МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2}, \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4. \end{cases}$$

17 17

2 ; 3 -18

12 27

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 27$, $3 \leqslant y \leqslant 27$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geqslant ax+b \geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1; 3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR = 2$, $QS = 1$, $PS = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3. Решите неравенство:

1) $3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2 \Leftrightarrow$

$3^{\log_4(x^2+6x)} \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - (x^2+6x)$

Т.к. есть ~~это~~ степень $\log_4(x^2+6x)$, то $x^2+6x>0$ ~~$\Rightarrow$ замена: $x^2+6x=t$, $t>0$~~

~~$4^{x^2+6x} > 4^0 = 1$, т.к. 4^x - возр. ф-на $\mathbb{R}$ $x \in \mathbb{R} \Rightarrow$~~

~~3^t~~ $3^{\log_4 t}$ ~~Замена: $4^{x^2+6x} = t, t>1$~~

$3^{\log}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ являющегося решением ур-ия

$\exists t \in \mathbb{R}$: $4^t = x^2+6x$, т.к. $x^2+6x>0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ и явл. корнем

и $4^t > 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$ (и обе функции непрерывны, сверху неогранич.) $\Rightarrow$

Замена: $x^2+6x = 4^t$

$3^{\log_4 4^t} \geq 4^{t \cdot \log_4 5} - 4^t \Leftrightarrow$

$3^t \geq 5^t - 4^t$

2) Рассм. знач. частей неравенства при $t<0$

~~$3^t>0$ при $t<1$ как степенная ф, которая~~, ~~т.к. $3^t>0$ $\forall t \in \mathbb{R}$~~

$3^t = \frac{1}{3^{-t}}$ ~~, $t<0 \Rightarrow -t>0 \Rightarrow$~~ >0 $\forall t \in \mathbb{R}$

$5^t - 4^t = \frac{1}{5^{-t}} - \frac{1}{4^{-t}}$; $-t>0 \Rightarrow$ т.к. $5^{-t} > 4^{-t} > 0$ при $t<0$, то

$0 < \frac{1}{5^{-t}} < \frac{1}{4^{-t}} \Rightarrow \frac{1}{5^{-t}} - \frac{1}{4^{-t}} < 0$ при $t<0 \Rightarrow$

при $t \in (-\infty; 0)$ $3^t \geq 5^t - 4^t$ справедливо, т.к.

$5^t - 4^t < 0 < 3^t$

3) $3^t \geq 5^t - 4^t \Leftrightarrow 3^t + 4^t \geq 5^t$ при $t=0$; $3+4 \geq 5$ верно.

Пусть $f(x) = 3^t + 4^t$; $g(x) = 5^t$, $t \geq 0$

$f'(t) = \ln 3 \cdot 3^t + \ln 4 \cdot 4^t$

$g'(t) = \ln 5 \cdot 5^t$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Докажем, что начиная с некоторого t' $\forall t \in \mathbb{R}_+$ $t \geq t'$

$g'(t) \geq f'(t)$

$\ln 5 \cdot 5^t \geq \ln 3 \cdot 3^t + \ln 4 \cdot 4^t$

$\ln 5 > \ln 3 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^t + \ln 4 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^t$

$\ln 5 > \ln 3^{\left(\frac{3}{5}\right)^t} + \ln 4^{\left(\frac{4}{5}\right)^t}$

$\ln 5 > \ln\left(3^{\left(\frac{3}{5}\right)^t} \cdot 4^{\left(\frac{4}{5}\right)^t}\right)$

$\frac{3}{5} < 1$ и $\frac{4}{5} < 1 \Rightarrow y_1 = \left(\frac{3}{5}\right)^t$ и $y_2 = \left(\frac{4}{5}\right)^t$ – уб. ф. на $\mathbb{R}_+ \Rightarrow$

т.к. 3^x и 4^x – возр. ф., то $3^{y_1(t)}$ и $4^{y_2(t)}$ – уб. ф. как

композиция возр. и уб. функций $\Rightarrow$ т.к. $y = \ln x$ – возр. ф. на пр. $x \in \mathbb{R}_+$, то соответственно $y = \ln(3^{y_1(t)} \cdot 4^{y_2(t)}) = \ln 3^{y_1(t)} + \ln 4^{y_2(t)}$ – уб. функция как сумма двух уб. функций, которые явл. композицией уб. и возр. ф. $\Rightarrow$

$\ln\left(3^{\left(\frac{3}{5}\right)^t} \cdot 4^{\left(\frac{4}{5}\right)^t}\right)$ – монотонно убывает на $\mathbb{R}_+$, а

а следовательно т.к. $\ln 5 = const$, то $\ln 5 = \ln\left(3^{\left(\frac{3}{5}\right)^t} \cdot 4^{\left(\frac{4}{5}\right)^t}\right)$ имеет не более 1 корня на $t \in \mathbb{R}$ ~~по т. о корне~~ ~~$\Rightarrow$~~ т.к. функция справа монотонна, то после этого корня она будет убыв, то начиная с некоторого t' $g'(t) > f'(t)$ $\forall t \geq t'$ и наоборот при $t < t'$ $g'(t) < f'(t)$

при $t = 0$ $\ln 5 < \ln(3 \cdot 4) = \ln 12 \Rightarrow$ при $t = 0$; $g'(0) < f'(0)$

и $g(0) = 1$; $f(0) = 2$, т.е. $f(0) > g(0) \Rightarrow$ ур-ия вида

$f(x) = g(x)$ имеет не более 1 корня, ~~т.к.~~ действительно на пр. $(-\infty; 0]$ корней нет, т.к. $f(x) > g(x)$. Далее вплоть до $t \leq t'$; $f(t) = f(0) + \int_0^t f'(t)\,dt$

$g(t) = g(0) + \int_0^t g'(t)\,dt$.

По св-ву интеграла и $f'(t) > g'(t)$ на $[a; b] \Rightarrow$

$\int_a^b f'(t)\,dt > \int_a^b g'(t)\,dt$ и $f(0) > g(0) \Rightarrow f(t) > g(t)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~Далее после t' до некоторого x который является корнем, в котором f(x)=g(x)~~ пусть x – первый корень,
~~f(x)=~~ тогда $f(x)=g(x)$ и тогда $x>t'$, но x – тогда единственный корень, т.к. $f(t)=f(x)+\int_x^t f'(x)\,dx$

$g(t)=g(x)+\int_x^t g'(t)\,dt$; $g(x)=f(x)$,

$f'(x)<g'(x) \Rightarrow \int_x^t f'(x)\,dx < \int_x^t g'(x)\,dx \Rightarrow f(t)<g(t)$

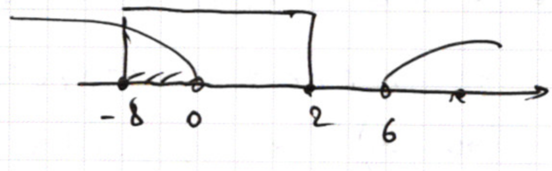
$\forall t>x \Rightarrow$ x – единственный корень, а до него $f(x)\geq g(x)$

При $t=2$ $3^2+4^2=5^2 \Rightarrow$ при $t\leq 2$ $f(t)\geq g(t)$, т.е. верно искомое неравенство $\Rightarrow$ $t\in(-\infty;2] \Rightarrow$

при $t\in(-\infty;2]$ $4^t\in(0;4^2] \rightarrow t\in(0;16]$

Обр. замена: $\begin{cases} x^2+6x>0 \\ x^2+6x\leq 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+6)>0 \\ (x+8)(x-2)\leq 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} x\in(-\infty;0)\cup(6;+\infty) \\ x\in[-8;2] \end{cases}$



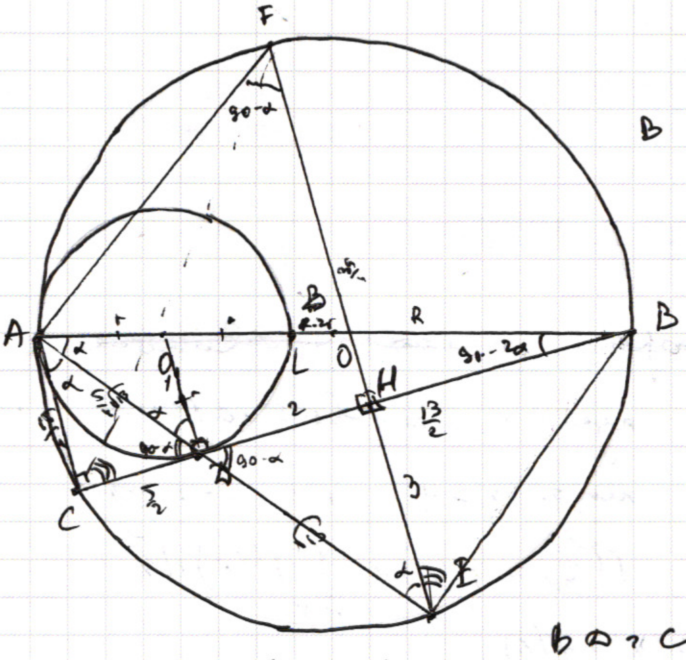
$x\in[-8;0)$

Ответ: $[-8;0)$.

Задача 4.

1) Т.к. точка касания окружностей, то она лежит на одной прямой с т. O и O_1 – центрами Ω и ω соответственно $\Rightarrow O_1\in AB$; D – т. касания прямой BC и $\omega \Rightarrow$ т.к. O_1 – центр ω, то $O_1D\perp BC \Rightarrow \angle O_1DB=90^\circ$; $\angle ACB=90^\circ$ как вписан. угол Ω, опир. на диаметр AB; $AO_1=O_1L=O_1D=r$,

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)



r – радиус ω, а R – Ω соответств.

В $\triangle ACB$, $CB = AB\cdot\cos\angle ABC = AB\cdot\cos\beta$

В $\triangle O_1DB$ $BD = O_1B\cos\angle ABC = O_1B\cdot\cos\beta$

$CB = 2R\cdot\cos\beta$

$BD = O_1B\cdot\cos\beta = (AB - AO_1)\cos\beta = (2R - r)\cos\beta \Rightarrow$

$BC = CD + DB = \frac{5}{2} + \frac{13}{2} = \frac{18}{2} = 9$

$\frac{BD}{CB} = \frac{(2R-r)\cos\beta}{2R\cos\beta} = \left(1 - \frac{r}{2R}\right) = \frac{\frac{13}{2}}{9} = \frac{13}{18} \Rightarrow$

$1 - \frac{r}{2R} = \frac{13}{18}$; $\frac{r}{2R} = \frac{5}{18}$; $\frac{r}{R} = \frac{5}{9}$; $R = 9k$; $r = 5k$

2) Т.к. BD – кас., BA – сек. ω, то $BD^2 = BL\cdot BA$

$BL = AB - AL = 2R - 2r = 2\cdot 9k - 2\cdot 5k = 18k - 10k = 8k$

$AB = 2R = 18k$; $18k\cdot 8k = \left(\frac{13}{2}\right)^2$; $(3\cdot 4\cdot k)^2 = \left(\frac{13}{2}\right)^2 \Rightarrow$

$12k = \frac{13}{2}$; $k = \frac{13}{24}$; $R = 9k = \frac{9\cdot 13}{24} = \frac{39}{8}$; $r = \frac{5\cdot 13}{24} = \frac{65}{24} \Rightarrow$

$R = \frac{39}{8}$; $r = \frac{65}{24}$

3) Пусть $\angle$ ~~$BAC = \alpha$~~, то $\angle BAD = \alpha$, тогда $O_1A = O_1D \Rightarrow \angle O_1AD = \angle O_1DA = \alpha \Rightarrow \angle ADC = 90° - \angle ADO_1 = 90° - \alpha \to \angle CAD = 180° - \angle ACD - \angle ADC = 180° - 90° - (90° - \alpha) = \alpha \Rightarrow \angle BAC = 2\alpha \Rightarrow \angle ABC = 90° - \angle BAC = 90° - 2\alpha$, т.к. $\angle C = 90° \Rightarrow \angle AFE = \frac{\cup AE}{2}$ по св. впис. уг. $\Rightarrow$

$\angle AFE = \frac{\cup AC}{2} + \frac{\cup CE}{2}$; $\frac{\cup CE}{2} = \angle CAE = \alpha$; $\frac{\cup AC}{2} = \angle ABC = 90° - 2\alpha$

$\Rightarrow \angle AFE = 90° - 2\alpha + \alpha = 90° - \alpha$

В $\triangle ACB$ $\sin 2\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{BD + DC}{2R} = \frac{9}{\frac{39}{8}\cdot 2} = \frac{9}{\frac{39}{4}} = \frac{36}{39} = \frac{12}{13}$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{12}{13}$; $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{6}{13}$; $\cos\alpha = \cancel{\cos}\ \sin(90° - \alpha)$

$\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sin\alpha, \cos\alpha > 0 \Rightarrow$ ~~$\cos\alpha\sqrt{\cos^2\alpha - 1}$~~ $\cos\alpha\sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \frac{6}{13}$

$\cos^2\alpha\,(1 - \cos^2\alpha) = \frac{36}{169}$;

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Замена: $\cos^2\alpha = t, t>0$ $\quad t(1-t)=\frac{36}{169}$; $t-t^2=\frac{36}{169}$; $t^2-t+\frac{36}{169}=0$

$D = b^2-4ac = 1-\frac{4\cdot 36}{169} = \frac{169-144}{169} = \frac{5^2}{13^2}$;

$t = \dfrac{1\pm\frac{5}{13}}{2}$ $\quad \left[\begin{array}{l} t=\frac{\frac{18}{13}}{2}, \\ t=\frac{4}{13}; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{9}{13} \\ t=\frac{4}{13}! \end{array}\right.$

$0<2\alpha<\frac{\pi}{2}; 0<\alpha<\frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos^2\alpha > \cos^2\frac{\pi}{4} > \frac{1}{2} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{9}{13} \Rightarrow$

$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$; $\cos\alpha = \sin(90-\alpha) \Rightarrow \angle AFE = \arcsin(\cos\alpha) =$

$= \arcsin\left(\frac{3\sqrt{13}}{13}\right)$.

4) $AC = \sqrt{AB^2-BC^2} = \sqrt{(2R)^2-BC^2} = \sqrt{\left(\frac{39}{4}\right)^2-9^2} = \sqrt{\frac{39-36}{4}\cdot\frac{39+36}{4}} = \sqrt{\frac{3\cdot 75}{4^2}} =$

$= \sqrt{\frac{3^2\cdot 5^2}{4^2}} = \frac{3\cdot 5}{4} = \frac{15}{4}$

В $\triangle AEB$ ($\angle E = 90°$) т.к. опир. на диаметр AB Ω. $\Rightarrow$

$AE = AB\cdot\cos\alpha = 2R\cdot\cos\alpha = \frac{39}{4}\cdot\frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{9\sqrt{13}}{4}$

В $\triangle ACD$; $AC^2+CD^2=AD^2$; $AD = \sqrt{\frac{225}{16}+\frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{325}{16}} = \sqrt{\frac{13\cdot 25}{16}} =$

$= \frac{5\sqrt{13}}{4}$; $DE = AE-AD = \frac{9\sqrt{13}}{4}-\frac{5\sqrt{13}}{4} = \sqrt{13}$

В $\triangle DHE$; $DH = DE\cdot\cos(90-\alpha) = DE\cdot\sin\alpha = \sqrt{13}\cdot\frac{2}{13}\sqrt{13} = 2$

$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{9\cdot 13}{169}} = \sqrt{\frac{13}{169}(13-9)} = \frac{2}{13}\sqrt{13}$

5) $\triangle CHF \sim \triangle EHB$ по I пр. $\triangle\sim\triangle$ ($\angle H = 90°$ – ~~общий~~ на вертик., $\angle FCH = \angle FCB =$

$= \angle FEB = \angle HEB$ как впис.-у. опир.-на ~~равные~~ одну дугу) $\Rightarrow \frac{CH}{HE} = \frac{HF}{HB}$; $CH = CD+DH = 2{,}5+2 = 4{,}5$

$HB = BD-DH = 6{,}5-2 = 4{,}5$ $\quad H$ – сер. BC

По т. Пифагора для $\triangle DHE$; $DH^2+HE^2=DE^2$; $HE = \sqrt{13-4} = 3$

$\frac{4{,}5}{3} = \frac{HF}{4{,}5}$; $HF = 1{,}5\cdot 4{,}5 = \cancel{6{,}7}\ 6+0{,}75 = 6{,}75$; т.к. H – сер. BC, то FE – серпер. $\Rightarrow$ содержит все т. равноуд. от концов B и $C \Rightarrow$ т.к. $B, C \in \Omega \Rightarrow O \in EF$, т.к. $BO = OF$ $\Rightarrow$

EF - диаметр $\Rightarrow EF = 2R = \frac{39}{4}$

$AF = FE \cdot \cos(90-\alpha) = FE \cdot \sin\alpha = \frac{39}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{13}}$

$AE = FE \cdot \sin(90-\alpha) = FE \cdot \cos\alpha = \frac{39}{4} \cdot \frac{3}{\sqrt{13}}$

$S_{\triangle AFE} = \frac{1}{2} AF \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot \frac{39}{4} \cdot \frac{39}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} =$

$= \frac{39^2 \cdot 3}{16 \cdot 13} = \frac{\cancel{9 \cdot 13}}{16}\ ; = \frac{13^2 \cdot 3^3}{16 \cdot 13} = \frac{27 \cdot 13}{16} = \frac{270+81}{16} = \frac{351}{16}$ $3 \cdot 3 \cdot 13$

≈ 20 $\quad \frac{351}{16} = 21\frac{15}{16}$

Ответ: $R = \frac{39}{8}$; $r = \frac{65}{24}$; $\arcsin \frac{3\sqrt{13}}{24}$; $\frac{351}{16}$ $21\frac{15}{16}$

№2. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2}, \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3(x-1)(y-\frac{2}{3})} \\ 3(x-1)^2 - 3 + 3(y-\frac{2}{3})^2 - 3 \cdot \frac{4}{9} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3(x-1)(y-\frac{2}{3})} \\ 3(x-1)^2 + 3(y-\frac{2}{3})^2 = 7 + \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3(x-1)(y-\frac{2}{3})} \\ 3(x-1)^2 + 3(y-\frac{2}{3})^2 = \frac{25}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3(x-1)(y-\frac{2}{3})} \\ (x-1)^2 + (y-\frac{2}{3})^2 = \frac{25}{9} \end{cases}$$

Замена: $x - 1 = a$; $y - \frac{2}{3} = b$

$$\begin{cases} 3b - 2a = \sqrt{3ab}, \\ a^2 + b^2 = \frac{25}{9} \end{cases}$$

Рассмотрим $3b - 2a = \sqrt{3ab} \Leftrightarrow \begin{cases} (3b-2a)^2 = 3ab, \\ 3b - 2a \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 9b^2 + 4a^2 - 12ab = 3ab, \\ b \geq \frac{2}{3}a \end{cases} \qquad \begin{cases} 9b^2 - 15ab + 4a^2 = 0 \\ b \geq \frac{2}{3}a \end{cases}$$

$9b^2 - 15ab + 4a^2 = 0$

$D = 225a^2 - 4a^2 \cdot 4 \cdot 9 = 225a^2 - 144a^2 = 81a^2$

$b = \frac{15a \pm 9a}{18}$; $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = \frac{1}{3}a \\ b = \frac{4}{3}a \end{array} \right.$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} b = \frac{1}{3}a \\ b = \frac{4}{3}a \end{array} \right. \\ b \geq \frac{2}{3}a \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a < 0 \\ b = \frac{1}{3}a \end{cases} \\ \begin{cases} a \geq 0 \\ b = \frac{4}{3}a \end{cases} \end{array} \right.$$

Вернёмся в систему

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a<0,\\ b=\frac{1}{3}a,\end{cases}\\ \begin{cases}a\ge 0,\\ b=\frac{4}{3}a,\end{cases}\end{array}\right.\\ a^2+b^2=\frac{25}{9};\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a<0\\ b=\frac{1}{3}a,\\ a^2+\frac{a^2}{9}=\frac{25}{9};\end{cases}\\ \begin{cases}a\ge 0\\ b=\frac{4}{3}a,\\ \frac{16}{9}a^2+a^2=\frac{25}{9};\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a<0\\ b=\frac{1}{3}a,\\ 10a^2=25;\end{cases}\\ \begin{cases}a\ge 0\\ b=\frac{4}{3}a\\ a^2=1\end{cases}\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a<0\\ b=\frac{1}{3}a,\\ a=\pm\frac{\sqrt{10}}{2},\end{cases}\\ \begin{cases}a\ge 0,\Leftrightarrow\\ b=\frac{4}{3}a,\\ a=\pm 1,\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a<0\\ b=-\frac{\sqrt{10}}{6},\\ a=-\frac{\sqrt{10}}{2},\end{cases}\\ \begin{cases}a\ge 0\\ a=1,\\ b=\frac{4}{3};\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=-\frac{\sqrt{10}}{2},\\ b=-\frac{\sqrt{10}}{6};\end{cases}\\ \begin{cases}a=1,\\ b=\frac{4}{3};\end{cases}\end{array}\right.$$

Обр. замена.
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-1=-\frac{\sqrt{10}}{2},\\ y-\frac{2}{3}=-\frac{\sqrt{10}}{6},\end{cases}\\ \begin{cases}x-1=1,\\ y-\frac{2}{3}=\frac{4}{3};\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\frac{2-\sqrt{10}}{2}\\ y=\frac{4-\sqrt{10}}{6}\end{cases}\\ \begin{cases}x=2\\ y=\cancel{2}2\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $\left(\frac{2-\sqrt{10}}{2};\ \frac{4-\sqrt{10}}{6}\right)$; $(2;2)$.

Задача №1.

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=2\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right)=$

$=2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta)=-\frac{8}{17}$

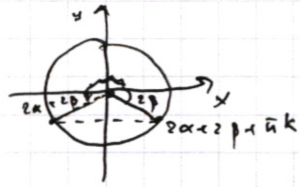
$2\cdot\frac{(-1)}{\sqrt{17}}\cdot\cos(2\beta)=-\frac{8}{17}$

$\cos 2\beta=\frac{4}{\sqrt{17}}$; $|\sin 2\beta|=\sqrt{1-\cos^2 2\beta}\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2\beta=\sqrt{1-\frac{16}{17}}\\ \sin 2\beta=-\sqrt{1-\frac{16}{17}};\end{array}\right.\Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l}\sin 2\beta=\frac{1}{\sqrt{17}},\\ \sin 2\beta=\frac{-1}{\sqrt{17}};\end{array}\right.$ ~~$\sin(2\alpha+2\beta)$~~

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Если $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow$ т.к. $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow$



$$\left[\begin{array}{l} 2\alpha+2\beta = 2\beta+\cancel{\pi}2\pi k, k\in\mathbb{Z} \\ 2\alpha+2\beta = \pi-2\beta+2\pi m, m\in\mathbb{Z} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \alpha=\pi k, k\in\mathbb{Z} \\ \cancel{2}\alpha = \frac{\pi}{2}-2\beta+\pi m, m\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Если $\alpha=\pi k$, то $tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin(\pi k)}{\cos(\pi k)} = 0 \ \forall k\in\mathbb{Z}$

Если $\alpha = \frac{\pi}{2}-2\beta$, то $tg(\alpha) = \cancel{tg\ \cos}\ \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-2\beta)}{\cos(\frac{\pi}{2}-2\beta)} =$

$= \frac{\cos 2\beta}{\sin 2\beta} = \frac{\frac{4}{\sqrt{17}}}{\frac{-1}{\sqrt{17}}} = -4$

Если $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$, то т.к. $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} = -\sin 2\beta$, то

$$\left[\begin{array}{l} 2\alpha+2\beta = -2\beta+2\pi k, k\in\mathbb{Z} \\ 2\alpha+2\beta = \pi+2\beta+2\pi m, m\in\mathbb{Z}; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha=-2\beta+\pi k, k\in\mathbb{Z}, \\ \alpha=\frac{\pi}{2}+\pi m, m\in\mathbb{Z}; \end{array}\right.$$

Если $\alpha=\frac{\pi}{2}+\pi m$, то $\cos\alpha=0 \Rightarrow tg\,\alpha$ не определён; не подх.

Если $\alpha=-2\beta+\pi k, k\in\mathbb{Z}$, то $tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin(-2\beta+\pi k)}{\cos(-2\beta+\pi k)} =$

$= -\frac{\sin(2\beta-\pi k, \cancel{k\in\mathbb{Z}})}{\cos(2\beta-\pi k)}$, при ~~увелич.~~ переходе от $k \to k+1$

в аргументе тригон. ф. обе функции меняют знак $\Rightarrow$

$tg\,\alpha = \frac{-\sin 2\beta}{\cos 2\beta} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{17}}}{\frac{4}{\sqrt{17}}} = -\frac{1}{4}$

Ответ: $0; -4; -\frac{1}{4}$.

№6. Найдите все пары чисел такие, что $\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$ выполнено $\forall x\in[1;3]$

1) $f(x) = \frac{4x-3}{2x-2}$; $g(x) = 8x^2-34x+30 \Rightarrow \forall x\in(1;3]$

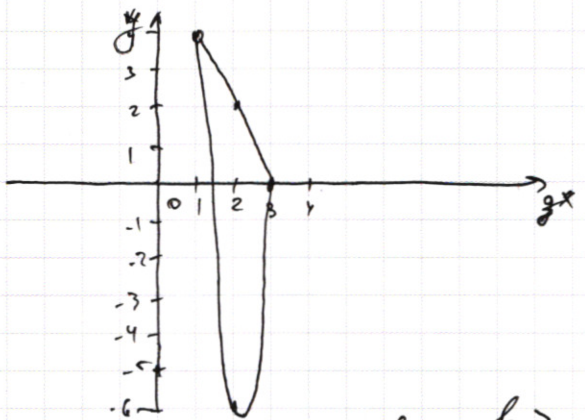
$f(x) \geq \cancel{g}\ ax+b \geq g(x)$

$g(x)$ – квадр. ф., гр явл. парабола, ветви вверх

$x_{верш} = \frac{34}{16} \Rightarrow$ наим. зн. в вершине $\Rightarrow$ наименьшее зн. в между $x=2$ и $x=3$; $g(x)$ – выпуклая ~~вверх~~ ф. $\Rightarrow$ если выполнено для прямой, соед. её две крайние точки, то верно и условие для всей функции $g(x)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

x	g(x)
1	4
2	−6
3	0



⇒ $ax+b \geq$ лежит ~~выше~~, т.е. не ниже, чем на отр. (1;3) ∃ если ∀ т. прямой, соед. (1;4) и (3;0) или

~~$kx+b \geq 6-2x$~~

~~Пусть мы рассмотрим прямую вида $ax+b$, где $a=k$, выразим b как функцию от k.~~

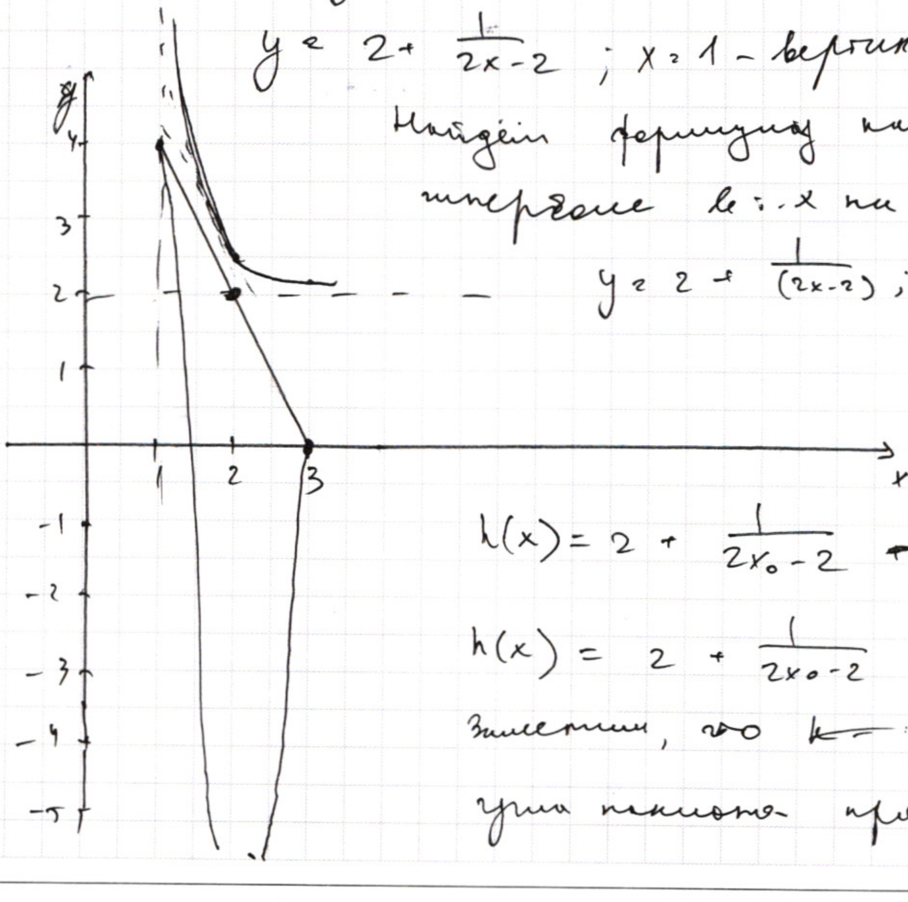
kx ~~$+b \geq 6-2x$~~ ; ~~$(k+2)x \geq 6-b$~~ , ~~$b \geq 6-(k+2)x$~~

b ~~≥ max~~ (

$y = \frac{4x-3}{2x-2}$ — др.-лин. ф., гр. явл. гиперболой

$y = 2 + \frac{1}{2x-2}$; $x=1$ — вертик. асимпт, $y=2$ — гор. асимпт

Найдём формулу касательной к гиперболе в т. x на пр. (1;3]



$y = 2 + \frac{1}{(2x-2)}$; ~~y'~~ $y = 2 + \frac{1}{2(x-1)}$

$y' = \frac{-1}{2(x-1)^2}$

$h(x) = f(x_0) + y'(x-x_0)$

$h(x) = 2 + \frac{1}{2x_0-2} - \frac{1}{2(x_0-1)^2}(x-x_0)$

$h(x) = 2 + \frac{1}{2x_0-2} - \frac{x-x_0}{(2x_0-2)(x_0-1)}$

Заметим, что ~~k~~ — a — тангенс угла наклона прямой ограничен пересечения гиперболы и отрезка, соединяющего ~~его~~ концы параболы.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$4x-3 \geq (ax+b)(2x-2) = 16x^3 - 68x^2 + 60x - 16x^2 + 64x - 60$

$16x^3 - 84x^2 + 124x - 60.$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$2\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\left(\cancel{\sin}\cdot\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right)\right) = -\frac{8}{17}$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta) = -\frac{8}{17}$

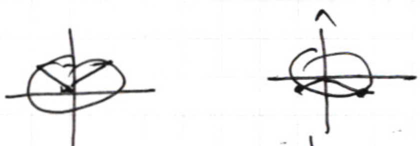
$-\frac{2}{\sqrt{17}}\cos(2\beta) = -\frac{8}{17}$, $\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$

если $\sin 2\beta > 0$.

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = 2\left(\sin\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2} + \sin\frac{y}{2}\cos\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2} + \sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\right)$

$= 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\left(\cos^2\frac{y}{2} + \sin^2\frac{y}{2}\right) + \cos^2\frac{x}{2}\, 2\sin\frac{y}{2}\cos\frac{y}{2} + \sin^2\frac{x}{2}\, 2\sin\frac{y}{2}\cos\frac{y}{2}$



$\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cos^2$ $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$; $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$. $2\alpha = 2\pi k$

$\sin$ $\sin 2\beta = 2\delta$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases} ; \quad \begin{cases} y \geq \frac{2}{3}x \\ 9y^2+4x^2-12xy = 3xy-2x-3y+2 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9y^2+4x^2-12xy = 3xy-2x-3y+2 \\ 3(x-1)^2-3+3(y-\frac{2}{3})^2-3\cdot\frac{4}{9}=4 \end{cases}$$

$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 2\sin\frac{y}{2}\cos\frac{y}{2}$

$= 2\sin\frac{x+y}{2}\left(\cos\frac{x+y}{2}\right)$

$= 2\left(\sin\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2} - \sin\frac{y}{2}\cos\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2} - \right.$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$a \quad 2+\frac{1}{2x-2} \quad \left(4\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\right)$

$\sin(2\alpha+2\beta)+\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha =$

$= 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos\beta + \sin 2\alpha$

$= \left(\sin\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2} - \sin\frac{y}{2}\cos\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2} - \sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\right)$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha - \sin(2\alpha+2\beta) = 2\sin(2\alpha)\cos\beta(2\alpha-3\beta)$

$\sin(2\alpha+4\beta) = \sin(2\alpha+2\beta)\cdot\sin 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta + \sin 2\alpha$

$= -\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\sin 2\beta$

$\sin(2\alpha+2\beta) = 2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta) = 2\sin(\alpha+2\beta)\cos(\alpha+2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$3y-2x = \sqrt{3(x-1)(y-\frac{2}{3})}$

$(x-1)^2+(y-\frac{2}{3})^2 = \frac{25}{9}. \qquad a^2+b^2=\frac{25}{9}$

$\frac{(3y-2x)^2}{3} = (x-1)(y-\frac{2}{3}) \qquad \frac{(3b-2a)^2}{3} = ab$

$3b-2a \qquad (3b-2a)^2 = 3ab$

$9b^2+4a^2-12ab = 3ab$

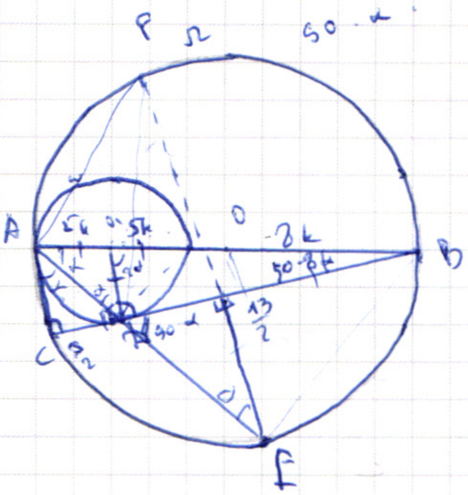
$9b^2+4a^2-15ab = 0.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$BC = 9$

$\sin 2\alpha = \dfrac{9}{\frac{90}{24}\cdot 2}$

$\sin 2\alpha = \dfrac{9}{\frac{90}{12}}$

$(R - 2r)\cos\beta = 6{,}5$

$R \cdot \cos\beta = 9$

$\dfrac{R-r}{R} = \dfrac{6{,}5}{9} = \dfrac{13}{18}$

$\dfrac{R-r}{R}$ $\quad 1 - \dfrac{r}{R} = \dfrac{13}{18}; \quad \dfrac{r}{R} = \dfrac{5}{18};$

$\left(\dfrac{13}{2}\right)^2 = 8k \cdot 18k$ $\qquad r = 5k;\ R = 18k$

$\left(\dfrac{13}{2}\right)^2 = 16k^2 \cdot 9$

$\left(\dfrac{13}{2}\right)^2 = (12k)^2; \quad \dfrac{13}{2} = 12k; \quad k = \dfrac{13}{24};$ $\boxed{r = \dfrac{65}{24}; \quad R = \dfrac{90}{24}.}$

$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2} \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 \end{cases}$

$3(x-1)^2 + 3\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 - 3 - 3\cdot\frac{4}{9} = 4$

$3(x-1)^2 + 3\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 = \cancel{7 + \frac{4}{3}}\ \frac{25}{3}$

$(x-1)^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}; \ \frac{5}{3}.$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

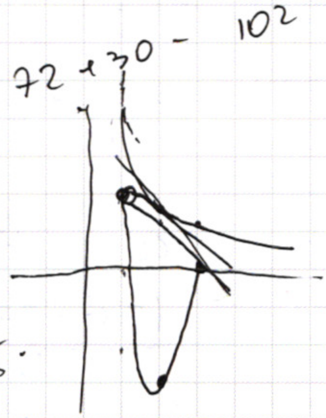
$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$x = 1 \quad 4$

$x = 2 \quad -6$

$x_3 = 3 \quad 0$

$72 + 30 - 102$



$\dfrac{7x-3}{2x-2} = 2 + \dfrac{1}{2x-2}$

$x_1 = 1;\ 2{,}5$

$x_3 = 2{,}25.$

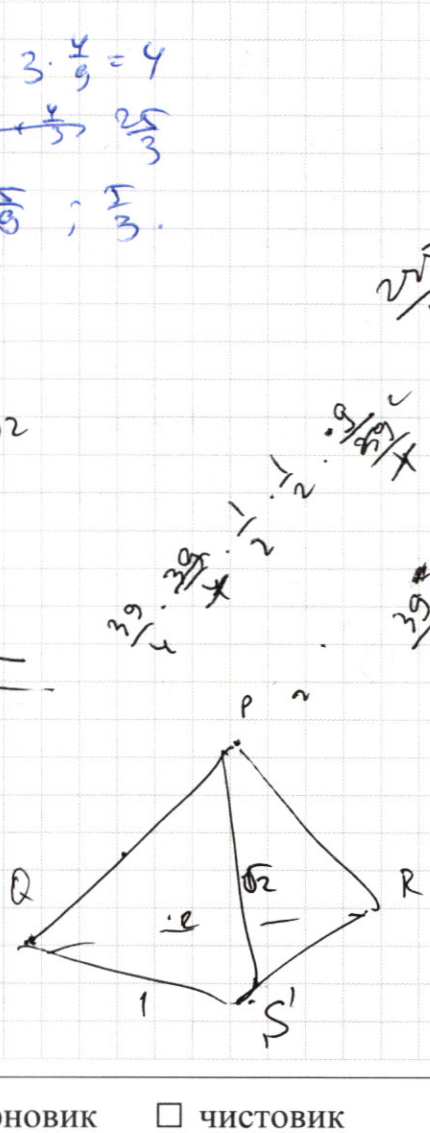
$\frac{3\sqrt{5}}{26} \cdot \frac{2\sqrt{13}\cdot\sqrt{5}}{34}$

$\frac{2\sqrt{5}}{16} \cdot \frac{\sqrt{5}}{4} = \frac{3\sqrt{5}}{16}$

$\frac{39}{4} \cdot \frac{39}{\cancel{4}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{39}{\cancel{4}}$

$\frac{39}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \cancel{\frac{39}{4}}$

$\frac{39 \cdot 9}{16}$



☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$; $2\sin(\alpha+2\beta)\cos(\alpha+2\beta)+2\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{8}{17}$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$

$3^{\log_4(x^2+6x)} \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - (x^2+6x)$

Замена: $x^2+6x = t$, $t>0$; $t = (x+3)^2-9$

$3^{\log_4 t} \geq t^{\log_4 5} - t$

$4^{\log_4 3 \log_4 t} \geq t^{\log_4 5} - t$

$t^{\log_4 3} \geq t^{\log_4 5} - t$

$t \geq t^{\log_4 5} - t^{\log_4 3}$

$1 \geq t^{\log_4 1,25} - \log_4 t^{\log_4 \frac{3}{4}}$

$t \geq t^{\log_4 3}\left(\log_4 \frac{5}{3}\ t^{\frac{\log_4 5}{\log_4 3}} - 1\right)$

$t \geq t^{\log_4 3}\left(\cancel{\log}\left(t^{\log_3 5} - 1\right)\right)$

$3^{\log_4 t} \geq t^{\log_4 5} - t$; $t = 16$

$9 \geq 4^{2\log_4 5}$

$f(t) = t^{\log_4 5} - t$; $f'(t) = \log_4 5 \cdot t^{\log_4 5 - 1} - 1$

$g(t) = 3^{\log_4 t} = t^{\log_4 3 \log_4 t} = t^{\log_4 3}$

$g'(t) = \log_4 3 \cdot t^{\log_4 3 - 1}$

$\log_4 3 \cdot \frac{t^{\log_4 3 + 1}}{t} \vee \log_4 5 \cdot \frac{t^{\log_4 5 + 1}}{t} - 1$

$\log_4 3 \cdot t^{\log_4 3} \vee \log_4 5 \cdot t^{\log_4 5} - t$

$t \vee t^{\log_4 3} / \log_4$

$2 = \sqrt{3 \cdot \frac{1+\frac{16}{9}}{}}$

$3 + 9 \cdot 3^{\frac{25}{9}}$

$4-2 = \sqrt{3 \cdot \frac{4}{3} \cdot 1}$

$3 \cdot 4 + 3 \cdot 3^2 - 12 - 12$

$1+\frac{4}{3}$

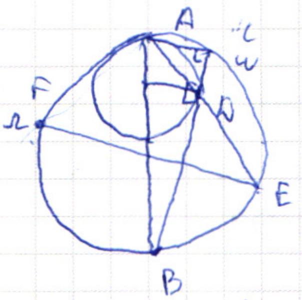
$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

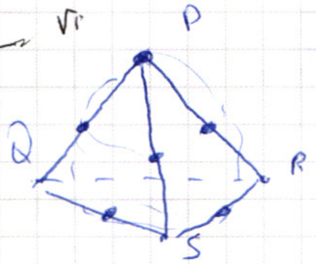
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

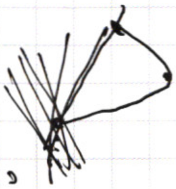
(Нумеровать только чистовики)





$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

$= 2\left(\sin\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2} + \sin\frac{y}{2}\cos\frac{x}{2}\right)\left(\sin\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2} - \sin\frac{y}{2}\cos\frac{x}{2}\right)$



$3^t \geq 4^{t\log_4 5} - 4^t$

$3^t \geq 5^t - 4^t$

$f(t)\ 3^t + 4^t \geq 5^t = g(t)$

$f'(t) = \left(e^{\ln 3\cdot t} + e^{\ln 4\cdot t}\right)' = \ln 3\cdot 3^t + \ln 4\cdot 4^t$

$g'(t) = \ln 5\cdot 5^t$; $\ln 5\cdot 5^t \geq \ln 3\cdot 3^t + \ln 4\cdot 4^t$

$\ln 3\cdot 3^t + \ln 4\cdot 4^t \geq \ln 5\cdot 5^t$

$0{,}6^t \geq 1 - 0{,}8^t$

$0{,}6^t + 0{,}8^t \geq 1$

$\left(0{,}6^{\frac{t}{2}} + 0{,}8^{\frac{t}{2}}\right)^2 - 2\cdot(0{,}6\cdot 0{,}8)^{\frac{t}{2}} \geq 1$

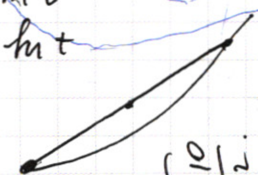
$1 \geq \frac{\ln 3}{\ln 5}\cdot(0{,}6)^t + \frac{\ln 4}{\ln 5}\cdot(0{,}8)^t$

$x^t \ln t$

$t^x \ln t$

$\ln 5 \geq \ln 3^{(0{,}6^t)} + \ln 4^{(0{,}8)^t}$

$\ln 5 \geq \ln\left(3^{0{,}6^t}\cdot 4^{0{,}8^t}\right)$



$5 \geq 3^{0{,}6^t}\cdot 4^{0{,}8^t}$

$\ln 5 \geq 5^{-t} =$

$\ln 3^{0{,}6^t}\cdot 4^{0{,}8^t}$

$\left(3^{3\cdot\frac{t}{5}}\cdot 4^{4\cdot\frac{t}{5}}\right) = \left(3^3\cdot 4^4\right)^{\frac{t}{5}}\ 0{,}2^t$

$\ln 5\cdot 5^{t} \geq \ln(27\cdot 256)$

$t = 25$

5^{25} $\geq \ln$

$3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2}$