МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

tgα опред. $(\alpha \neq \pi n, n\in\mathbb{Z})$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta) = -\frac{2}{5}$

$2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\cancel{\beta}\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Т.к. $\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$, по осн. триг. тожд.:

$\left[\begin{array}{l}\sin 2\beta = \sqrt{1-\frac{1}{5}}\\ \sin 2\beta = -\sqrt{1-\frac{1}{5}}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\sin 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}\\ \sin 2\beta = -\frac{2}{\sqrt{5}}.\end{array}\right.$

Случай 1: $\sin 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$:

$\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1$ (1)

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha(1-\cancel{\sin}\,tg^2\alpha)$

$tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{tg^2\alpha+1}$ ($tg^2\alpha+1>0$ при $\alpha\in\mathbb{R}$).

$\cos 2\alpha = \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \cos^2\alpha\cdot 2\cdot tg\alpha = \frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}$.

Имеем вместо ур-ия (1)

$\frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha} + \frac{2(1-tg^2\alpha)}{1+tg^2\alpha} = -1$

$2 + 2tg\alpha - 2tg^2\alpha = -1 - tg^2\alpha$

$tg^2\alpha - 2tg\alpha - 3 = 0$ $D = 4+3\cdot 4 = 16$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

N1 (прод.)

$$\left[\begin{array}{l} tg\alpha=\frac{2+4}{2} \\ tg\alpha=\frac{2-4}{2} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} tg\alpha=3 \\ tg\alpha=-1 \end{array}\right.$$

Случай 2: $\sin 2\beta=-\frac{2}{\sqrt5}$.

$$\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5}-\frac{2}{\sqrt5}\cdot\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}$$

$$\sin 2\alpha-2\cos 2\alpha=-1$$

$$\frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}-\frac{2(1-tg^2\alpha)}{1+tg^2\alpha}=-1$$

$$2tg\alpha-2+2tg^2\alpha=-1-tg^2\alpha$$

$$3tg^2\alpha+2tg\alpha-1=0$$

$$D=4+3\cdot4=16$$

$$\left[\begin{array}{l} tg\alpha=\frac{-2+4}{6} \\ tg\alpha=\frac{-2-4}{6} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} tg\alpha=\frac{1}{3} \\ tg\alpha=-1 \end{array}\right.$$

Ответ: $3; -1; \frac{1}{3}$

N2

Пусть $t=x-6$; $m=2y-1$, тогда система перепис. в виде:

$$\begin{cases} t-6m=\sqrt{tm} \\ t^2+9m^2=90 \end{cases} \qquad \text{ОДЗ: } \begin{cases} tm\geq0 \\ t-6m\geq0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^2-12tm+36m^2=tm \\ t^2+9m^2=90 \end{cases} \qquad \begin{cases} t^2-13tm+36m^2=0 \\ t^2+9m^2=90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (t-4m)(t-9m)=0 \\ t^2+9m^2=90 \end{cases}$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N2 (прод.)

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l} t=4m \\ t=9m\end{array}\right. \\ t^2+9m^2=90\end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} t=4m \\ 16m^2+9m^2=90\end{cases} \\ \begin{cases} t=9m \\ 81m^2+9m^2=90\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} t=4m \\ m^2=\frac{18}{5}\end{cases} \\ \begin{cases} t=9m \\ m^2=1\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} t=4\sqrt{\frac{18}{5}} & 4\cdot\frac{18}{5}>0 \\ m=\sqrt{\frac{18}{5}} & 4\sqrt{\frac{18}{5}}-6\cdot\sqrt{\frac{18}{5}}<0\end{cases} \Big\}\text{ не в ОДЗ} \\ \begin{cases} t=-4\sqrt{\frac{18}{5}} & 4\cdot\frac{18}{5}>0 \\ m=-\sqrt{\frac{18}{5}} & -4\sqrt{\frac{18}{5}}+6\sqrt{\frac{18}{5}}>0\end{cases} \Big\}\text{ вход. в ОДЗ} \\ \begin{cases} t=9 & 9>0 \\ m=1 & 9-6>0\end{cases} \Big\}\text{ вх. в ОДЗ} \\ \begin{cases} t=-9 & 9>0 \\ m=-1 & -9+6<0\end{cases} \Big\}\text{ не вх. в ОДЗ}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} t=-4\sqrt{\frac{18}{5}} \\ m=-\sqrt{\frac{18}{5}}\end{cases} \\ \begin{cases} t=9 \\ m=1\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x-6=-4\sqrt{\frac{18}{5}} \\ 2y-1=-\frac{\sqrt{18}}{5}\end{cases} \\ \begin{cases} x-6=9 \\ 2y-1=1\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x=6+4\sqrt{\frac{18}{5}} \\ y=\frac{5+\sqrt{18}}{10}\end{cases} \\ \begin{cases} x=15 \\ y=1\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $\left(6+4\sqrt{\frac{18}{5}};\ \frac{5+\sqrt{18}}{10}\right)$; $(15;1)$.

N3

~~ОДЗ~~: $10x+|x^2-10x|^{\log_3 4}\geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

ОДЗ: $10x-x^2>0$; $x\in(0;10)$.

№3 (прод.)

$$10x - x^2 + (10x - x^2)^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3(10x-x^2)}$$

$$3^{\log_3(10x-x^2)} + 3^{\log_3(10x-x^2)\cdot\log_3 4} \geq 5^{\log_3(10x-x^2)}$$

$$3^{\log_3(10x-x^2)} + 4^{\log_3(10x-x^2)} \geq 5^{\log_3(10x-x^2)}$$

Пусть $t = \log_3(10x - x^2)$, имеем:

$$3^t + 4^t \geq 5^t \quad (5^t > 0).$$

$$\frac{3^t + 4^t}{5^t} \geq 1$$

$$(0,6)^t + (0,8)^t \geq 1$$

$f(t) = (0,6)^t$ – мон. убыв. ф-ция; $(0,6 < 1)$

$g(t) = (0,8)^t$ – убыв. ф-ция $(0,8 < 1)$

$\Big\}$ $h(t) = (0,6)^t + (0,8)^t$ – убыв. ф-ция.

$$(0,6)^2 + (0,8)^2 = 1$$

Значит, при $t > 2$ $(0,6)^t + (0,8)^t < 1$,

при $t \leq 2$ $(0,6)^t + (0,8)^t \geq 1$.

$t \leq 2 \Rightarrow \log_3(10x - x^2) \leq 2$

$$\log_3(10x - x^2) \leq \log_3 9 \quad (3 > 1).$$

$$10x - x^2 \leq 9$$

$$x^2 - 10x + 9 \geq 0$$

$$D = 100 - 9 \cdot 4 = 64$$

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{10+8}{2} \\ x = \frac{10-8}{2} \end{array}\right.$ $\quad \left[\begin{array}{l} x = 9 \\ x = 1 \end{array}\right.$ $\quad x^2 - 10x + 9 \geq 0$ при $x \in (-\infty; 1] \cup [9; +\infty)$.

Но с уч. ОДЗ: $x \in (0; 10) \Rightarrow$

$x \in (0; 1] \cup [9; 10)$.

Ответ: $(0; 1] \cup [9; 10)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.

Пусть m и n - натур. числа. Тогда:

$$f(n)=f\left(\frac{1}{m}\cdot mn\right)=f\left(\frac{1}{m}\right)+f(mn)=f\left(\frac{1}{m}\right)+f(m)+f(n)$$

$$f(n)=f\left(\frac{1}{m}\right)+f(m)+f(n)$$

$$f\left(\frac{1}{m}\right)=-f(m)$$ для любого m - нат.

Тогда $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)=\underbrace{f(x)-f(y)<0}_{\text{искомое}}$.

Заметим, что:

$f(2)=0$, $f(3)=0$, $f(5)=1$, $f(7)=1$, $f(11)=2$, $f(13)=3$, $f(17)=4$, $f(19)=4$, $f(23)=5$) перебрали все простые от 2 до 25.

Нетрудно заметить, что при выполн. св-ва $f(ab)=f(a)+f(b)$, если $n=p_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$ (разложение n на простые), то:

$$f(n)=f(p_1^{\alpha_1})+f(p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k})=\alpha_1 f(p_1)+f(p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k})=$$
$$=\alpha_1 f(p_1)+\alpha_2 f(p_2)+\ldots+\alpha_k f(p_k).$$

Тогда:

$f(4)=0$, $f(6)=0$, $f(8)=0$, $f(9)=0$, $f(10)=1$, $f(12)=0$, $f(14)=1$, $f(15)=1$, $f(16)=0$, $f(18)=0$, $f(20)=1$, $f(21)=1$, $f(22)=2$, $f(24)=0$, $f(25)=2$.

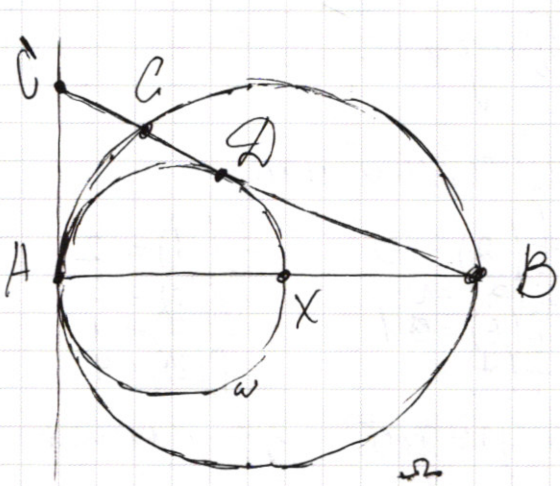
Мы ищем кол-во пар $(x;y)$, что $f(x)<f(y)$.

Если $f(x)=0$ (10 вар.), то берем y любое, что $f(y)\neq 0$ (14 вар.). $10\cdot 14=140$ вар.

Если $f(x)=1$ (7 вар.), то $f(y)>1$ ~~или $f(y)>2$~~;
(7 вар.) : $7\cdot 7=49$ вар.
Если $f(x)=2$ (3 вар.), то $f(y)>2$ (4 вар.)
$3\cdot 4=12$ вар.
$(1\cdot 3=3)$
Если $f(x)=3$ (1 вар.), то $f(y)>3$ (3 вар.)
Если $f(x)=4$ (2 вар.), то $f(y)=5$ (1 вар.)
$(2\cdot 1=2)$.

Итого: $140+49+12+3+2=206$ вар.
Ответ: 206 вар.

№4



Дано:
окр. Ω и ω кас.
в т. A внутр. обр.
AB - диам. больш.
окр. Ω, хорда BC окр. Ω
кас. ω в т. D.
AD повторно пер. Ω в
т. E.
Прямая через $E \perp BC$
повт. пер. Ω в т. F.
Найти: R и r (радиусы окр.; $R>r$);
$\angle AFE$; S_{AEF} - ?
$CD=\frac{15}{2}$; $BD=\frac{17}{2}$

Решение
Пусть $AB \cap \omega = $ т. X, тогда $AX=2r$, т.к.
$AX \perp$ касат. $\Rightarrow AX$ - диам.; $XB=2R-2r$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4 (прод.)

$BD^2 = XB \cdot AB$ (по св-ву кас. и сек.)

$\frac{17^2}{4} = 4(R-r) \cdot R$ (*)

Продлим BC до т. ~~пер.~~ C', что AC' — исходная касат. Пусть $CC' = x$, тогда

$AC' = C'D$ (~~отр~~ по св-ву отр. кас к ω).

$AC' = x + \frac{15}{2}$; $C'B = x + 16$;

По св-ву кас. и сек. к Ω:

$AC'^2 = C'C \cdot C'B$;

$\left(x + \frac{15}{2}\right)^2 = x \cdot (x+16)$

$\cancel{x^2} + 15x + \frac{15^2}{2^2} = \cancel{x^2} + 16x$

$x = \frac{225}{4}$

$AB \perp AC'$ (диам. к кас.). По т. Пиф. в $\triangle C'AB$ ($\angle A = 90°$):

$AC'^2 + AB^2 = C'B^2$

$4R^2 = (x+16)^2 - \left(x + \frac{15}{2}\right)^2$

$4R^2 = \left(16 - \frac{15}{2}\right) \cdot \left(2x + \frac{47}{2}\right)$

$4R^2 = \frac{17}{2} \cdot \left(\frac{225}{2} + \frac{47}{2}\right)$

$4R^2 = \frac{17}{2} \cdot \frac{17 \cdot 16}{2}$

$R^2 = 17^2$; $R > 0 \Rightarrow R = 17$.

Из соотнош. (*) имеем:

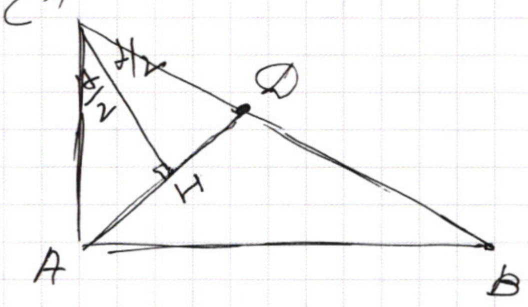
№4 (прод.)

$\frac{17^2}{4} = 4 \cdot (17-r) \cdot \cancel{17}$

$\frac{17^2}{16} = 17(17-r)$

$\frac{17}{16} = 17 - r$

$r = \frac{17 \cdot 15}{16}$.



Вернемся к $\triangle BAC'$ ($A = 90^\circ$). $AB = 34$;

$BC' = x + 16 = \frac{289}{4}$.

Пусть $\angle AC'B = \alpha$; тогда $\sin\alpha = \frac{34 \cdot 4}{289} =$

$= \frac{8}{17}$; по осн. триг. т. $\cos\alpha = \frac{15}{17}$ ($\cos\alpha > 0$, т.к. $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$).

$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2(\alpha/2) = \frac{15}{17}$

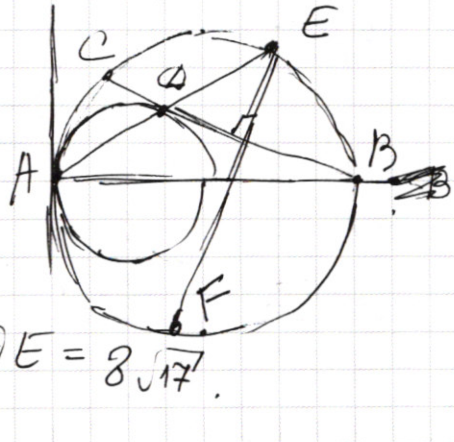
$\frac{2}{17} = 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$; $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{17}}$ ($0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$; $\sin\frac{\alpha}{2} > 0$).

Проведем $C'H$ – высоту и биссектрису, и мед. $\triangle AC'D$ – р/б ($AC' = C'D$ – отр. кас.)

$AH = AC' \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$; $AC' = x + \frac{15}{2} = \frac{255}{4}$.

$AH = \frac{255}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{15\sqrt{17}}{4}$.

$AH = DH$ ($C'H$ – мед.) $\Rightarrow AD = \frac{15\sqrt{17}}{2}$.



По св-ву 2 пер. хорд.

$AD \cdot DE = CD \cdot DB$

$\frac{\cancel{15\sqrt{17}} \cdot DE}{\cancel{2}} = \frac{\cancel{15} \cdot \cancel{17}\sqrt{17}}{\cancel{4}\,2}$

$DE = \frac{\sqrt{17}}{2} \Rightarrow AE = AD + DE = 8\sqrt{17}$.

По т. син. в $\triangle AEF$:

~~$\sin\angle AFE =$~~

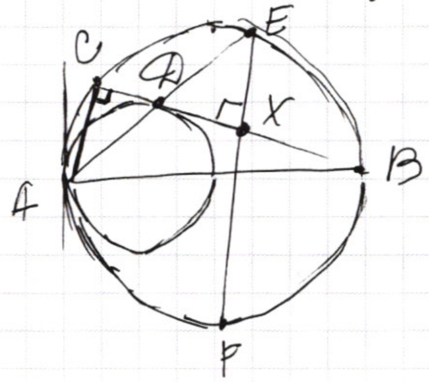
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4 (прод.)

$\frac{AE}{2\sin\angle AFE} = R$

$\frac{8\sqrt{17}}{2\cdot 17} = \sin\angle AFE \to \frac{4}{\sqrt{17}} = \sin\angle AFE$

$\left[\begin{array}{l}\angle AFE = \arcsin\frac{4}{\sqrt{17}}\\ \angle AFE = \pi - \arcsin\frac{4}{\sqrt{17}}\end{array}\right.$



$\angle ACB = 90^\circ$ (опир. на AB – диам.) $\Rightarrow$ пусть $X = EF \cap CB$, то $\angle ACX = \angle CXE$ (накр. лет.) $\Rightarrow AC \parallel EF \Rightarrow$

$CE = AF$ (хорды, отсек. пар. пр.)

Т.е. $ACEF$ – р/б тр. ($AC \parallel EF$; $CE = AF$),

$\angle ACE > 90^\circ \Rightarrow \angle AFE < 90^\circ$ ($\angle ACE + \angle AFE = 180^\circ$ (св-во впис. 4-ка))

т.е. $\angle AFE = \arcsin\frac{4}{\sqrt{17}}$.

По т. Пиф. в $\triangle ACB$ ($\angle C = 90^\circ$):

$AC^2 + CB^2 = AB^2$

$AC^2 + 16^2 = 34^2$

$AC^2 = 18\cdot 50 \to AC = 30$ ($AC > 0$)

$AD = \frac{15\sqrt{17}}{2}$; $DE = \frac{\sqrt{17}}{2}$

$\angle ADC = \angle XDE$ (верт.);

$\angle ACX = \angle CXE = 90^\circ \Rightarrow \triangle DAC \sim \triangle DEX$ (по 2ум.).

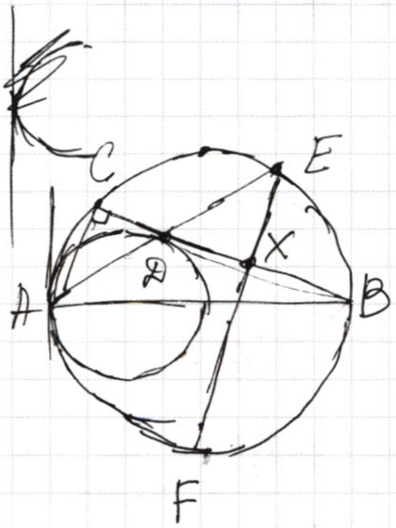
$\frac{AC}{EX} = \frac{AD}{DE} \Rightarrow \frac{30}{EX} = 15$; $EX = 2$.

$\angle CEX = \angle AFE$ (св-во р/б трап.).

Пусть $\angle ACX = 90° \Rightarrow$

CX – высота тр. $\Rightarrow \angle CXE = 90°$

$\frac{CX}{\sin \angle CEX} = CE$

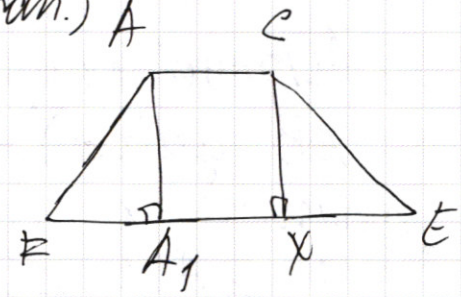


Пусть $CX = x$; По т. Пиф. в $\triangle CXE$ ($\angle X = 90°$):

$$x^2 + 4 = \frac{17x^2}{16}$$

$\frac{x^2}{16} = 4$; $x = 8$ $(x > 0)$.

$CE = 2\sqrt{17} = AF$ (р/б трап.)



Провед. AA_1 – выс. тр.

$AA_1 = CX$, $\angle A_1 = \angle X = 90°$, $AF = CE \Rightarrow$

$\triangle AFA_1 = \triangle CEX$ (прямоуг. по кат. и гип.).

$FA_1 = XE = 2$; $A_1X = AC = 30$ (т.к. A_1ACX – прямоугольник).

$FE = 2 + 2 + 30 = 34$.

Но $FE = 2R \Rightarrow FE$ – диам. $\Rightarrow \angle FAE = 90°$.

$S_{FAE} = AE \cdot AF / 2 = 2\sqrt{17} \cdot 8\sqrt{17} / 2 = 17 \cdot 8 =$

$= 136$

Ответ: $R = 17$; $r = \frac{17 \cdot 15}{16}$; $\angle AFE = \arcsin \frac{4}{\sqrt{17}}$;

$S_{AEF} = 136$.

N6

$x \in \left[\frac{1}{4}; 1\right]$

$$\frac{16x - 16}{4x - 5} \le ax + b \le -32x^2 + \cancel{36x} \; 36x - 3$$

$4x - 5 < 0$ при $x \in \left[\frac{1}{4}; 1\right]$.

черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Перепишем в систему:

$$\begin{cases} 16x-16 \geq (4x-5)(ax+b) \\ 32x^2+(a-36)x+(b+3) \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4ax^2-5ax+4bx-5b-16x+16 \leq 0 \\ 32x^2+(a-36)x+(b+3) \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4ax^2+(4b-5a-16)x+16-5b \leq 0 \quad (1) \\ 32x^2+(a-36)x+(b+3) \leq 0 \quad (2) \end{cases}$$

Для нер-ва 2: $D=(a-36)^2-32\cdot(b+3) \geq 0$

$$x \in \left[\frac{36-a-\sqrt{(a-36)^2-32(b+3)}}{64};\ \frac{36-a+\sqrt{(a-36)^2-32(b+3)}}{64}\right]$$

Т. е.:

$$\begin{cases} \dfrac{36-a-\sqrt{(a-36)^2-32(b+3)}}{64} \leq \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{36-a+\sqrt{(a-36)^2-32(b+3)}}{64} \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 36-a-\sqrt{(a-36)^2-32(b+3)} \leq 16 \\ 36-a+\sqrt{(a-36)^2-32(b+3)} \geq 64 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{(a-36)^2-32(b+3)} \geq 20-a \\ \sqrt{(a-36)^2-32(b+3)} \geq 18+a \end{cases}$$

~~При $x=\frac{1}{4}$ и $x=1$ исх. нер-во им. вид~~

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$R=17$

$\cancel{r}=17\sqrt{\frac{15}{16}}$

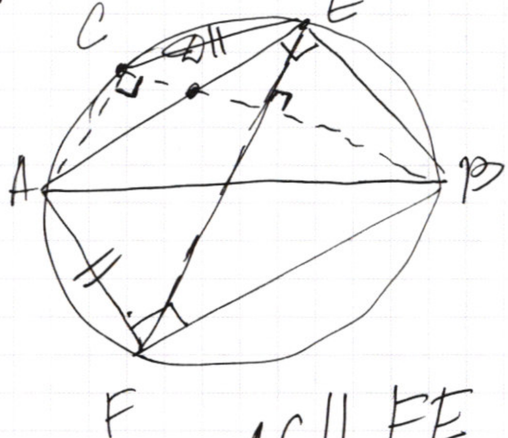
$\cancel{(34-2r)\cdot 34=\frac{17^2}{4}}$

$4(R-r)\cdot R=\frac{17^2}{4^2}$

$(17-r)\cdot\cancel{17}=\frac{17^2}{4^2}$

$17-r=\frac{17}{16}$

$r=\frac{15\cdot 17}{16}$



$AC \parallel FE$

$(AC\perp BC;$
$FE\perp BC)$

$CE=AF$

$\cancel{CD\cdot DB=AD}$

$AD\cdot DE=\frac{17\cdot 15}{4}$

$AC^2+16^2=17^2$

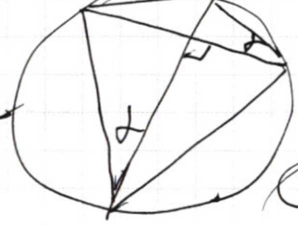
$AC^2=(17-16)(17+16)$

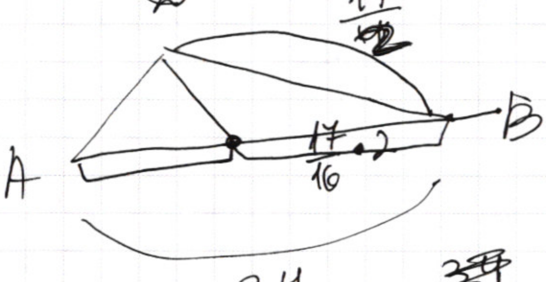
$AC=\sqrt{33}$

$\frac{CD}{DE}=\frac{AD}{DB}$

$-32\cdot\frac{1}{4}+18-3=18-11=7$

$\frac{-3}{3-16}$, $\frac{2-5}{-3}$, $\frac{8}{3}=2$





$x=1:$

$0\le a+b\le 1$

$\frac{16x-16}{4x-5}\le ax+b\le -32x^2+36x-3$

$[\frac{1}{4};1]$

$-32\cdot\frac{1}{16}+9-3$

34

$17-\frac{15}{16}\cdot 17$

$\frac{17}{16}$

$\frac{16(x-1)}{4x-5}\le$

$\frac{-12}{4-16}$, $\frac{1-5}{-4}$

$=3\le\frac{a}{4}+b\le 4$

$3\le\frac{a}{4}+b\le 4$

$32x^2-36x+3$

$36^2-3\cdot 4\cdot 32=$

$=3^2\cdot 4^2\cdot 9^2-3\cdot 2^7=$

$=2^4\cdot 3^4-3\cdot 2^7=$

$=2^4\cdot 3(27-8)$

19

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 1

(Нумеровать только чистовики)

$f(ab)=f(a)+f(b)$ $\quad f(p)=\left[\frac{p}{4}\right]$; p-прост.

$2\le x\le 25$ $\quad 2\le y\le 25$ $\quad f(x/y)<0$.

$(x;y)$ - кол-во

$f(p)\ge 0$

$f(2)=0$

$f(3)=0$ $\quad f(4)=0$ $\quad f(p_1^{\alpha_1}\dots p_n^{\alpha_n})=\alpha_1 f(p_1)$

$f(5)=1$ $\quad f(6)=0$

$f(7)=1$

$f(2\cdot 1)=f(2)+f(1)$

$f(11)=2$

$f(14)=1$ $\quad f(1)=0$

$\cancel{f(20)=0}$

$f(ab)=f(a)+f(b)=$ $\quad f(p_1^{\alpha_1}\dots p_n^{\alpha_n})=\alpha_1 f(p_1)+\dots+\ge 0$, ≥ 0

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f(21)=f(7)=1$

$5\cdot 11$ $\quad f(22)=1$

$\cancel{f(0{,}5)=f(0{,}5)+f(1)}$

$f\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)=2f\left(\frac{1}{2}\right)$

$f\left(\frac{1}{2}\cdot 14\right)=f(14)+f\left(\frac{1}{2}\right)$

$1=1+f\left(\frac{1}{2}\right)$ $\quad f\left(\frac{1}{3}\cdot 3n\right)=f(3n)+f\left(\frac{1}{3}\right)$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=0$ $\quad f(3n)=f(n)$

$f\left(\frac{1}{m}\cdot mn\right)=f(mn)+f\left(\frac{1}{m}\right)$

$f\left(\frac{13}{\dots}\right)=3$ $\quad f\left(\frac{1}{11}\cdot 22\right)=f(22)+f\left(\frac{1}{11}\right)$

$f(17)=$

$f\left(\frac{1}{m}\cdot mn\right)=f(mn)+f\left(\frac{1}{m}\right)=$ $\quad f\left(\frac{1}{11}\right)=-2$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$ $\quad =f(m)+\cancel{f(n)}+f\left(\frac{1}{m}\right)=\cancel{f(n)}$

$f\left(\frac{1}{m}\right)=-f(m)$ — готово

☒ черновик ☐ чистовик Страница № 2

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

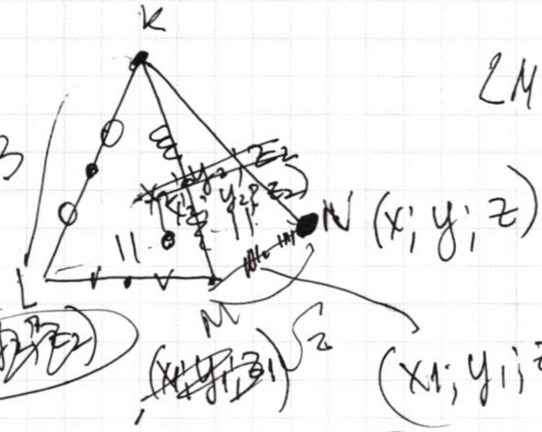
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

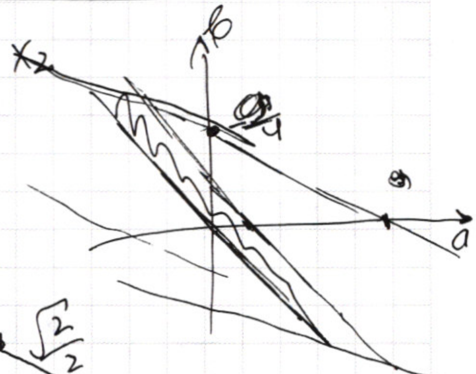
$a = 1-b$

$0 \le a+b \le 1$



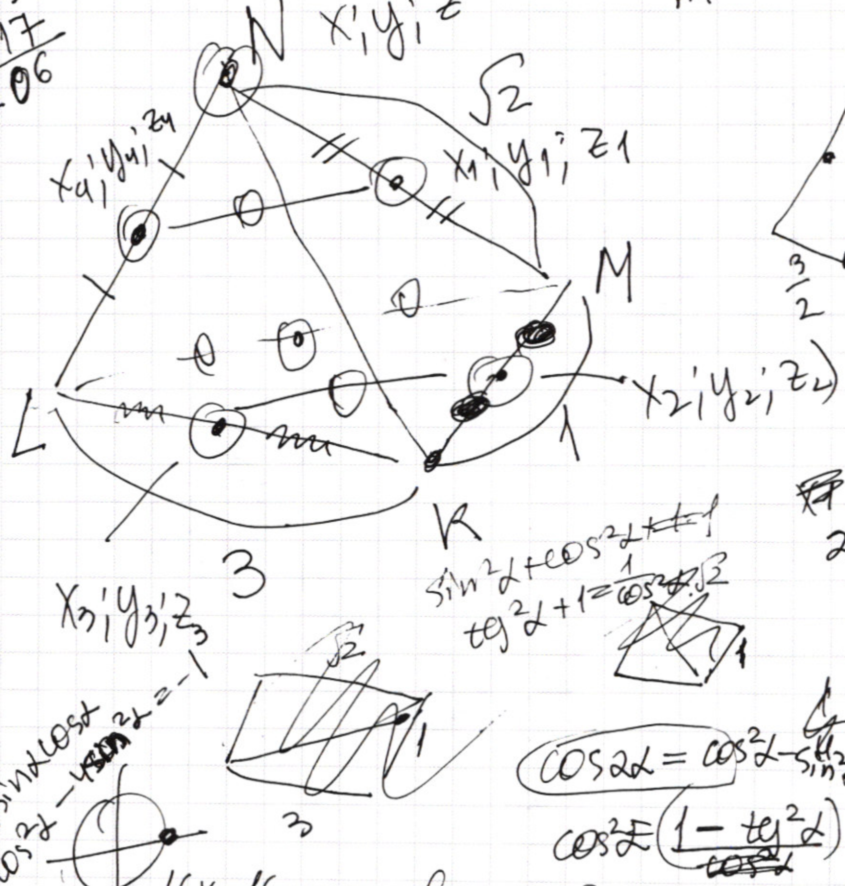
$\angle M - ?$

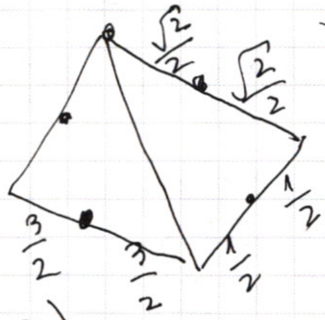
$(x_1-x)^2+(y_1-y)^2+(z_1-z)^2 = \frac{1}{2}$



т. Менелая

$\begin{array}{r} 189 \\ +\ 17 \\ \hline 206 \end{array}$





$9 \le a+4b \le 16$

$\frac{9-a}{4} \le b$

$2\sin\alpha\cos\alpha =$

$= \cos^2$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha = 1$

$tg^2\alpha+1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\frac{a}{4}$

$-2+a-3$

$\cos^2\alpha(1-tg^2\alpha)$

$\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$

$2\sin\alpha\cos\alpha + 4\cos^2\alpha - 4\sin^2\alpha = -1$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\frac{4-16}{1-5} = 3$

$\cos^2\alpha\left(\frac{1-tg^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)$

$3 \le \frac{a}{4}+b \le 4$

$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$

$0 \le a+b \le 1$

$-4 \le -\frac{a}{4} - b \le -3$

$-4 \le \frac{3a}{4} \le -2$

$-16 \le a$

$-36 \le 3a \le -8$

$-\frac{16}{3} \le a \le -\frac{8}{3}$

$9 \le a+4b \le 16$

$-16 \le -a-4b \le -9$

$14\ \frac{8}{3} \le -a \le \frac{16}{3}$

$-16 \le -3b \le -8$

$0 \le a+b \le 1$

$\frac{8}{3} \le b \le \frac{19}{3}$

$8 \le 3b \le 16$

$\frac{8}{3} \le 3b \le \frac{16}{3}$

$\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1$

$\sin^2 2\alpha = \frac{1+tg^2\alpha - 1 + tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$0 \le a+b \le 1$

$3 \le \frac{a}{4} + b \le 4$

$32x^2 + (a-36)x + b + 3 \le 0$

$16x - 16 \ge 4ax^2 - 5ax + 4bx - 5b$

$$\begin{cases} 32x^2 + (a-36)x + b + 3 \le 0 \\ \cancel{4ax^2 - (5a-16)x} \\ 4ax^2 + (4b - 5a - 16)x + 16 - 5b \le 0 \end{cases}$$

$x_1 \quad \frac{1}{4} \quad 1 \quad x_2$

$$\frac{36 - a \pm \sqrt{(a-36)^2 - 128(b+3)}}{64}$$

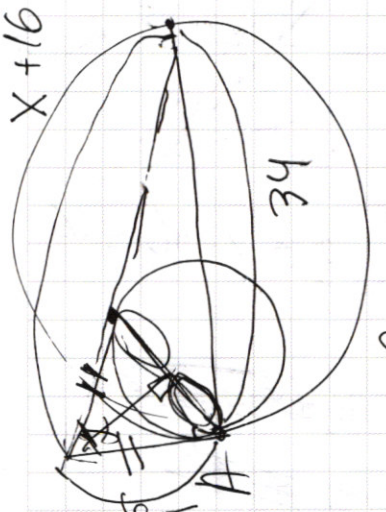
$x_1 + x_2 = \frac{36-a}{32}$

$x_1 x_2 = \frac{b+3}{32}$

$x_1 < \frac{1}{4}$

$x_2 > 1$

$x + 16 = \frac{225+64}{4} = \frac{289}{4}$



$\frac{8}{17}$

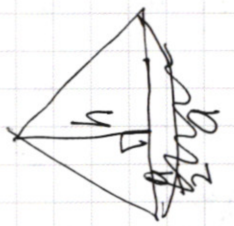
$\sin\alpha = \frac{2}{\cancel{289}\,17}\cdot 34 \cdot 4 =$

$\cos\alpha = \frac{15}{17}$

$1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{15}{17}$

$\frac{2}{17} = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$

$\frac{1}{17} = \sin^2\frac{\alpha}{2}$

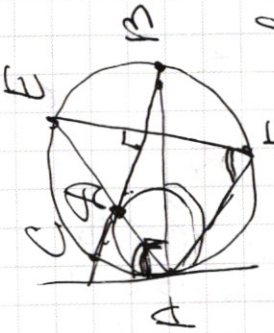


$\frac{225+30}{4} = \frac{255}{4}$

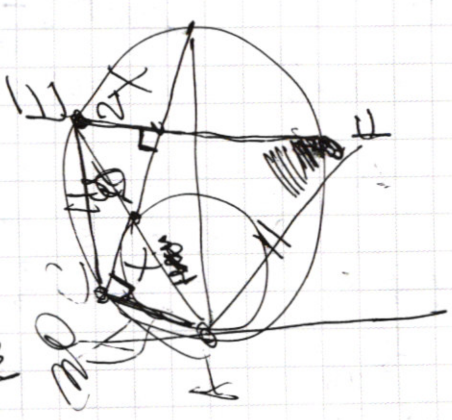
$\frac{255}{4}$

$x + \frac{15}{2}$

$4ax^2 - 5ax + 4bx - 5b - 16x + 16$



Найдем



AE - Найти

$R = \frac{AE}{2\sin E}$

$\frac{255}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{17}}$

$30 + 56$

$\sqrt{17}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{16x-20+4}{4x-5}=$

$4+\frac{4}{4x-5}$

$t+t^{\log_3 4}\geq t^{\log_3 5}$

$3^{\log_3 t}+3^{\log_3 t\cdot\log_3 4}\geq 3^{\log_3 t\cdot\log_3 5}$

$3^{\log_3 t}+4^{\log_3 t}\geq 5^{\log_3 t}$

$27+64 \leq 125$

$3^y+4^y\geq 5^y$

$x\leq 2$

$\frac{3^x+4^x}{2}\geq\sqrt{3^x\cdot 4^x}=\sqrt{12^x}$

$3^2+4^2=5^2$

$\frac{3^x+4^x}{5^x}$ vs 1

$(0,6)^x+(0,8)^x$ vs 1

убыв. ф-ия, равенство при.

Далее вернуться к t и к x

$\frac{16}{3}\leq a\leq -\frac{8}{3}$

$\frac{11}{3}\leq b\leq\frac{16}{3}$

$-\frac{16x}{3}\leq ax+b\leq -\frac{8}{3}x+\frac{16}{3}$

$-\frac{8}{3}x+\frac{16}{3}\leq -32x^2+36x-3$

$\frac{11}{3}\leq b\leq\frac{16}{3}$

$11\leq 3b\leq 16$

$12\leq 5a+4b\leq 16$

$-1\leq -a-b\leq 0$

$0\leq a+b\leq 1$

$3\leq\frac{a}{4}+b\leq 4$

$2\leq -\frac{3}{4}a\leq 4$

$-\frac{16}{3}\leq a\leq -\frac{8}{3}$

$a+b\leq 1$

$\frac{16(x-1)}{4x-5}\leq ax+b\leq -32x^2+36x-3$

$32x^2+(36+a)x$

$4x-5\geq 0$

$0\leq -32x^2+(36+a)x+b+3\leq 0$

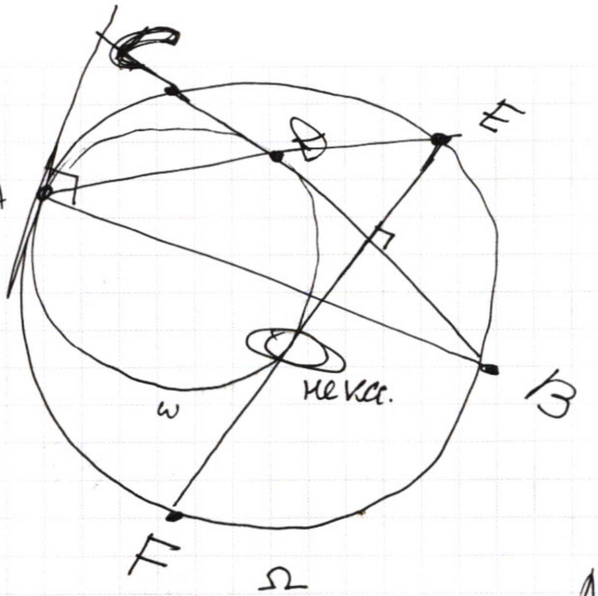
$(ax+b)(4x-5)\geq 16x-16$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 6

(Нумеровать только чистовики)



r, R — ?

$\angle AFE$ — ?

S_{AEF} — ?

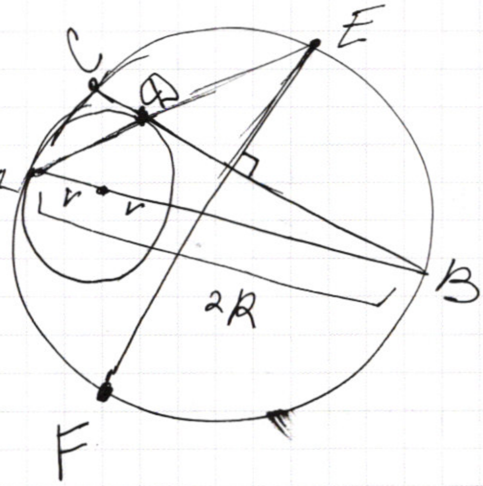
$CD = \frac{15}{2}$

$BD = \frac{17}{2}$

$AD \cdot DE = \frac{15 \cdot 17}{4}$

AB - диаметр.

$272 \,|\, 17 = 16$



$(2R)^2 = 17^2 \cdot 4$

$2R = 17 \cdot 2$

$R = 17$

$(2R)^2 = \frac{17 \cdot 272}{4}$

$(2R)^2 = \frac{17}{2} \cdot \left(\frac{15^2 + 15}{2} + 16\right)$

$(2R)^2 = \frac{17}{2} \cdot \left(\frac{15^2 + 15 + 32}{2}\right)$

$(2R)^2 =$

$(2R - 2r)(2R + \cancel{2R}) = BD^2$

$4(R^2 - r^2) = \frac{17^2}{4}$

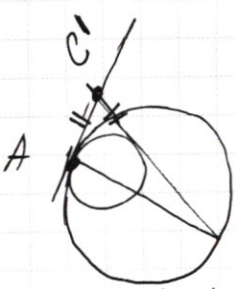
$R^2 - r^2 = \frac{17^2}{4^2}$

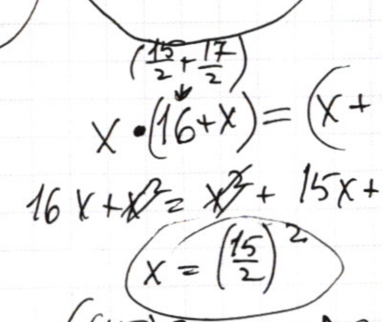
$R = 17$

$17^2 - \frac{17^2}{4^2} = r^2$

$17^2 - \frac{17^2}{16} = \frac{15 \cdot 17^2}{16}$

$\frac{15 \cdot 17^2}{16} = r^2$





$ab = CD^2$

$(a+b)^2 + BC^2 = 4R^2$

$(AC')^2 = C'D \cdot DB$

$AC' = C'D$

$(2R)^2 + (AC')^2 =$

$x \cdot (\underset{\left(\frac{15}{2} + \frac{17}{2}\right)}{16} + x) = \left(x + \frac{15}{2}\right)^2$

$16x + \cancel{x^2} = \cancel{x^2} + 15x + \frac{225}{4}$

$x = \left(\frac{15}{2}\right)^2$

$(2R)^2 + \left(\left(\frac{15}{2}\right)^2 + \frac{15}{2}\right)^2 = \left(\left(\frac{15}{2}\right)^2 + 16\right)^2$

$(2R)^2 = \left(\cancel{\left(\frac{15}{2}\right)^2} + 16 - \cancel{\left(\frac{15}{2}\right)^2} - \frac{15}{2}\right)\left(\left(\frac{15}{2}\right)^2 \cdot 2 + 16 + \frac{15}{2}\right)$

№2 $x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}$ 6 $y^2-y+\frac{1}{4}$

$x^2+36y^2-12x-36y=45$

$(x^2-12x+36)+(36y^2-36y+9)=45+45$

$(x-6)^2+(6y-3)^2=90$ $(x-6)(2y-1)$

$x-12y=x-6-12y+6=$

$\cancel{x^2-24xy+144y^2=2xy+12y-x+6}$

$\cancel{(x-6)(2y-1)}$

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{(x-6)(2y-1)} \\ (x-6)^2+4(2y-1)^2=90 \end{cases}$$

$=\underbrace{x-6}_{t}-6\underbrace{(2y-1)}_{m}$

$tm\geq 0$

$$\begin{cases} t-6m=\sqrt{tm} \\ t^2+4m^2=90 \end{cases}$$ $t-6m\geq 0$ $$\begin{cases} t^2-12tm+36m^2=tm \\ t^2+4m^2=90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^2-13tm+36m^2=0 \\ t^2+4m^2=90 \end{cases}$$ $\alpha^2-13\alpha+36=0$ $\alpha=\frac{t}{m}=$

$169-\underbrace{36\cdot 4}_{144}=25$

$\frac{13\pm 5}{2}$ $9;4$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} t=4m \\ t=9m \end{array}\right. \\ t^2+4m^2=90 \text{ — дорешать.} \end{cases}$$

$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4}\geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$ ОДЗ: $10x-x^2>0$

$10x+(10x-x^2)^{\log_3 4}\geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

$(10x-x^2)+(10x-x^2)^{\log_3 4}\geq 5^{\log_3(10x-x^2)}$.

$t=10x-x^2>0$.

$t+t^{\log_3 4}\geq 5^{\log_3 t}$ $3^{\log_3 5\cdot\log_3 t}=$

$t+t^{\log_3 4}\geq t^{\log_3 5}$ $=t^{\log_3 5}$

$f(t)=t+t^{\log_3 4}-t^{\log_3 5}$ $f'(t)=1+\log_3 4\cdot t^{\log_3 4-1}-\log_3 5\cdot t^{\log_3 5-1}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница № 7

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N11

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$2\sin\frac{4\alpha+4\beta}{2}\cdot\cos 4\beta = -\frac{2}{5}$

$\cancel{2}\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 4\beta = -\frac{\cancel{2}1}{5}$

$-\frac{1}{\sqrt{5}}\cos 4\beta = -\frac{1}{5}$

$\cos 4\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$tg\alpha$ – ? не мен. 3

$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$tg 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}\sin 2\alpha}$

$tg 2\alpha = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha} = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

$2\cos^2 2\beta - 1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$2\cos^2 2\beta = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}}$

$\cos 2\beta = \pm\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}$

$tg 2\alpha\cdot\cos 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}\sin 2\alpha} - \sin 2\beta$

$1-2\sin^2\beta$

$$\begin{cases}\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}\\ 2\cos^2 2\beta - 1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad (2к.)\\ 1-2\sin^2 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad (2к.)\end{cases}$$

$12-3b \le a+b \le 16-3b$

Найдем $\sin 2\alpha$; $\cos 2\alpha \Rightarrow tg 2\alpha \Rightarrow tg\alpha$.

$\frac{16m-16}{4m-5}$

$12 \le a+4b \le 16$

$0 \le a+b \le 1$

$4 \le b \le 5$