МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

① $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ ② $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

② $\sin((2\alpha+2\beta)+2\beta) + \sin((2\alpha+2\beta)-2\beta) = -\frac{8}{17}$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \cancel{\cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta} + \sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta - \cancel{\cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta} = -\frac{8}{17}$

$\underbrace{\sin(2\alpha+2\beta)}_{-\frac{1}{\sqrt{17}}}\cos 2\beta = -\frac{4}{17}$

$\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$ $\sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$ $2\beta \in$ IV четверти

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\beta) = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

1) $\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}} \end{cases}$

у синуса значение осталось то же, а знак поменялся $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2\alpha = \frac{\pi}{2} \\ 2\alpha = \pi \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \alpha = \frac{\pi}{4} \\ \alpha = \frac{\pi}{2} \end{array}\right.$

2) $\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \end{cases}$

Значение синуса осталось то же, а знак не поменялся $\Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2\alpha = 0 \\ 2\alpha = \frac{3\pi}{2} \\ 2\alpha = 2\pi \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \alpha = \frac{3\pi}{4} \\ \alpha = \pi \end{array}\right.$

По условию $\operatorname{tg}\alpha$ – существует $\Rightarrow$ возможные значения α: $\frac{\pi}{4}$; 0; $\frac{3\pi}{4}$; π

$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$ $\operatorname{tg} 0 = 0$ $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4} = -1$ $\operatorname{tg}\pi = 0$

Ответ: 1; 0; −1.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

N2

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} & ① \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 & ② \end{cases}$$

$$\sqrt{3xy-2x-3y+2}=\sqrt{(3y-2)(x-1)}$$

① ⇔

$$\begin{cases} 9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y\geqslant \frac{2}{3} \\ x\geqslant 1 \end{cases} \\ \begin{cases} y\leqslant \frac{2}{3} \\ x\leqslant 1 \end{cases} \end{array}\right. \\ 3y-2x\geqslant 0 \end{cases}$$

$$4x^2+2x-15xy+9y^2+3y-2=0 \qquad 4x^2+x(2-15y)+9y^2+3y-2=0$$

$$D=4-60y+225y^2-16(9y^2+3y-2)=81y^2-108y+36=(9y-6)^2$$

$$x=\frac{(15y-2)\pm\sqrt{(9y-6)^2}}{8} \qquad x_1=3y-1 \qquad x_2=\frac{3}{4}y+\frac{1}{2}$$

1) $x=3y-1$

→ ②

$$3(9y^2-6y+1)-6(3y-1)+3y^2-4y-4=0$$

$$30y^2-40y+5=0$$

$$6y^2-8y+1=0$$

$$D=64-24=40$$

$$y=\frac{8\pm2\sqrt{10}}{12}=\frac{2}{3}\pm\frac{\sqrt{10}}{6}$$

$$y_1=\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{10}}{6} \qquad x_1=1+\frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$y_2=\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{10}}{6} \qquad x_2=1-\frac{\sqrt{10}}{2}$$

2) $x=\frac{3}{4}y+\frac{1}{2}$

$$3\left(\frac{9}{16}y^2+\frac{3}{4}y+\frac{1}{4}\right)-6\left(\frac{3}{4}y+\frac{1}{2}\right)+3y^2-4y-4=0$$

$$\frac{75}{16}y^2-\frac{25}{4}y-\frac{25}{4}=0$$

$$75y^2-100y-100$$

$$3y^2-4y-4=0 \qquad D=16+48=64$$

$$y=\frac{4\pm8}{6}$$

$$y_3=2 \qquad x_3=2$$

$$y_4=-\frac{2}{3} \qquad x_4=0$$

Проверка:

1)

$x_1=1+\frac{\sqrt{10}}{2}>1$ $\qquad 3y-2x=2+\frac{\sqrt{10}}{2}-2-\sqrt{10}=-\frac{\sqrt{10}}{2}<0$ не уд усл

$y_1=\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{10}}{6}>\frac{2}{3}$ $\qquad x_1;y_1$ не подходит

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) $x_2 = 1 - \frac{\sqrt{10}}{2} < 1$ $\quad 3y - 2x = 2 - \frac{\sqrt{10}}{2} - 2 + \sqrt{10} = \frac{\sqrt{10}}{2} > 0$ уд усл

$y_2 = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{10}}{6} < \frac{2}{3}$ $\quad x_2; y_2$ подходит

3) $x_3 = 2 > 1$ $y_3 = 2 > \frac{2}{3}$

$3y - 2x = 6 - 4 = 2 > 0$ уд усл $\quad x_3; y_3$ подходит

4) $x_4 = 0 < 1$ $\quad 3y - 2x = -\frac{6}{2} - 0 < 0$ не уд усл

$y_4 = -\frac{2}{3} < \frac{2}{3}$ $\quad x_4; y_4$ не подходит. ~~Ответ~~:

Ответ: $(2;2); \left(1 - \frac{\sqrt{10}}{2}; \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{10}}{6}\right)$.

N6

$\frac{4x-3}{2x-2} \geqslant ax+b \geqslant 8x^2 - 34x + 30$ $\quad$ верно для $\forall x \in (1;3]$

$y = 8x^2 - 34x + 30$ $\quad y = \frac{4x-3}{2x-2}$

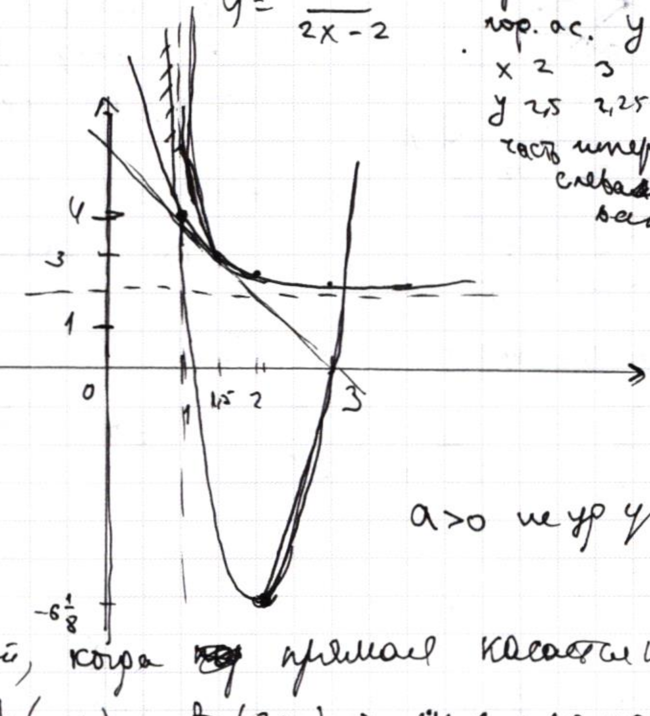
$x_в = \frac{34}{16} = \frac{17}{8}$ $\quad y_в = \frac{-49}{8}$

x	1	3
y	4	0

верт. ас $x = 1$
гор. ас. $y = 2$

x	2	3	1,5
y	2,5	2,25	3

часть гиперболы слева от 1 не важна в задаче



по условию прямая должна ~~[зачёркнуто]~~ на $(1;3]$ быть выше параболы, но ниже гиперболы.

$a > 0$ не уд усл.

рассмотрим крайний случай, когда прямая касается параболы.
Она проходит через т. $A(1;4)$ и $B(3;0)$ => ур-е прямой $y = -2x + 6$
Заметим, что $y(1,5) = 3$ => она касается гиперболы
Также заметим, что при уменьшении a, ~~координата~~

~~прямой в точке $x=3$ будет опускаться гораздо больше чем в~~
изменение координат по оси ординат в точке $x=3$ больше, чем в любой другой на $[1;3]$ => при увеличении b она пересечёт гиперболу и это не будет удовл. усл.

При $a<-2$ часть прямой на $[1;3]$ будет ниже параболы либо пересекать гиперболу.

=> единственно возможный вариант это прямая $y=-2x+6$
$a=-2 \quad b=6$

Ответ: $(-2;6)$.

№3

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$$

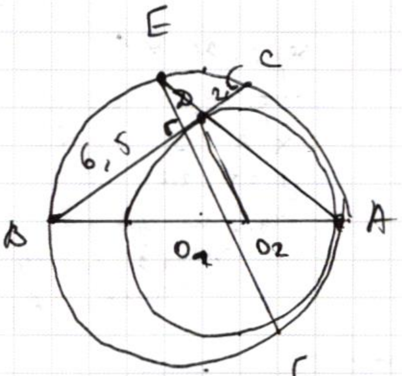
$$x^2+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-3^{\log_4(x^2+6x)} \qquad x^2+6x=t$$

$$t \geq |t|^{\log_4 5}-3^{\log_4(t)} \qquad t>0$$

$$t \geq t^{\log_4 5}-3^{\log_4 t}$$

$$t \geq t^{\log_4 5}-t^{\log_4 3} \qquad t^{\log_4 5}-t^{\log_4 3}-t^{1} \leq 0$$

N.4



O_1 - центр Ω ; R - её радиус
O_2 - центр ω ; r - её радиус
$O_2D \perp BC$ (Кас к радиус сд)

$\angle CBA$
$\angle BCA$ - вписс, опир на диаметр $=90^\circ$
=> $AC \perp BC$

угл и параллельн. секущ. => $O_2D \parallel AC$

$$\frac{BD}{BO_2}=\frac{BC}{AB} \qquad \frac{6,5}{2R-r}=\frac{9}{2R} \qquad 9r=5R$$

$\triangle ABC$
$AC=\sqrt{4R^2-81}$

$324r^2=676R^2-13689$

$576R^2=13689$

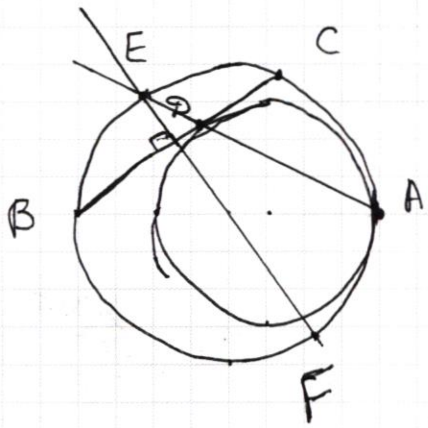
$$\frac{r}{\sqrt{4R^2-81}}=\frac{13}{18}$$

$R=\frac{39}{8}$

$\triangle BDO_2$ и $\triangle BCA$

$$\frac{O_2D}{AC}=\frac{BO_2}{AB} \qquad \frac{r}{AC}=\frac{2R-r}{2R}$$

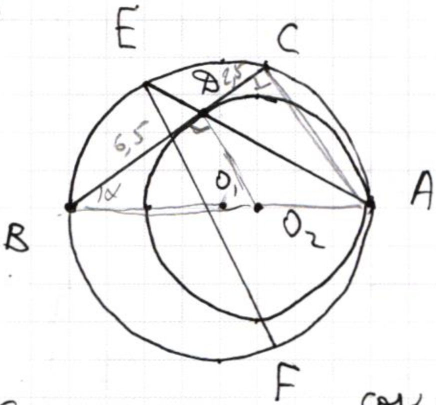
$r=\frac{65}{24}$



$BC = 9$

$BD = 6{,}5$

$CD = 2{,}5$



$\begin{array}{r} \times\,169 \\ 81 \\ \hline 169 \\ +\,1352 \\ \hline 13689 \end{array}$

$13^2 \cdot 9^2$

$\frac{5}{9} \cdot \frac{39}{8}$

$r = \frac{5 \cdot \cancel{39}^{13}}{\cancel{9}_3 \cdot 8} = \frac{65}{24}$

$\angle CBA$

$O_2D \parallel EF$

$\cos\alpha = \frac{9}{2R}$

$\frac{6{,}5}{O_2B} = \frac{9}{AB} = \frac{O_2D}{O_2A} = \frac{2{,}5}{r} \quad \frac{9}{2R} = \frac{2{,}5}{r}$

$\frac{BD}{BO_2} = \frac{CD}{AO_2} \quad \frac{6{,}5}{2R-r} = \frac{2{,}5}{r}$

$6{,}5r = 5R - 2{,}5r$

$9r = 5R$

$\frac{6{,}5}{2R-r} = \frac{9}{2R}$

$13R = 18R - 9r$

$5R = 9r$

$r = \frac{5}{9}R$

$R = \frac{9}{5}r$

$\begin{array}{r} \times\,24 \\ 24 \\ \hline +\,96 \\ 48 \\ \hline 576 \end{array}$

$\frac{O_2D}{AC} = \frac{BO_2}{AB} \quad \frac{r}{AC} = \frac{2R-r}{2R}$

$AC = \sqrt{4R^2 - 81}$

$\frac{r}{\sqrt{4R^2-81}} = \frac{2R-r}{2R}$

$\frac{r^2}{4R^2-81} = \frac{\cancel{4R^2 - 4R + r^2}}{\cancel{4R^2}}$

$\cancel{4R^2 r^2 = 16R^2}$

$\begin{array}{r} \times\,18 \\ 18 \\ \hline +\,144 \\ 18 \\ \hline 324 \end{array} \quad \begin{array}{r} \times\,169 \\ 4 \\ \hline 676 \end{array}$

$\frac{r}{\sqrt{4R^2-81}} = \frac{13}{18}$

$\frac{r^2}{4R^2-81} = \frac{13}{18}$

$52R^2 - 81 \cdot 13 = 18r^2 = \frac{18 \cdot 25}{81 \cdot 9} R^2$

$\frac{50}{9}R^2 - 52R^2 + 81 \cdot 13 = 0$

$\frac{418}{9}R^2 = 81 \cdot 13$

$\frac{r^2}{4R^2-81} = \frac{169}{324}$

$324r^2 = 676R^2 - 13689$

$\frac{324 \cdot 25}{81}R^2 = 676R^2 - 13689$

$100R^2 = 676R^2 - 13689$

$576R^2 = 13689$

$R = \sqrt{\frac{13689}{576}} = \sqrt{\frac{13^2 \cdot 9^2}{24^2}} = \frac{13 \cdot \cancel{9}^3}{\cancel{24}_8} = \frac{39}{8}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$

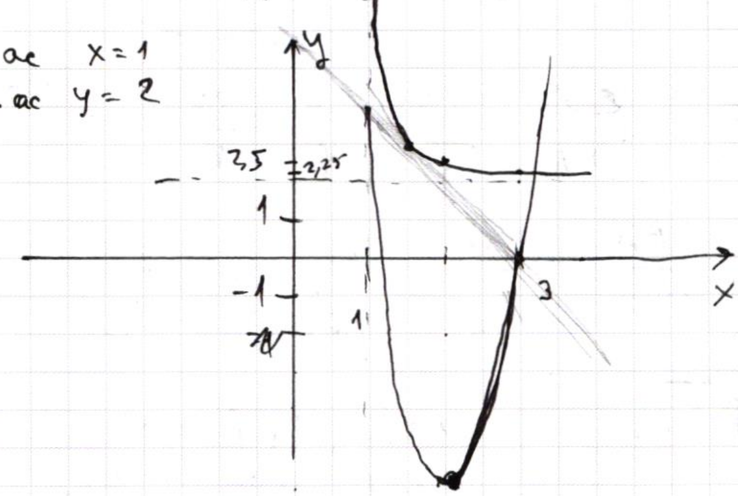
$8x^2-34x+30 \quad x_в = \frac{34}{16} = \frac{17}{8}$

x	1	3
y	4	0

$y_в = \frac{289}{8} - \frac{289 \cdot 2}{8} + 30 = \frac{-289+240}{8} = -\frac{49}{8} = -6\frac{1}{8}$

$y = \frac{4x-3}{2x-2}$ верт ас $x=1$ гор. ас $y=2$

x	2	3	1,5
y	2,5	2,25	3



часть в IV четверти не важна в задаче

$a<0 \Leftrightarrow$

$ax+b$

$y(1)>4$

$y(3)>0$

$ax+b \leq \frac{4x-3}{2x-2}$ $\quad y'(x) \neq y'(x)$

~~ax+b>4~~

$a+b>4$

$-3a+b>0$

$-2a>4$

$a<-2$

$y=-2x+6$

$y(1,5)=+3$ она касается гиперболы

~~если $a<-2 \Rightarrow y(1)>2$~~

$a=-2$ при $a<-2$

$y(1)>4$

$y(3)<0$

при этом при b она пересечёт гиперболу и это не будет удовл. усл

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$4x^2+2x-15xy+9y^2+3y-2=0$

$4x^2+x(2-15y)+9y^2+3y-2=0$

$D=4-60y+225y^2-16(9y^2+3y-2)=$

$=4-60y+225y^2-144y^2-48y+32=81y^2-108y+36=$

$=(9y-6)^2$

$x=\dfrac{(15y-2)\pm|9y-6|}{8}$ $\quad x_1=\dfrac{15y-2+9y-6}{8}=\dfrac{24y-8}{8}=3y-1$

$x_2=\dfrac{15y-2-9y+6}{8}=\dfrac{6y+4}{8}=\dfrac{3}{4}y+\dfrac{1}{2}=$

$(x-3y+1)(4x-3y-2)=0$

1) $x=3y-1$

$\cancel{3x^2-6x+}$ $3(9y^2-6y+1)-6(3y-1)+3y^2-4y-4=0$

$27y^2-18y+3-18y+6+3y^2-4y-4=0$

$30y^2-40y+5=0$

$6y^2-8y+1=0$

$D=64-24=40$

$y=\dfrac{8\pm2\sqrt{10}}{12}=\dfrac{2}{3}\pm\dfrac{\sqrt{10}}{6}$ $\quad y_1=\dfrac{2}{3}+\dfrac{\sqrt{10}}{6}$ $\quad x_1=2+\dfrac{\sqrt{10}}{2}-1=1+\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

$y_2=\dfrac{2}{3}-\dfrac{\sqrt{10}}{6}$ $\quad x_2=1-\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

2) $x=\dfrac{3}{4}y+\dfrac{1}{2}$

$3\left(\dfrac{9}{16}y^2+\dfrac{3}{4}y+\dfrac{1}{4}\right)-6\left(\dfrac{3}{4}y+\dfrac{1}{2}\right)+3y^2-4y-4=0$

$\dfrac{27}{16}y^2+\dfrac{9}{4}y+\dfrac{3}{4}-\dfrac{18}{4}y-3+3y^2-4y-4=0$

$\dfrac{75}{16}y^2-\dfrac{25}{4}y-\dfrac{25}{4}=0\quad\Big|\cdot16\qquad 75y^2-100y-100=0$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$\cancel{75y^2-100y+112=0}$

$D = 10000 - 300\cdot 112 = 10000 - 33600 < 0$ $\varnothing$.

$x = 1 + \frac{\sqrt{10}}{2}$ $\quad$ $x_2 = 1 - \frac{\sqrt{10}}{2}$

$y = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{10}}{6}$ $\quad$ $y_2 = y = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{10}}{6}$

по усл: $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \geq \frac{2}{3} \\ x \geq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} y \leq \frac{2}{3} \\ x \leq 1 \end{cases} \end{array}\right. \\ 3y > 2x \end{array}\right.$

$x_1\ 1+\frac{\sqrt{10}}{2} > 2{,}5$

$y_1 > \frac{2}{3}$ $\quad$ $3y_1 - 2x_1 = 2 + \frac{\sqrt{10}}{2} - 2 - \sqrt{10} = -\frac{\sqrt{10}}{2}$ не уд усл

$x_2 < 1$

$y_2 < \frac{2}{3}$ $\quad$ $3y_2 - 2x_2 = 2 - \frac{\sqrt{10}}{2} - 2 + \sqrt{10} = \frac{\sqrt{10}}{2} > 0$ уд усл

Ответ: $\left(1 - \frac{\sqrt{10}}{2};\ \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{10}}{6}\right)$; $(2;2)$

$75y^2 - 100y - 100 = 0 \quad |:25$

$3y^2 - 4y - 4 = 0$ $\quad$ $D = 16 + 48 = 64$

$y = \frac{4 \pm 8}{6}$ $\quad$ $y_1 = 2$ $\quad$ $x_1 = \frac{3}{4}\cdot 2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$

$y_2 = -\frac{2}{3}$ $\quad$ $x = \frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$

$x = 2$ $\quad y = 2$ $\qquad$ $x = 0$ $\quad y = -\frac{2}{3}$

уд усл $\qquad$ $3y - 2x < 0$ не уд усл

Ответ: $(2;2)$; $\left(1 - \frac{\sqrt{10}}{2};\ \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{10}}{6}\right)$.

N 3

$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$

$x^2 + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - 3^{\log_4(x^2+6x)}$ $\qquad$ $x^2 + 6x = t$

$t \geq |t|^{\log_4 5} - 3^{\log_4 t}$ $\qquad$ $t > 0$

$t \geq t^{\log_4 5} - 3^{\log_4 t}$ $\qquad$ $3^{\log_2 8} = 8^{\log_2 3}$

$t \geq t^{\log_4 5} - t^{\log_4 3}$ $\qquad$ $3^{\log_4 t} = t^{\log_4 3}$ $\quad$ $\log_4 c = a$

$t^{\log_4 5} - t^{\log_4 3} - t^1 \leq 0$ $\qquad$ $\log_4 5 = \log_4(4+1) = 1$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле) Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$\sin((2\alpha+2\beta)+2\beta) + \sin((2\alpha+2\beta)-2\beta) = -\frac{8}{17}$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \cancel{\cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta} + \sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta - \cancel{\cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta} = -\frac{8}{17}$

$\underbrace{\sin(2\alpha+2\beta)}_{-\frac{1}{\sqrt{17}}}\cos 2\beta = -\frac{4}{17}$

$\frac{\cos 2\beta}{\sqrt{17}} = \frac{4}{17}$ $\quad \cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{16}{17}} = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$ $\quad 2\beta$ — IV четверть

1) $\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\frac{4\sin 2\alpha}{\sqrt{17}} + \frac{\cos 2\alpha}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

1) $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$

=> у синуса изменился знак => $\left[\begin{array}{ll} 2\alpha = \frac{\pi}{2} & \alpha = \frac{\pi}{4} \\ 2\alpha = \pi & \alpha = \frac{\pi}{2} \end{array}\right.$

2) $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ знак не поменялся

=> $2\alpha = 0$ $\quad 2\alpha = 2\pi$

$2\alpha = \frac{3\pi}{2}$

$\alpha = 0$ $\quad \alpha = \frac{3\pi}{4}$

$\alpha = \pi$

т.к. по усл $tg\,\alpha$ сущ =>

=> возможные α — $\frac{\pi}{4}$; 0; $\frac{3\pi}{4}$; π

$tg\frac{\pi}{4} = 1$ $\quad tg\,0 = 0$ $\quad tg\frac{3\pi}{4} = -1$ $\quad tg\,\pi = 0$

N 2

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2} \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 \end{cases}$$

$\sqrt{3xy-2x-3y+2} = \sqrt{x(3y-2)-(3y-2)} = \sqrt{(3y-2)(x-1)}$ $\quad y > \frac{2}{3}$ $x > 1$

$y < \frac{2}{3}$: $3y - 2x < 0$

$x < 1$

$3y < 2$ $\quad 2x < 2$

$9y^2 - 12xy + 4x^2 = 3xy - 2x - 3y + 2$

$3x^2 - 6x + 3y^2 - 4y - 4 = 0$

$D = 36 - 12(3y^2-4y-4) = 36 - 36y^2 + 48y + 48 = \frac{(-3y^2+4y+4)}{12}$

$3x^2 - 6x + 3 - 3 + 3y^2 - 4y + \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = 4$

$(x\sqrt{3} - \sqrt{3})^2 + (y\sqrt{3} - \frac{2}{\sqrt{3}})^2 = \frac{25}{3} = (\frac{5}{\sqrt{3}})^2$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 $\quad tg\alpha - ?$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\qquad$ $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\qquad$ $\sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos \cancel{2\beta}\sin\cancel{4\beta} + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\cancel{-\sin 2\alpha(}$

$\cancel{\sin 2\alpha(2\cos^2 2\beta - 1) + \cos 2\alpha \cdot 2\sin 2\beta\cos 2\beta}$

$\cancel{+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}}$

$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$2\sin\alpha\cos\alpha(1-2\sin^2\beta) + (1-2\sin^2\alpha)\cdot 2\sin\beta\cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$2\sin\beta\cos\beta - 4\sin^2\alpha\sin\beta\cos\beta + 2\sin\alpha\cos\alpha(1-2\sin^2\beta) + \frac{1}{\sqrt{17}} = 0$

$\sin(2\alpha+4\beta) = \sin((2\alpha+2\beta)+2\beta) = \sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\cdot\sin 2\beta$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cos(2\alpha+2\beta) = \pm\sqrt{1-\frac{1}{17}} = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

1) $\quad -\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\beta + \frac{4\sin 2\beta}{\sqrt{17}} + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin 2\alpha = \sin((2\alpha+2\beta)-2\beta) = \sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta - \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \cancel{\cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta}) + \sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta - \cancel{\cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta} +$
$+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\frac{-2\cos 2\beta}{\sqrt{17}} + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$ $\qquad$ $-2\cos 2\beta + \sqrt{17}\sin 2\alpha = -\frac{8}{\sqrt{17}}$

$\cos 2\beta = \frac{\frac{4}{\sqrt{17}} - \sqrt{17}\sin 2\alpha}{2}$

$\sin 2\beta = \sqrt{1 - \frac{16}{17} + 4\sin 2\alpha - 17\sin^2 2\alpha} = \sqrt{\frac{1}{17} + 4\sin 2\alpha - 17\sin^2 2\alpha}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)