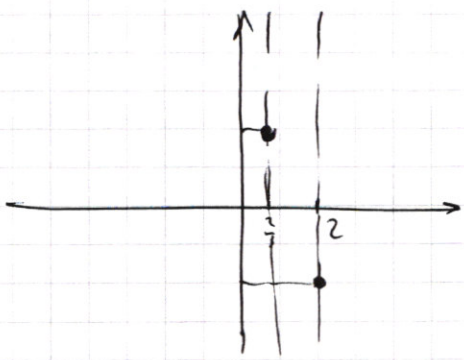
$x_0 = \frac{51}{36} = 1\frac{15}{36}$

$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\cancel{18}^{2}\cdot 4}{\cancel{9}} - \frac{\cancel{51}^{17}\cdot 2}{\cancel{3}} + 28 =$

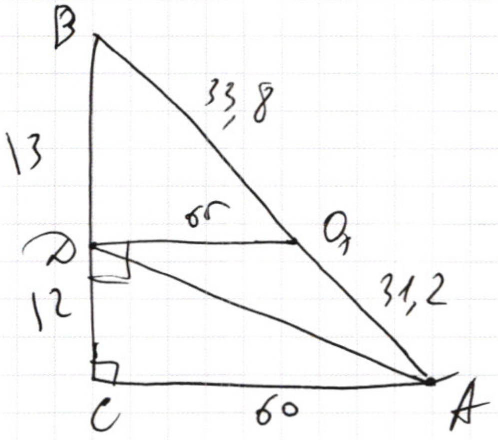
$= 8 + 28 - 34 = 2$

$f(2) = 18\cdot 4 - 51\cdot 2 + 28 = 72 + 28 - 102 =$

$= -2$



$\frac{8-6x}{3x-2} = -2 + \frac{4}{3x-2}$



$r = 31{,}2 = \frac{12\cdot 13}{5}$

$R = \frac{5\cdot 13}{2} = 32{,}5$

$65 - 31{,}2$

$\sqrt{25\cdot 169 - 625} = \sqrt{25\cdot 169 - 25\cdot 25} = 5\cdot 12 = 60$

$\frac{OD}{\cancel{60}_5} = \frac{13}{\cancel{12}}$

$OD = 5\cdot 13 = 65$

$65{,}0 - 31{,}2 = 33{,}8$

$3744 : 4 = 936$

$936 : 9 = 104$

$3744 : 36 = 104$

$104 \cdot 36 = 3744$

$144 \cdot 26 = 3744$

$\sqrt{12^2+60^2} = \sqrt{12^2+12^2\cdot 5^2} = 12\sqrt{26}$

$\sqrt{12^2+60^2} = \sqrt{12^2+12^2\cdot 5^2} = 12\sqrt{26}$

$144 + 3600 =$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\underbrace{|x^2-26x|}_{<0}^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$$

$26x-x^2>0 \quad t\geq 0$

$$(\underbrace{26x-x^2}_{t})^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$$

$$-x^2+26x=\underbrace{-\underbrace{(x-13)^2}_{\leq 0}+169}_{\leq 169}$$

$$\underbrace{t^{\log_5 12}+t}_{>0} \geq \underbrace{13^{\log_5 t}}_{>0}$$

$$\log_5(t^{\log_5 12}+t) \geq \log_5 13^{\log_5 t}$$

$$\log_5(t^{\log_5 12}+t) \geq \log_5 13 \cdot \log_5 t$$

$$t(t^{\log_5 12-1}+1)$$

$$\log_5 t+\log_5(t^{\log_5 12-1}+1) \geq \log_5 13 \cdot \log_5 t$$

$$t^{\log_5 12}+t \geq 13^{\log_5 t}$$

$$\underbrace{t^{\log_5 12}+t-13^{\log_5 t}}_{f(t)} \geq 0$$

$t>0$

$$t^{\log_5 12}+t-13^{\log_5 t}=0$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \\ (y-6x)^2=(x-1)(y-6) \end{cases}$$

$a=x-1$, $b=y-6$ $\quad x=a+1$, $y=b+6$

$$\begin{cases} ab=(b-6a)^2 \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases}$$

$y-6x\geq 0$

$b+6-6a-6\geq 0$

$b\geq 6a$

$-\sqrt{10}\leq a\leq\sqrt{10}$

$-3\sqrt{10}\leq b\leq 3\sqrt{10}$

$27a^2+90=13ab$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\geq 1 \\ y\geq 6 \end{cases} \\ \begin{cases} x\leq 1 \\ y\leq 6 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a\geq 0 \\ b\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a<0 \\ b<0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$1-\sqrt{10}\leq x\leq\sqrt{10}+1$

$6-3\sqrt{10}\leq y\leq 6+3\sqrt{10}$

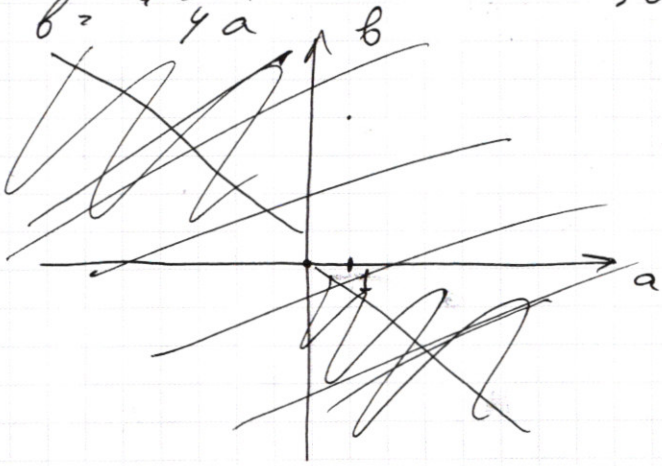
$(3a)^2+b^2=90$

$((0;0);\ 3\sqrt{10})$

$3\cdot a$

$b^2-13ab+36a^2=0$

$$\left[\begin{array}{l} b=9a \\ b=4a \end{array}\right.$$



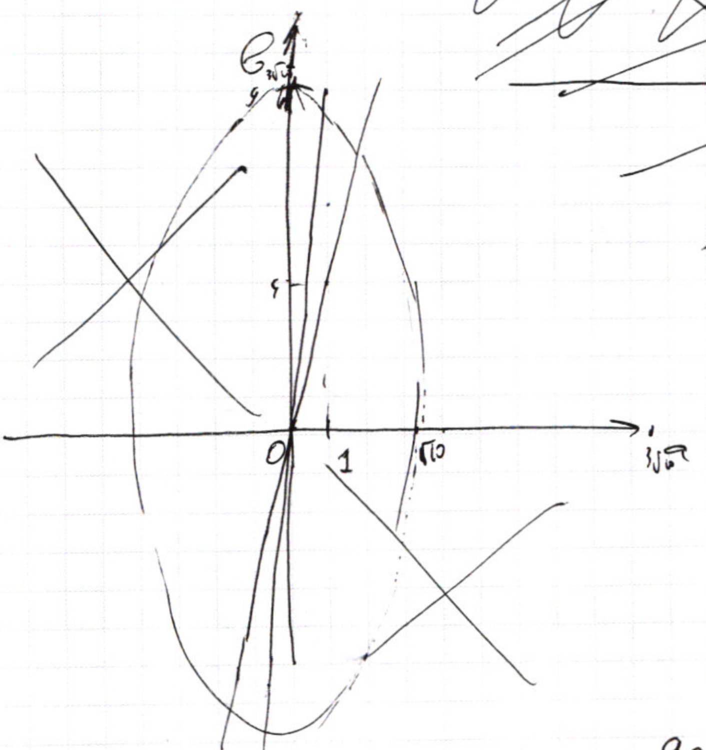
$3\sqrt{10}\ \vee\ 9$

$\sqrt{10}\ \vee\ 3$

$10\ \vee\ 9$

$3\sqrt{10}\ \vee\ 10$

$90\ \vee\ 100$



1) $b=9a$

$9a^2+81a^2=90$

$90a^2=90$

$a^2=1$

$a=\pm 1$

$b=\pm 9$

$(1;9);(-1;-9)$ $\quad x,y$

2) $b=4a$

$9a^2+16a^2=90$

$25a^2=90$

$a^2=\frac{90}{25}=\frac{18}{5}$

$a=\pm\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\pm\frac{3\sqrt{10}}{5}$

$b=\pm\frac{12\sqrt{10}}{5}$

$9a\geq 6a$

$3a\geq 0$

$a\geq 0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(2)
$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$$

(2) $(3x-3)^2+(y-6)^2-9-36=45$

$(3x-3)^2+(y-6)^2=90$

$9(x-1)^2+(y-6)^2=90$ $\quad ((3;6);\ 3\sqrt{10})$

(1): $y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}$

$$\begin{cases} y-6x\ge 0 \\ y^2-12xy+36x^2=xy-6x-y+6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y\ge 6x \\ y^2-13xy+36x^2+6x-y-6=0 \end{cases}$$

$(y-6x)^2=(x-1)(y-6)$

$x-1=a \Rightarrow x=a+1$

$y-6=b \Rightarrow y=6+b$

$$\begin{cases} ab=(y-6x)^2 \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases}$$

$b^2=90-9a^2$ $\quad b^2\le 90$

$9a^2=90-b^2$

$$\begin{cases} ab=(b-6a)^2 \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases}$$

$ab=b^2-12ab+36a^2$

$36a^2+b^2=13ab$

$27a^2=13ab-90$

$27a^2+90=13ab$

$9(3a^2+10)=13ab$

$a^2\le 10$

$-\sqrt{10}\le a\le\sqrt{10}$

$-3\sqrt{10}\le b\le 3\sqrt{10}$

$y-6x=6+b-6a-6=$
$=b-6a$

$xy-6x-y+6=$
$=x(y-6)-(y-6)=$
$=(x-1)(y-6)\ge 0$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 1\\ y\ge 6\end{cases}\\ \begin{cases}x\le 1\\ y\le 6\end{cases}\end{array}\right.$$

$a=1$:
$$\begin{cases} b=(b-6)^2 \\ 9+b^2=13b \end{cases}$$
$b^2-13b+36=0$

$b=(b-6)^2$

$b^2=81$

$3\cdot x$

$13b-36=81$

$b=$

$(3a^2+10)\ \vdots\ 13$

$3a^2+10\overset{13}{\equiv}0$

$3a^2\overset{13}{\equiv}3$

$a^2\overset{13}{\equiv}1$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n^2	0	1	4	9	3	12	10	10	12	3	9	4	1

$13\cdot5=65$, $13\cdot6=78$, $13\cdot7=91$, $13\cdot8=104$, $13\cdot9=117$

$65\cdot65$: 325, 390, 4225

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

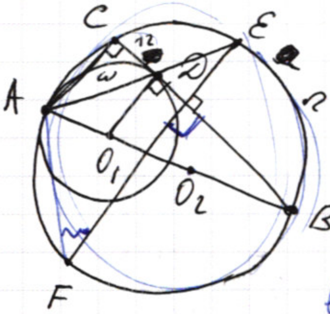
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$R - ?$

$r - ?$

$\angle AFE - ?$

$S_{AEF} - ?$

$CD = 12$

$BD = 13$

$AC = \sqrt{4R^2 - 625}$

$\frac{r}{AC} = \frac{13}{25}$

$24R = 13\sqrt{4R^2 - 625}$

$\triangle ABC \sim \triangle O_1BD \Rightarrow \frac{AB}{O_1B} = \frac{BC}{BD}$

$\frac{2R}{2R - r} = \frac{25}{13}$

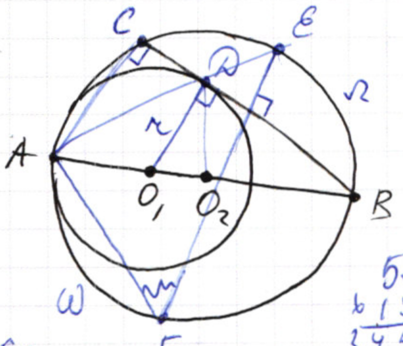
$26R = 50R - 25r$

$25r = 24R$

$R = \frac{25}{24}r$

$\frac{R}{r} = \frac{25}{24}$

O_1 – вписан ω



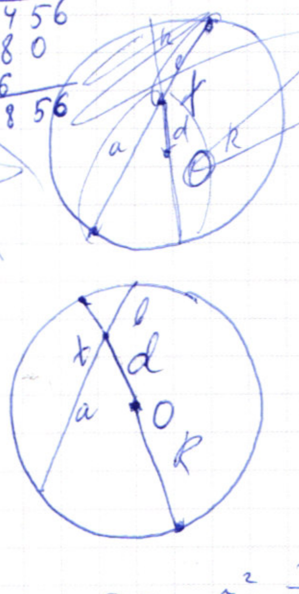
$\frac{AB}{O_1B} = \frac{BC}{BD}$

$\frac{2R}{R-r} =$

$D: BD \cdot DC = \frac{625}{576}r^2 - \frac{577r^2}{576} + \frac{r^3}{12\sqrt{r^2+169}}$

$AD \cdot DE = 156$

$576 \cdot 156 = 89856$



$ab = (R-d)R$

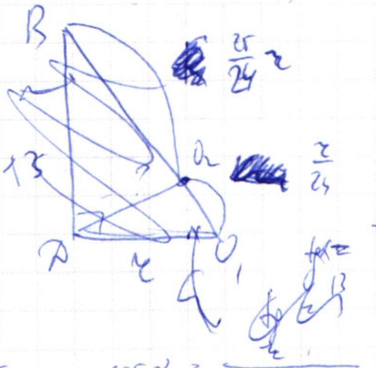
$al = R^2 - dR$

$(R+d)(R-d) = R^2 - d^2$

$156 = \frac{12}{48}r^2 + \frac{r^3}{12\sqrt{r^2+169}}$

$1872\sqrt{r^2+169} = 144r^2\sqrt{r^2+169} + r^3$

$R = 32,5$
$r = 31,2$



$DO_2 = r^2 + \frac{r^2}{576} - \frac{r^2}{12} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2+169}} = \frac{577}{576}r^2 - \frac{r^3}{12\sqrt{r^2+169}}$

$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\cos^2\alpha = \frac{1}{1 + \frac{169}{r^2}} = \frac{r^2}{r^2+169}$

$\cos\alpha = \frac{r}{\sqrt{r^2+169}}$

$12 \times 13 = 156$

$1872\sqrt{z^2+169} = 144z^2\sqrt{z^2+169} + z^3$

$\sqrt{z^2+169}\,(1872-144z^2) = z^3$

$\sqrt{z^2+169} = \dfrac{z^3}{1872-144z^2}$ >0

$z^2+169 = \dfrac{z^6}{(144(13-z^2))^2}$

$z^2+169 = \dfrac{z^6}{20736(169-26z^2+z^4)}$

$z^2=t$ $\quad t+169 = \dfrac{t^3}{3504384-539136t+t^2}$

$20736 \cdot 169 = 3504384$

$20736 \cdot 26 = 539136$

$24R = 13\sqrt{4R^2-625}$

$\dfrac{576R^2}{169} = 4R^2-625$

$\dfrac{-576R^2+676R^2}{169} = 625$

$\dfrac{100R^2}{169} = 625$

$169 \cdot 4 = 676$

$R^2 = \dfrac{625\cdot169}{100}$

$R = \dfrac{25\cdot13}{10} = 32{,}5$

$z = \dfrac{24R}{25}$

$z = 31{,}2$

$AD\cdot AD' = 156$

$144 = 12\cdot12 = 4\cdot4\cdot3\cdot3$

$1872 : 4 = 468$

$1872 : 16 = 117$

$117 : 9 = 13$

$144\cdot144 = 576$

$576 \cdot 144 = 20736$

$25\cdot13 = 325$

$24\cdot13 = 312$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\dfrac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\dfrac{2}{17}$

$tg\,\alpha - ?$

$2\alpha = x;\ 2\beta = y$

$\sin(x+y) = -\dfrac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(x+2y) + \sin x = -\dfrac{2}{17}$

$\sin x\cdot\cos y + \sin y\cdot\cos x = -\dfrac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin x\cdot\cos 2y + \sin 2y\cdot\cos x + \sin x = -\dfrac{2}{17}$

$\sin x(1-\cos$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)