МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Пусть $\gamma = 2\alpha + 2\beta$, а $\delta = 2\beta$, тогда

$\sin\gamma = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ и $\sin(\gamma+\delta) + \sin(\gamma-\delta) = -\frac{2}{5}$

рассмотрим второе уравнение:

$\sin(\gamma+\delta) + \sin(\gamma-\delta) = 2\sin\gamma\cos\delta = -\frac{2}{5}$

Однако $\sin\gamma = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, так что $\cos\delta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

Отсюда $\sin 2\beta = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$.

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha \pm 2\cos 2\alpha = -1$ ($\cos\alpha = 0$ - не является решением $0 \neq +1$, $0 \neq 3$)

1) $\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1$

$2\sin\alpha\cos\alpha + 4\cos^2\alpha - 2 = -1$

$4\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha = 1$

$3\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - \sin^2\alpha = 0$

$tg^2\alpha - 2tg\alpha - 3 = 0$

По теореме Виета:

$tg\alpha = -1$ $tg\alpha = 3$

2) $\sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha = -1$

$2\sin\alpha\cos\alpha - 2 + 4\sin^2\alpha = -1$

$4\sin^2\alpha + 2\cos\alpha\sin\alpha - 1 = 0$

$3\sin^2\alpha + 2\cos\alpha\sin\alpha - \cos^2\alpha = 0$

$3tg^2\alpha + 2tg\alpha - 1 = 0$

По теореме Виета:

$tg\alpha = -1$ $tg\alpha = \frac{1}{3}$

Отмечу, что так как три значения были найдены, но, исходя из условия, их можно не проверять.

Ответ: $tg\alpha = -1$; $tg\alpha = \frac{1}{3}$; $tg\alpha = 3$.

№2

Пусть $a = x-6$ и $b = 2y-1$, тогда

$2xy - 12y - x + 6 = ab$

$x - 12y = a - 6b$

$x^2 + 36y^2 - 12x - 36y + 45 = a^2 + 9b^2$

$$\begin{cases} a - 6b = \sqrt{ab}, \\ a^2 + 9b^2 = 90. \end{cases}$$

$ab \geq 0$ и, $a - 6b \geq 0$

$$\begin{cases} a^2 - 12ab + 36b^2 = ab & (1) \\ a^2 + 9b^2 = 90 & (2) \end{cases}$$

~~Вычтем из второго уравнения первое, из второго четыре первых:~~

~~$-25b^2 + 12ab = 90 - ab$~~

~~Вычтем из первого уравнения второе и из четырех вторых первое:~~

~~$(1)^*\ 27b^2 - 12ab = ab - 90$~~

~~$(2)^*\ 3a^2 + 12ab = 360 - ab$~~

~~$4\cdot(1)^* + (2)^*:\quad 100b^2 + 3a^2 = 0$~~

~~откуда $a = \frac{10}{3}b$~~

~~Подставляем „a“ в (2): $\frac{100}{3}b^2 + 9b^2 = 90$~~

1) $a^2 - 13ab + 36b^2 = 0$

$b \neq 0$

$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 13\frac{a}{b} + 36 = 0$, По теореме Виета:

$\frac{a}{b} = 9$ и $\frac{a}{b} = 4$

~~$\frac{a}{b}$~~

№3

$$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$$

$10x - x^2 > 0$:

$$10x - x^2 + (10x - x^2)^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3(10x - x^2)}$$

$$10x - x^2 \geq (10x - x^2)^{\log_3 5} - (10x - x^2)^{\log_3 4}$$

Пусть $10x - x^2 = n$

$$n \geq n^{\log_3 5} - n^{\log_3 4}$$

При $1 \geq n > 0$ $\quad n^{\log_3 5} - n^{\log_3 4} \leq 0$

$$0 < 10x - x^2 \leq 1 \iff \begin{cases} x(10-x) > 0 \\ x(10-x) \leq 1 \end{cases}$$

$(0; 5 - \sqrt{24}] \cup [5 + \sqrt{24}; 10)$

При $n > 1$:

$$\cancel{\log_n n \geq \log_n n^{\log_3 5} - \log_n n^{\log_3 4}}$$

$$n \geq n^{\log_3 4}\left(n^{\log_3 \frac{5}{4}} - 1\right)$$

$$1 \geq n^{\log_3 \frac{4}{3}}\left(n^{\log_3 \frac{5}{4}} - 1\right)$$

$$\log_n 1 \geq \log_3 \frac{4}{3} \cdot \log_n\left(n^{\log_3 \frac{5}{3}} - 1\right)$$

$$\log_n\left(n^{\log_3 \frac{5}{3}} - 1\right) \leq 0$$

$$n^{\log_3 \frac{5}{3}} - 1 \leq 1$$

$$n \leq 2^{\frac{1}{\log_3 \frac{5}{3}}}$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{a}{b} = 9$

$a^2 + 9b^2 = 90$

$90b^2 = 90$

$b = \pm 1$

$a = \pm 9$

с учетом, что $ab \geq 0$

$a = -9$ при $b = -1$ и

$a = +9$ при $b = 1$

$\frac{a}{b} = 4$

$a^2 + 9b^2 = 90$

$16b^2 + 9b^2 = 90$

$b^2 = \frac{18}{5}$

$b = \pm 3\sqrt{\frac{2}{5}}$, откуда $a = \pm 12\sqrt{\frac{2}{5}}$

с учетом $ab \geq 0$

$a = -12\sqrt{\frac{2}{5}}$ при $b = -3\sqrt{\frac{2}{5}}$ и

$a = 12\sqrt{\frac{2}{5}}$ при $b = 3\sqrt{\frac{2}{5}}$

$a = x - 6 \Rightarrow \cancel{x \in \{-3; -12\sqrt{\frac{2}{5}}+6; 12\sqrt{\frac{2}{5}}+6; 15\}}$

$\cancel{b = 2y - 1 \Rightarrow y \in}$

$\cancel{\begin{cases} x = a+6 \\ y = \frac{b+1}{2} \end{cases} \Rightarrow (-3; 0), \left(6-12\sqrt{\frac{2}{5}}; \frac{1-3\sqrt{\frac{2}{5}}}{2}\right), \left(6+12\sqrt{\frac{2}{5}}; \frac{1+3\sqrt{\frac{2}{5}}}{2}\right), (15; 1)}$

~~Ответ:~~ $\cancel{(-3; 0), \left(6-12\sqrt{\frac{2}{5}}; \frac{1-3\sqrt{\frac{2}{5}}}{2}\right), \left(6+12\sqrt{\frac{2}{5}}; \frac{1+3\sqrt{\frac{2}{5}}}{2}\right), (15; 1)}$

с учетом, что $a - 6b \geq 0$ остаются

$a = 9$ $b = 1$ и $a = -12\sqrt{\frac{2}{5}}$ $b = -3\sqrt{\frac{2}{5}}$

$a = x - 6 \Rightarrow x = a + 6$ $b = 2y - 1 \Rightarrow y = \frac{b+1}{2}$

$(15; 1)$ и $\left(6 - 12\sqrt{\frac{2}{5}}; \frac{1-3\sqrt{\frac{2}{5}}}{2}\right)$

Ответ: $(15; 1)$ и $\left(6 - 12\sqrt{\frac{2}{5}}; \frac{1-3\sqrt{\frac{2}{5}}}{2}\right)$

$\angle EFC = \angle FEA$, так как $EC = FA$

$\angle BFE = \angle BAE$, ~~как~~ опираются на BE.

$\angle BFE = \angle CFE \Rightarrow EF$ делит BC пополам. Однако, линия, которая делит хорду пополам и перпендикулярна ей — радиус, так что EF — диаметр.

Пусть радиус Ω равен R, а ω — r.

Прямоугольные треугольники $\triangle BCA$ и $\triangle NGA$ подобные по двум углам, по прямому и общему $\angle A$.

$$GA = \frac{2r}{2R} CA = \frac{r}{R} CA$$

По теореме о касательной и секущей:

$$CD^2 = CA \cdot GA = \frac{r}{R} CA^2 = \frac{r}{R}\left(\cancel{BD}\ \cancel{BC^2 - 4R^2}\ 4R^2 - BC^2\right)$$

$$BD^2 = 4(R-r)r = 4Rr - 4r^2$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

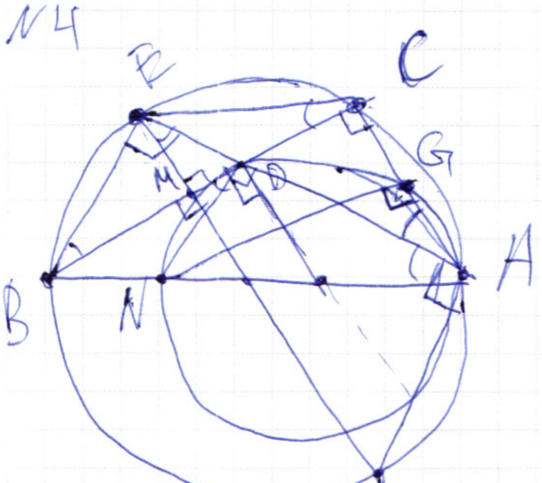
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~Ответ: $(0; 5-\sqrt{24}] \cup [1; 2^{\frac{1}{\log_3 \frac{8}{3}}}]$~~

$2^{\frac{1}{\log_3 \frac{5}{3}}} \geq 10x - x^2 \geq 1$

N4



$\angle BCA$ опирается на ~~дуги~~ диаметр, так что $\angle BCA = 90°$

Так как $CA \perp BC$ и $EF \perp BC$, то $CA \parallel EF$, а следовательно $EFAC$ — равнобедренная трапеция.

$\angle ECB = \angle EAB$, как опирающиеся на одну дугу.

$\angle EAB = \angle BDN$ по теореме об угле между секущей и хордой

$\angle BDN = \angle FEA$ так как $EF \perp BC$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$0 > \log_3 4 \left(4^{\log_3 4} - 1\right)$

$a > 0$ $\quad b = \frac{-130 \pm \sqrt{130^2 - 140 \cdot 90}}{70}$

$f(p) = f(4p) + f\left(\frac{1}{4}\right)$ $\quad a^b + a^c \geq a$ $\quad f\left(\frac{p}{4}\right) = f(p) + f\left(\frac{1}{4}\right)$ $\quad f\left(\frac{x}{2}\right) = f(8)$

$\sin 2\beta = -\frac{4}{5}$ $\quad \cos 2\beta = $

$\left[\frac{p}{4}\right] = f(4p)$ $\quad \sin\gamma = \frac{1}{\sqrt5}$ $\quad \sin(\gamma+\delta) =$

$(x-6)$ $\quad f(5) = f(25) + f\left(\frac{1}{5}\right)$

$\sin(\gamma+\delta) + \sin(\gamma-\delta) = -\frac{2}{\sqrt5}$

$\sin\gamma \sin\delta = $

$f(4) = 0$

$\sin x = \frac{-1 \pm \sqrt5}{2}$

$(x-6)(2y-1)$

$x(x-10)$ $\quad x \in (0, 10)$

$(x-12y)^3 = (x-6)(2y-1)$ $\quad \left[\frac{p}{4}\right]$

$25b^2 - 12ab = ab - 90$

$x^2 - 10x + 1 = 0$

$x^2 - 24yx$

$f(4p) = f(p) + f(4) = p$

$a = 5 \pm \sqrt{25 - 8}$

$f(2) = \left[\frac{2}{4}\right] = 0$ $\quad f(p) = \left[\frac{p}{4}\right] = f(p) + f(1)$

$f(4) = f(2) + f(2)$ $\quad 9(4y^2 - 4y + 1)$

$(x-6)^2 + (2y-1)^2 = 90$ $\quad 54$

$a^{\log_b c}$ $\quad c^{\log_b a}$ $\quad f(9) = 0$

$\log_3 5$ $\quad a^{\log_3 4}$ $\quad b$ $\quad (a+b)^2$

$(a - 6b)^2 = ab$

$a^2 - 12ab + 36b^2 = ab$

$a \geq 0$ $\quad a^2 + b^2 = 90$

$\log_3 a \geq \log_3 \frac{5}{4}$ $\quad = 90$

$13ab = 90 + 35b^2$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

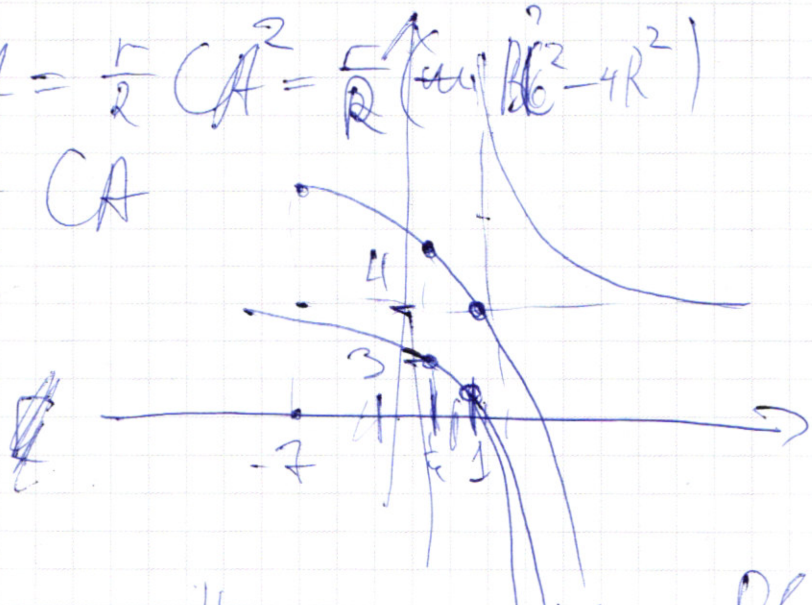
$CD^2 = CA \cdot GA = \frac{r}{2} CA^2 = \frac{r}{R}(4 BC^2 - 4R^2)$

$GA = \frac{r}{R} CA$

$BD^2 = 4(R-r)R$

$\cancel{D \angle d}$

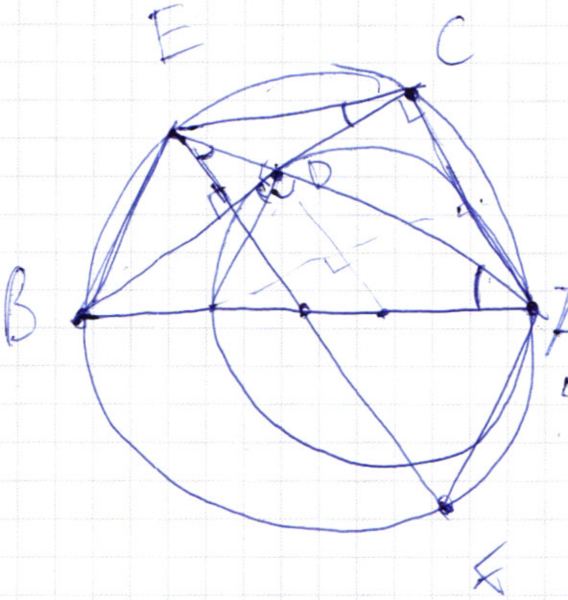
$2(R-r)|BD|$



$4 + \frac{4}{4x-5} \leq ax + 6$

$[3; 0]$

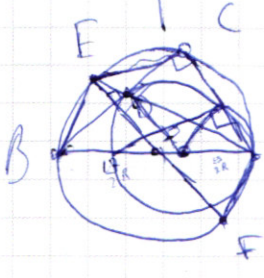
$BC = 66$



$32x^2 + 36x - 3$

$4(9x - 8x^2)$

$\frac{-36}{64} = -\frac{9}{16}$



$90 - 2\alpha$

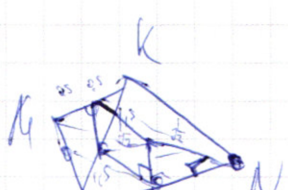
$CD^2 = 4Rr - \frac{rBC^2}{R}$

$BD^2 - CD^2 = \frac{rBC^2}{R} - 4r^2$

$y_B = c - a x_B^2 = -3 + 32 \cdot \frac{81}{16^2} =$

$= -3 + \frac{81}{8} \approx 10$

$-2 + 9 \cdot 3 = +4$



$-32 + 36 - 3 = 1$

$p(\frac{7}{3}) = p(7) +$

$p(7) = p(21) + p(\frac{7}{3})$

☑ черновик ☐ чистовик

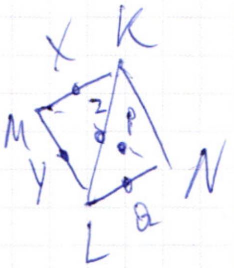
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

Суммарно ~~всего~~ пар:
$10\cdot13+7\cdot7+3\cdot4+1\cdot3+2\cdot1=196$
Ответ: 196

№ 6



Пусть X, Y, Z – середины ребер MK, ML, KL соответственно и P, Q – середины ребер MN, LN соответственно.

Так как $XZ \parallel ML$ и $PQ \parallel ML$, то $XZ \parallel PQ$.

Аналогично $XP \parallel ZQ$, так что получаем, что XZQP – описанный параллелограмм, то есть прямоугольник.

Так же из подобных соображений следует, что YPNQ – тоже прямоугольник.

$\angle LNM = 90°$, $\triangle MKL$ проецируется в $\triangle MNL \Rightarrow LN = \frac{KL}{KM} MN = 3MN = 3\sqrt{2}$

По Т Пифагора: $ML = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Центр описанной сферы лежит на серединных перпендикулярах к сторонам, то есть в данном случае проходит через Y и равен $\frac{ML}{2}$. Ответ: $ML = 2\sqrt{5}$

$R_{min} = \sqrt{10}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 5

$f(a) = f(a) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

$f(1) = f(\frac{1}{a}) + f(a) \Rightarrow f(\frac{1}{a}) = -f(a)$

$f(2) = [\frac{2}{4}] = 0$ ~~f(3)=0, f(4)=~~

~~f(3)=0~~

$f(2) = 0 \Rightarrow f(4) = f(16) = f(8) = 0$

$f(3) = 0 \Rightarrow f(9) = 0,\ f(6) = 0,\ f(12) = 0$

~~f(6~~ $f(18) = 0,\ f(24) = 0$

$f(5) = 1 \Rightarrow f(10) = 1,\ f(15) = 1,\ f(20) = 1,\ f(25) = 2$

$f(7) = 1 \Rightarrow f(14) = 1,\ f(21) = 1$,

$f(11) = 2 \Rightarrow f(22) = 2$

$f(17) = 4$ $f(13) = 3$

$f(19) = 4$

$f(23) = 5$

Замечу, что $f(\frac{a}{b}) < 0$, если $f(b) > f(a)$

Если $f(a) = 0$, то ему соответствует 14 b, для которых $f(b) > 0$

для $f(a) = 1$ соответствует 7 b

для $f(a) = 2$ — 4, для $f(a) = 4$ — 1 b и для $f(a) = 3$ — 3 b

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)