

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 13x + \sqrt[3]{169x^2 - y^2} = 92, \\ y + \sqrt[3]{169x^2 - y^2} = -124. \end{cases}$$

2. [4 балла] Решите неравенство

$$\sqrt{\log_{3x^2} x^9} \leq \log_{9x^3} \frac{1}{x^3}.$$

3. [5 баллов] Найдите количество семизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые три последовательные степени числа десять равна 12828.

4. [5 баллов] Даны равнобокая трапеция $ABCD$ (AD и BC – основания, $AD > BC$) и окружность ω с центром C , касающаяся стороны AD . Касательные к ω , проведённые из точки B , пересекают прямую AD в точках P и Q (точка P лежит между Q и D). На продолжении стороны CB за точку B выбрана точка N так, что $\angle CPN$ – прямой. Найдите углы ADC , NQC и площадь четырёхугольника $NCDQ$, если известно, что $\angle NCP = \arctg \frac{15}{8}$, $AP = 17$, $NC = 34$.

5. [5 баллов] Дана система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{3} \cos(x - y) = 7 \cos\left(\frac{2\pi}{3} + y\right), \\ \cos(2x - y) + \sqrt{3} \sin(2x - y) = 12 \sin\left(y + \frac{\pi}{6}\right). \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y$, если известно, что оно определено и что этих значений не меньше двух.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x + 26}{2x + 3} \leq ax + b \leq 1 + \sqrt{-\frac{33}{4} - 13x - x^2}$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{19}{2}; -\frac{3}{2}\right)$.

7. [6 баллов] Дан параллелепипед $KLMNK_1L_1M_1N_1$, грани KLL_1K_1 и $K_1L_1M_1N_1$ которого являются прямоугольниками. Сфера S касается прямых MM_1 и M_1N_1 , плоскости $K_1L_1M_1$, а также плоскости KLL_1 в точке K . Эта сфера повторно пересекает отрезок KM_1 в точке A . Найдите $\angle KK_1N_1$ и объём параллелепипеда $KLMNK_1L_1M_1N_1$, если известно, что $AK = 3$, $AM_1 = 1$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

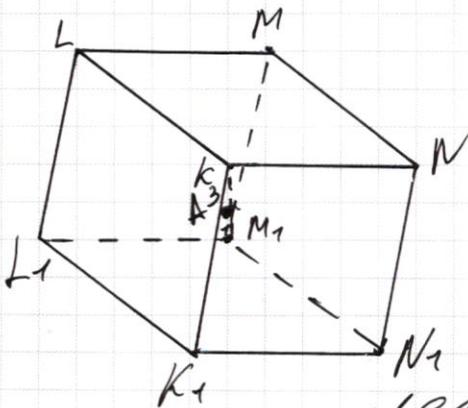
Рассмотрим наибольшую степень десятки, на которую мы сможем остаток. Заметим, что это не 10000, иначе сумма остатков была бы не больше $9999 + 999 + 99 = 11100 - 3 < 12828$. При этом она меньше 1000000, ведь мы рассматриваем слишком маленькое число, которое полностью будет остатком от этой степени десятки, но сумма меньше 4-значного числа. Значит, есть всего 2 варианта последовательностей степени десятки:

1) 10000, 1000, 100. Пусть искомого 4-значного числа равны a и b и c . Тогда сумма остатков равна $cdetg + detg + etg = 12828$. Т.к. сумма $3g$ оканчивается на 8, то $g=6$, тогда $3a$ оканчивается на $2-1=1$, то $f=7$, и т.д. найдем, что $e=2$, либо $e=0$ и $d=6$, либо $c=1$ и $d=1$, а и b - любые (но $a \neq 0$). Таким образом, всего подходящих 4-значных чисел:
 $9 \cdot 10 \cdot 2 = 180$.

2) 100000, 10000, 1000. Тогда сумма остатков равна $abcdetg + detg + cdetg = 12828$. Тогда можно однозначно опреде-

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

П.р. $BN = BQ = BK = BC = BR$ и $NQ = CP \Rightarrow \triangle BNQ =$
 $= \triangle BCR \Rightarrow \angle QNB = \angle BCR = \angle ADC \Rightarrow$
 $\Rightarrow NCDQ$ - параллелограмм $\Rightarrow S_{NCDQ} = NC \cdot h$,
 где $h = \frac{16 \cdot 15}{14}$, т.к. $CP = 16$, $\angle CPD = \arctg \frac{15}{8} \Rightarrow$
 $\Rightarrow S_{NCDQ} = 34 \cdot \frac{16 \cdot 15}{14} = 480$.
 Ответ: $S_{NCDQ} = 480$, $\angle ADC = \arctg \frac{15}{8}$.



✓ 4

Т.к. сфера S касается
 плоскости KK_1L в точке K
 и плоскости $K_1L_1M_1$ и M_1N_1
 \Rightarrow точка касания плоскости
 $K_1L_1M_1$

лежит на прямой M_1N_1 , при этом
 точки K , O (центр сферы) и ~~точка~~ точка касания
 лежат на плоскости перпендикулярной
 плоскостям KK_1L_1 и $K_1L_1M_1$ (т.к. касания
 сферы)
 но это же плоскость KK_1N (т.к. KK_1L_1L и
 KK_1N_1N - прямоугольники) $\Rightarrow N_1$ - ~~точка~~
 точка касания прямой N_1M_1 и плоскости
 $K_1L_1M_1$.

Рассмотрим плоскость KM_1N_1 , которая
 отсекает окружность у сферы и ~~кас~~ M_1N_1 -
 касательная, а M_1K - секущая $\Rightarrow M_1N_1^2 = M_1A \cdot M_1K$

$$= 1 \cdot (3+1) = 4 \Rightarrow M_1 N_1 = 2.$$

Т.к. $MN \parallel M_1 N_1$ и $K_2 K_1 \parallel N_1 N$ - прямоуголь. \Rightarrow ~~AMN~~ $MN \perp$
 \perp плоскости $K_2 K_1 N_1 \Rightarrow \Delta K_1 N_1 M_1$ - прямоуголь. \Rightarrow
 $\Rightarrow K_1 N_1 = \sqrt{K_1^2 - 2^2} = \sqrt{12}$.

С другой стороны $K_2 K_1$ и $K_2 N_1$ - касательные $\Rightarrow K_2 K_1 = K_2 N_1$ и по теореме о равных отрезках.

Тогда $12 = 2x^2 \Rightarrow x^2 = 6 \Rightarrow x = \sqrt{6}$. $\cos \angle K_2 K_1 N_1$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$1) \quad 169x^2 - 4y^2 = (92 - 13x)^2$$

$$92 - 13x = -124 - y$$

$$y = 13x - 216$$

$$169x^2 - 169x^2 + 13 \cdot 216 \cdot 2x - 216^2$$

$$13x + 6726x - 216^2 = 92$$

$$216 \cdot (26x - 216) = (92 - 13x)^2$$

$$2 \cdot 216 \cdot (-13x - 108)$$

$$2) \quad \log_{3x^2} x \geq 0$$

$$= \log_{9x^3} \frac{1}{x^3}$$

$$\sqrt[3]{10000 \quad 1000 \quad 100}$$

$$\frac{9999}{999} \quad 1100-3$$

$$\log_{3x^2} x^9 \leq -1 + \log_9 x^3$$

$$100000 \quad 10000 \quad 1000$$

$$1000,000 \quad 100,000 \quad 10,000$$

$$\begin{matrix} 0,21 \\ abcde \\ + bcde \\ \hline 12828 \end{matrix}$$

$$8 \quad 1828$$

$$\begin{matrix} 0,10,21 \\ abcde \\ + abcde \\ \hline 12828 \end{matrix}$$

$$e=6 \quad d=7 \quad c=2$$

$$\begin{matrix} 0,10,21 \\ abcde \\ + abcde \\ \hline 12828 \end{matrix}$$

$$b=6 \text{ или } b=0 \quad a=1$$

$$\begin{matrix} 0,10,21 \\ abcde \\ + abcde \\ \hline 12828 \end{matrix}$$

$$e=6 \quad d=7 \quad c=2 \quad b=4 \quad a=0 \quad f=0 \quad g=$$

$$\begin{matrix} 0,10,21 \\ abcde \\ + abcde \\ \hline 12828 \end{matrix}$$

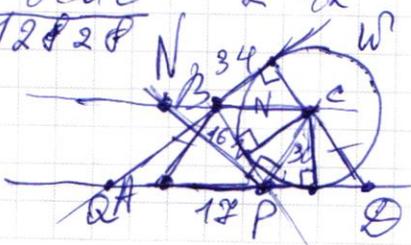
$$\angle NCP = \arctan \frac{15}{8}$$

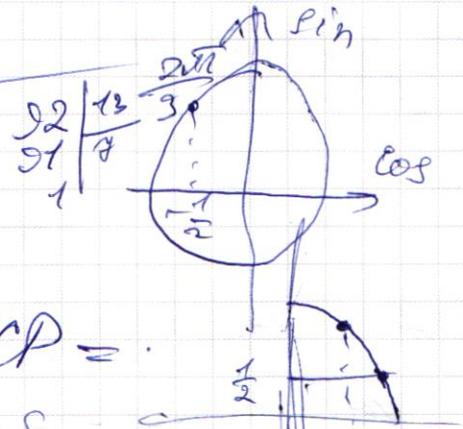
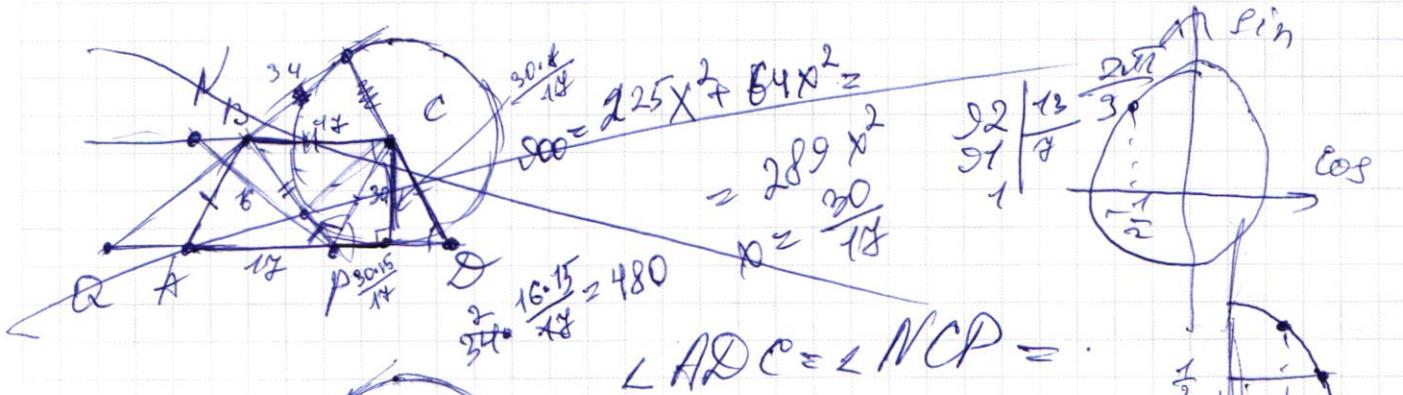
$$\begin{matrix} 0,10,21 \\ abcde \\ + abcde \\ \hline 12828 \end{matrix}$$

$$2 \quad 12$$

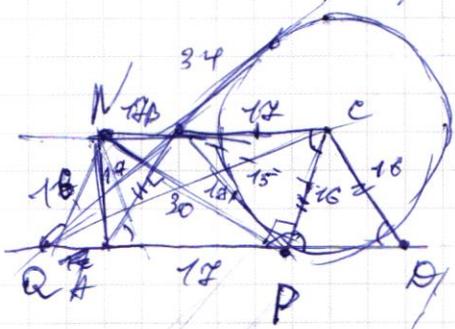
$$\frac{CP}{NP} = \frac{15}{8}$$

$$34^2 = 225x^2 + 64x^2 \quad x=2$$

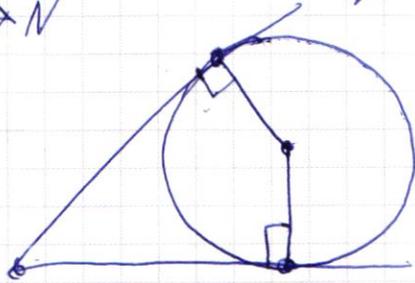
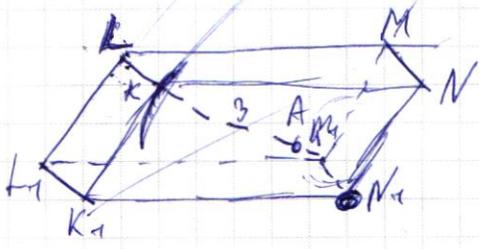




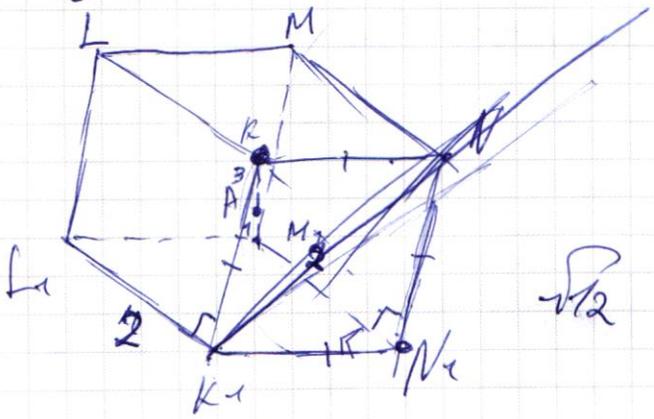
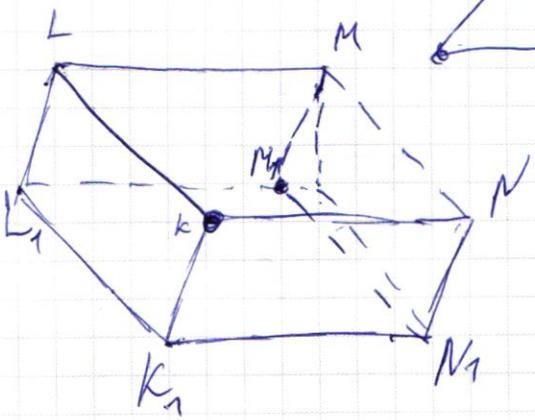
$\angle ADC = \angle NCP =$



330
 $\cos 3x^2 \geq 0$
 $x \geq 1$
 $(3x^2)^0 \quad x^9 \quad x=1$



$3x^2 \leq x^9$
 $0 \leq x^9 - 3x^2$
 $0 \leq x^7 - 3$
 $\sqrt[7]{3} \leq x$
 $x=1$
 $x \geq 0$



$16 - 4 = 12$
 $12 = 2x^2 - x^2 \cos \angle NKK_2$
 $12 = 2x^2 + x^2 \sin \angle$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

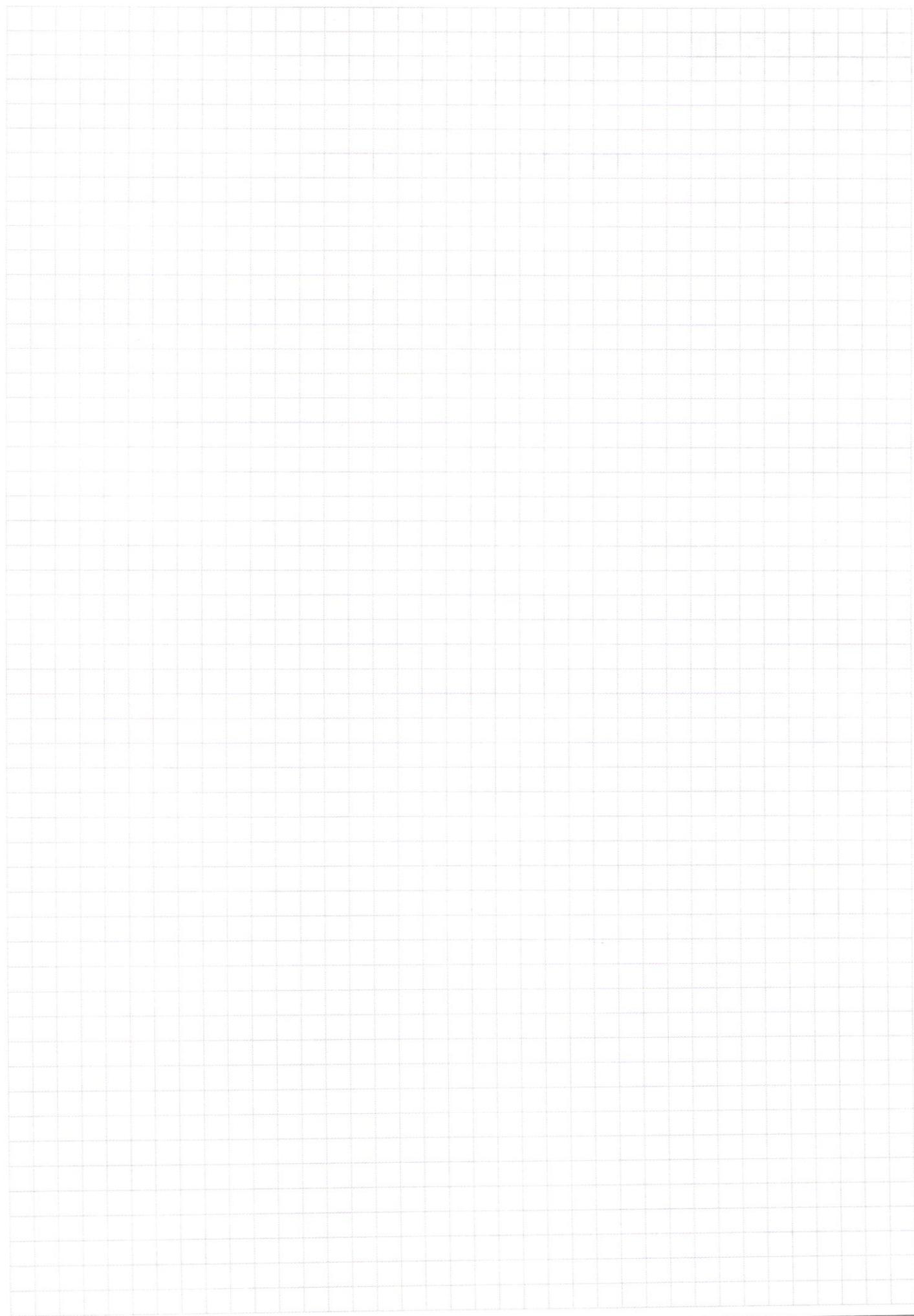
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

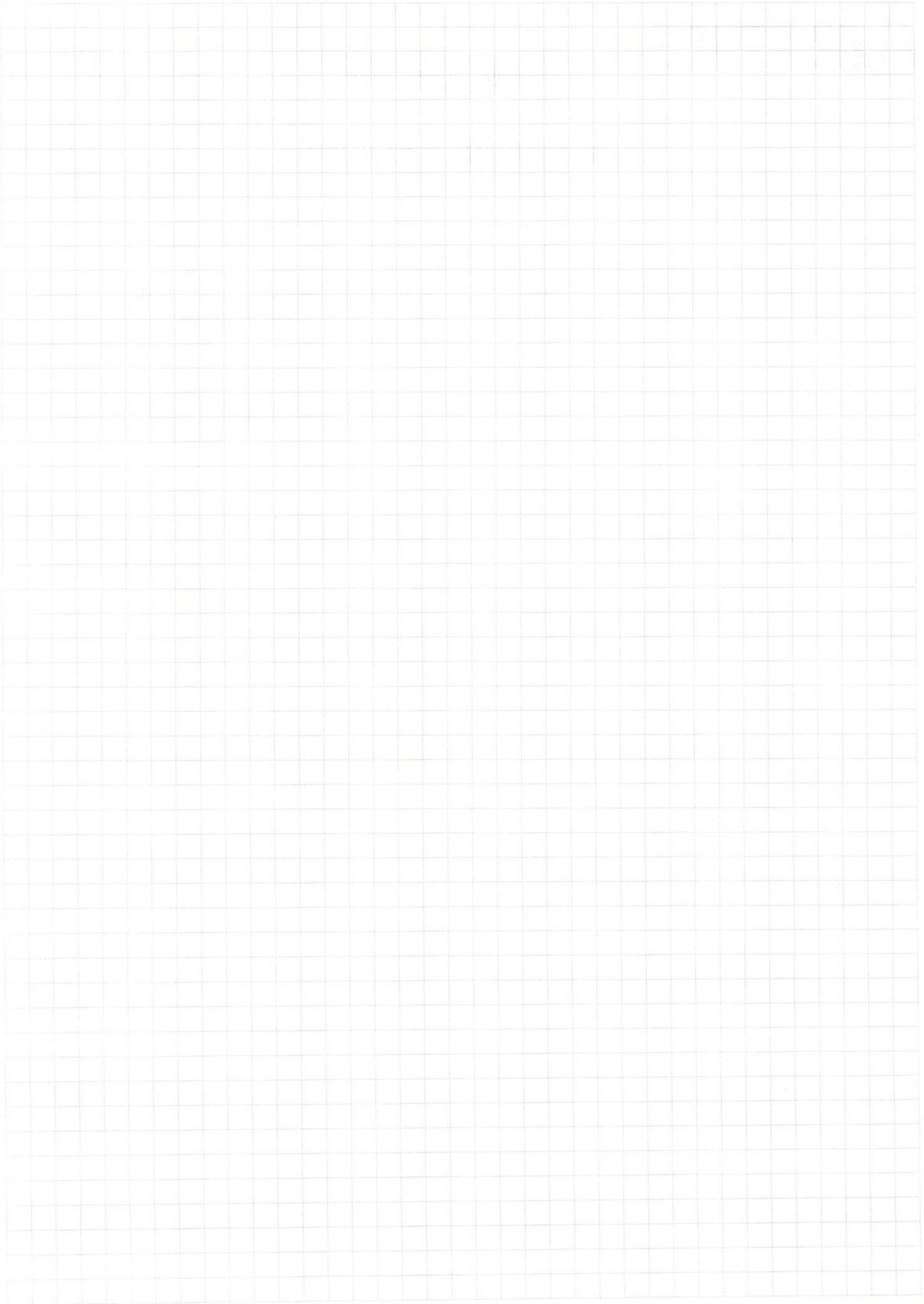
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)